Письма в ЖЭТФ, том 48, вып. 3, стр. 113 – 115 *10 августа 1988 г.*

ФАЗА БЕРРИ И КИРАЛЬНАЯ АНОМАЛИЯ

А.С.Горский

Показано, что имеется соответствие между глобальной киральной аномалией и киральными свойствами фермионной фазы Берри.

Открытие нетривиальных адиабатических фаз [1, 2] привлекло к себе значительное внимание, так как появилась уникальная возможность иметь единое описание эффектов различной физической природы (см., в качестве обзора [3]), в том числе калибровочных аномалий в квантовой теории поля [4 – 6]. Мы покажем, что фермионной фазе Берри обязана существованием и глобальная киральная аномалия.

Будем рассматривать для определенности КХД с одним безмассовым кварком. Лагранжиан в пространстве Минковского имеет вид

$$L = -\frac{1}{2}G^2_{\mu\nu} + \bar{q}i\hat{D}q - \bar{\Psi}(i\hat{D} - M)\Psi, \quad D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu , \tag{1}$$

где A_μ – глюонное поле, $G_{\mu\nu}$ – напряженность, q – кварковое поле, Ψ – поле регуляторов, g – константа связи. В дальнейшем подразумевается калибровка $A_0 = 0$. В нашем случае роль "медленных" переменных, по отношению к кварковым степеням свободы, играют статические глюонные поле $\mathbf{A}(\mathbf{x})$. Гамильтониан фермионов зависит от времени через временную зависимость внешних полей, поэтому при наложении периодических граничных условий $\mathbf{A}(0) = \mathbf{A}(T)$ мы имеем замкнутый контур в функциональном пространстве статических полей. В работах [5] кварковый детерминант был получен в виде

$$Z(T)^{T\to\infty} = \exp\left\{\frac{i}{2}\sum_n \int_0^T dt\,|E_n(t)| - \oint \mathbf{C}(\mathbf{A})d\mathbf{A}\right\}, \tag{2}$$

где второй член имеет смысл фазы Берри, а суммирование проводится по собственным состояниям одночастичного кваркового гамильтониана H_q с энергиями E_n. После регуляризации фаза может быть записана в следующей форме:

$$\oint \mathbf{C}(\mathbf{A})d\mathbf{A} = \oint d\mathbf{A} < vac\,|\,\frac{\delta}{\delta\mathbf{A}}\,|\,vac>, \tag{3}$$

причем кварковая индуцированная напряженность в пространстве полей (аналогично для регуляторов) имеет вид:

$$F^{ab}_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\delta}{\delta A^a_i(\mathbf{x})}C^b_j(\mathbf{y}) - \frac{\delta}{\delta A^b_j(\mathbf{y})}C^b_i(\mathbf{x}) = \tag{4}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n,m} \langle n | \frac{\delta}{\delta A_i^a(\mathbf{x})} | m \rangle \langle m | \frac{\delta}{\delta A_j^b(\mathbf{y})} | n \rangle \{ \operatorname{sign} E_n - \operatorname{sign} E_m \} ,$$

где i, j – лоренцевы, a, b – цветные индексы, а $|n>$ – собственные функции H_q. Вакуумное состояние определяется как прямое произведение вакуума кварков $|vac>_q$ и регуляторов $|vac>_\Psi$: $|vac> = |vac>_q \otimes |vac>_\Psi$. Одночастичный гамильтониан безмассовых кварков имеет симметричный спектр, так как справедливо равенство $\{H_q, \gamma_0\}_{ab} = 0$, эквивалентное условию $H = -H^*$ [1,3]. Следовательно $F^{ab}_{ijq} = 0$ и $C_q = (\delta\chi/\delta\mathbf{A})$ вне точек функционального пространства в которых H_q вырожден. Регуляторы в отсутствие калибровочных аномалий также имеют $F_\Psi = 0$ [3,7] и полная связность Берри $\mathbf{C} = \mathbf{C}_q + \mathbf{C}_\Psi$ вне точек вырождения является чистой калибровкой .

Для получения киральной аномалии в функциональном интеграле проводится замена переменных $q \to e^{i\alpha(x)\gamma_5} q$, $\Psi \to e^{i\alpha(x)\gamma_5}\Psi$ после чего из условия неизменности регуляризованного детерминанта $Z^{\text{per}}(T)$ имеем уравнение $\partial_\mu j_\mu^{\text{per}} = -2M\bar{\Psi}\gamma_5\Psi$. Очевидно, что правая часть может быть генерирована глобальным преобразованием с постоянным α, следовательно проявлением существования аномалии явилась бы неинвариантность фазы Берри при глобальном киральном повороте. При глобальном повороте вектора состояний в гильбертовом пространстве преобразуются как $|vac>_q \to e^{-i\alpha Q_{5q}} |vac>_q$; $|vac>_\Psi \to e^{-i\alpha Q_{5\Psi}} |vac>_\Psi$, где Q_{5q} и $Q_{5\Psi}$ операторы сохраняющихся киральных зарядов. Заряд Q_{5q} не является функционалом от внешнего поля в отличие от $Q_{5\Psi}$ содержащего аномальный член, связанный с массой регулятора:

$$Q_{5\Psi} = \int d^3x \Psi^+ \gamma_5 \Psi + Q_{5\Psi}^{\text{ан}} , \tag{5}$$

где дополнительное слагаемое имеет стандартный вид:

$$Q_{5\Psi}^{\text{ан}} = -2\omega_0(\mathbf{A}) = \frac{g^2}{8\pi^2} \int d^3x \epsilon^{ijk} \operatorname{tr}[G_{ij} A_k - \frac{2}{3} A_i A_j A_k] . \tag{6}$$

В итоге фаза Берри при глобальном киральном повороте меняется на величину

$$i\alpha \oint d\mathbf{A} \frac{\delta Q_{5\Psi}}{\delta \mathbf{A}} = i\alpha \int dt d\mathbf{x} \frac{d\mathbf{A}(\mathbf{x})}{dt} \frac{\delta Q_{5\Psi}}{\delta \mathbf{A}(\mathbf{x})} , \tag{7}$$

что находится в согласии с выражением для аномалии. Подчеркнем, что в отличие от ситуации с калибровочной локальной аномалией, когда $F \neq 0$, в нашем примере мы сталкиваемся с эффектом типа Бома--Ааронова в пространстве полей.

Если предположить, что в лагранжиане КХД содержится θ -член

$$L' = L + \frac{\theta g^2}{16\pi^2} G_{\mu\nu} G^*_{\mu\nu} , \quad G^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} G_{\alpha\beta} . \tag{8}$$

то канонический импульс калибровочного поля имеет вид $\vec{\pi} = (d\mathbf{A}/dt) + (\theta g^2 \mathbf{B}/8\pi^2)$, где $\mathbf{B}$ – магнитное поле. Наличие фазы Берри изменяет канонический импульс следующим образом: $\vec{\pi} \to \vec{\pi}' = \vec{\pi} - i < vac | \frac{\delta}{\delta \mathbf{A}} | vac >$. Действительно, уравнение Шредингера для калибровочно инвариантной волновой функции основного состояния во вторично-квантованной теории $\Phi_0(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{A}) |vac, \mathbf{A}>$ имеет вид

$$H \Phi_0(\mathbf{A}) = \epsilon_{vac} \Phi_0(\mathbf{A}) , \tag{9}$$

и в приближении Борна–Оппенгеймера уравнение Шредингера для $\varphi(\mathbf{A})$ содержит $H_{\text{эфф}} = \int d^3x \left(\frac{\pi'^2}{2} + V\right)$, где V – член потенциальной энергии. Иначе, замену $\vec{\pi} \to \vec{\pi}'$ можно проследить, вспоминая, что фермионы генерируют член $\int d^4x \frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{C}(\mathbf{A})$ в эффективном лаг-

ранжирование глюонного поля. Произведем в $H_{эфф}$ замену: $|vac>_q \to e^{-i\theta\omega_0(A)}|vac>_q$ $|vac>_\Psi \to e^{i\theta\omega_0(A)}|vac>_\Psi$ при которой трансформационные свойства полной волновой функции вакуума при глобальном калибровочном преобразовании не меняются. При такой замене в $S_{эфф}$ индуцируется дополнительное слагаемое, равное изменению фазы Берри: $\Delta\oint(C_q + C_\Psi)dA$. Одночастичный гамильтониан кварков имеет симметричный спектр, поэтому кварковая фаза должна быть квантована $i\oint C_q dA = \pi n,\ n \in Z$ [1,3]. Так как θ – произвольное число и индуцированный кварками член равен $\theta\oint dA \frac{\delta\omega_0}{\delta A} = \theta k,\ k \in Z$ (если контур замкнут в пространстве орбит $A(T) = [A(0)]^{g_k}$, где g_k – элемент калибровочной группы с топологическим зарядом k), то при $\theta \neq \pi$ возникает условие $\Delta\oint C_q dA = 0$. Условие $k = 0$ находится в прямом соответствии с занулением фермионного детерминанта безмассовых кварков в топологически нетривиальном внешнем поле [8]. Для фазы Берри регуляторных полей условие квантования отсутствует и с учетом соотношения $\delta\omega_0/\delta A = (1/8\pi^2)B$ индуцированный ими член сокращает затравочный θ – член. Таким образом, предложена гамильтонова интерпретация независимости ϵ_{vac} от θ в теории с безмассовым кварком.

Автор благодарен А.А. Рослому, А.В.Смилге и М.А.Шифману за полезные обсуждения.

Литература

1. *Berry M.V.* Proc. Roy. Soc., 1984, **A392**, 45.
2. *Simon B.* Phys. Rev. Lett., 1983, **51**, 2167.
3. *Niemi A.* Proceedings of the Workshop on Skyrmions and Anomalies, Krakow, Poland, 1987.
4. *Niemi A., Semenoff G.* Phys. Rev. Lett., 1985, **55**, 927; 1986, **56**, 1019.
5. *Nelson P., Alvarez-Gaume L.* Comm. Math. Phys., 1985, **99**, 103.
6. *Sonoda H.* Nucl. Phys. B, 1986, **266**, 44.
7. *Niemi A., Semenoff G.* Phys. Rep., 1986, **135**, 99.
8. *G. t' Hooft.* Phys. Rev., D, 1976, **14**, 3432.

Институт теоретической и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
25 мая 1988 г.