

Спиральные структуры излучения и гиперзвука в Мандельштам-Бриллюэновском зеркале

А. Ю. Окулов¹⁾

Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 14 августа 2008 г.

Теоретически показано, что обращение волнового фронта спекл-неоднородного светового поля в мандельштам-бриллюэновском зеркале сопровождается возбуждением спиральных гиперзвуковых волн с шагом, равным половине длины волны оптического излучения. Возникновение таких структур связано с нарушением изотропии изначально изотропного диэлектрика под действием интенсивной световой волны, возбуждающей стрикционную оптическую нелинейность. Предсказанный эффект допускает предельно ясную физическую интерпретацию на основе закона сохранения момента импульса. Передача момента импульса от излучения к среде происходит вблизи оптической фазовой сингулярности (нуля амплитуды светового поля) и обусловлена изменением знака проекции момента импульса излучения при операции фазового сопряжения, выполняемой обращающим зеркалом. Необходимым условием переверота момента импульса отраженного излучения является возбуждение спиральных гиперзвуковых волн, переносящих орбитальный момент количества движения.

PACS: 42.50.–p, 42.55.–f, 42.65.–k, 43.25.+y

Явление обращения волнового фронта на мандельштам-бриллюэновской нелинейности было открыто для спекл-неоднородных оптических полей [1, 2]. Оптическое излучение, описываемое полем $\mathbf{E}_p(z, \mathbf{r}, t)$, прошедшее через прозрачную диэлектрическую пластинку со случайными фазовыми неоднородностями, чей пространственный масштаб несколько превышал длину волны [3], возбуждало в многомодовом световоде, заполненном прозрачным диэлектриком, встречную фазово-сопряженную стоксову волну. Как известно, распространение фазово-сопряженной волны $\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_p^*$ имитирует движение “вспять во времени” исходной волны накачки \mathbf{E}_p . Поскольку волновые числа падающей $k_p = \omega_p/c$ и фазово-сопряженной, $k_s = \omega_s/c$ волн, отличаются на величину порядка 10^{-5} [4], то при идеальном сопряжении распределения амплитуды и фазы \mathbf{E}_p и \mathbf{E}_s во всех сечениях, перпендикулярных оси распространения z , совпадают.

Удивительной особенностью данного явления оказалось резкое улучшение качества обращения волнового фронта, то есть коэффициента корреляции $H(z)$ [1] падающей, \mathbf{E}_p , и отраженной, \mathbf{E}_s , волн:

$$H(z) = \frac{|\int \mathbf{E}_p \mathbf{E}_s^* d^2 \mathbf{r}|^2}{(\int |\mathbf{E}_p|^2 d^2 \mathbf{r})(\int |\mathbf{E}_s|^2 d^2 \mathbf{r})}, \quad (1)$$

для тех лазерных пучков, которые были предварительно подвержены сильной фазовой модуляции в по-

перечном сечении. Для пучков же с гладким поперечным распределением амплитуды и фазы, например гауссовых пучков нулевого порядка, коэффициент корреляции оказался существенно ниже, и значительная доля отраженной мощности приходилась на моды более высокого порядка [3]. Аналогичное снижение относительной доли фазово-сопряженной волны имело место и при обращении изолированных гауссовых пучков низкого порядка с фазовой сингулярностью, а именно пучков Гаусса-Лагерра первого порядка (LG) [5]. Как известно, фазовая сингулярность представляет собой особую точку волнового фронта, фаза в которой не определена, а в ближайшей окрестности этой особой точки волновой фронт имеет форму винтовой лестницы [6]. Выражение для LG с фазовой сингулярностью дается хорошо известным элементарным решением скалярного волнового уравнения в линейной среде для фиксированного состояния поляризации (например, кругового или линейного) [7, 8], которое совпадает по форме с собственной функцией первого возбужденного состояния двумерного квантового гармонического осциллятора в осесимметричном параболическом потенциале [9]. В цилиндрических координатах (z, r, ϕ) , где z – направление распространения, имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{(p,s)}(z, r, \phi, t) &\approx \\ &\approx \mathbf{E}_{(p,s)}^0 \exp[i\omega_{(p,s)}t \mp ik_{(p,s)}z + i\ell\phi] \times \\ &\times r^\ell \exp\left[-\frac{r^2}{(D^2(1 \pm iz/k_{(p,s)}D^2))}\right], \end{aligned} \quad (2)$$

¹⁾e-mail: okulov@kapella.gpi.ru

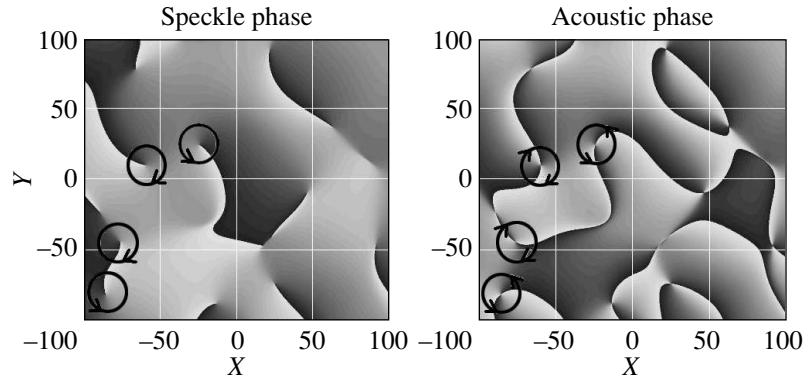


Рис.1. Дислокации фазы (а) оптического $\text{Arg}[\mathbf{E}_p(x, y, z)]$ и (б) акустического $\text{Arg}[Q(x, y, z)]$ полей в объеме мандельштам-бриллюэновского зеркала. Черный цвет соответствует фазе 0, белый – фазе 2π , а промежуточные значения фазы – оттенкам серого. Две пары вихрь-антивихрь, то есть особые точки (сингулярности с неопределенной фазой) отмечены серыми окружностям: для оптических вихрей окружности имеют одну стрелку (одиночный топологический заряд), для акустических вихрей топологический заряд удваивается вследствие передачи среде орбитального момента (окружность имеет две стрелки). При обходе вокруг статистически типичных (наиболее часто встречающихся) сингулярностей фаза изменяется на $\pm 2\pi$ – для оптического вихря и на $\pm 4\pi$ для акустического. Положения оптических и акустических вихрей в пространстве совпадают. Размер по осям (x, y) составляет 100 мкм. Для построения выбраны те плоскости z , где коэффициент корреляции $H(z)$ близок к единице. Это возможно при коэффициенте отражения ВРМБ зеркала порядка 0.1 (слабое насыщение) и при малых z , то есть вблизи выходного окна ВРМБ кюветы

где $\mathbf{E}^0_{(p,s)}$ – амплитуды встречных волн накачки (p) и стоксовой (s) рассеянной волн, соответственно, $\omega_{(p,s)}$ – их несущие частоты, $k_{(p,s)}$ – волновые числа, $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – азимутальное квантовое число (или топологический заряд LG), D – диаметр пучка. Требование периодичности \mathbf{E} по азимутальному углу ϕ приводит к квантованию орбитального момента, переносимого оптическими фотонами [10].

В работе [8] показано, что учет интерференции встречных волн позволяет существенным образом уточнить физический механизм обращения волнового фронта: интерференционная картина (то есть распределение интенсивности излучения) в окрестности фазовой сингулярности, образованная наложением двух встречных волн, представляет собой двойную спираль, причем спираль является правовинтовой для волнового фронта с “правой” дислокацией и, наоборот, для “левых” дислокаций интерференционная спираль – левовинтовая:

$$\begin{aligned} I_{\text{light}} &\approx |\mathbf{E}(z, r, \phi, t)|^2 = \\ &\approx |\mathbf{E}_p(z, r, \phi, t) + \mathbf{E}_s(z, r, \phi, t)|^2 \approx \\ &\approx 2|\mathbf{E}^0_{p,s}|^2 [1 + \cos[(\omega_p - \omega_s)t - (k_p + k_s)z + 2\ell\phi]] \times \\ &\times r^{2\ell} \exp\left[-\frac{2r^2}{D^2(1 + z^2/k_p^2 D^4)}\right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Из выражения (3) видно, что пространственный профиль спирали дается автомодельной переменной $(\omega_p - \omega_s)t - (k_p + k_s)z + 2\ell\phi$, где первые два слагаемых описывают обычную бегущую брэгговскую

решетку, отражение от которой обеспечивает доплеровский сдвиг частоты $(\omega_p - \omega_s) = 2\omega_p v_{ac}/c$ [1, 2], где v_{ac} – скорость звука. За возникновение спирали ответственно третье слагаемое, $2\ell\phi$, которое появляется вследствие именно фазового сопряжения. Знак квантового числа ℓ (топологического заряда) определяет направление закручивания спирали: для положительных ℓ спираль правая, для отрицательных – левая. Более того, из-за различия частот волн накачки и обращенной волны спиральная интерференционная картина нестационарна и вращается вокруг фазовой дислокации с частотой, равной разности частот падающей и обращенной волн, то есть с частотой гиперзвука $\Omega_{ac} = (\omega_p - \omega_s)$. При обращении волнового фронта с генерацией из спонтанных шумов (с понижением частоты) интерференционная картина вращается по часовой стрелке вокруг каждой вихревой линии и, наоборот, при отражении с антистоксовым сдвигом частоты, например, в геометрии четырехволнового ВРМБ зеркала, интерференционная картина вращается против часовой стрелки. Выражение для комплексной амплитуды скалярного поля гиперзвука Q_{ac} в стационарном режиме ВРМБ дается известным выражением [1, 8]

$$\begin{aligned} Q_{ac} &\approx \mathbf{E}_p \mathbf{E}_s^* \approx \\ &\approx \exp[+i[(\omega_p - \omega_s)t - (k_p + k_s)z + 2\ell\phi]] \times \\ &\times r^{2\ell} \exp\left[-\frac{2r^2}{D^2(1 + z^2/k_p^2 D^4)}\right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Используя это выражение, легко получить распределения амплитуды и фазы гиперзвука в любой плоскости z (рис.1), если известны распределения волны накачки \mathbf{E}_p и стоксовой волны \mathbf{E}_s . В случае идеального фазового сопряжения стоксова волна совпадает с фазово-сопряженной волной накачки \mathbf{E}_p^* . Поэтому в данном случае для построения распределений амплитуды и фазы звукового поля Q_{ac} достаточно получить распределение поля накачки и возвести его в квадрат, согласно формуле (4). Из работы [11] известно, что в спекл-неоднородном оптическом поле количество правовинтовых и левовинтовых дислокаций волнового фронта с высокой точностью одинаково. Это соответствует современным представлениям о турбулентности как о хаотическом наборе пар “вихрь-антивихрь” (рис.1), соединяемых доменными стенками. В соответствии с теорией винтовых дислокаций электромагнитного поля [6] вихревые линии турбулентного оптического поля не являются прямолинейными, как это имеет место, например, в оптическом резонаторе при генерации периодических в пространстве вихревых решеток с чередующимися циркуляциями скоростей [7, 12–14]. При численном моделировании оказывается, что вихревые линии спекл-неоднородного излучения образуют набор переплетающихся “змееподобных” траекторий (или спеклон) [1], причем при смещении плоскости наблюдения интерференционной картины вдоль по оси z на расстояния, превышающие рэлеевскую (френелевскую) длину $L_R \approx k_p D^2$, происходит непрерывное рождение и аннигиляция пар “вихрь-антивихрь”. Вместе с тем, в приближении заданного поля накачки возможно аналитическое решение задачи Коши для параболического волнового уравнения, описывающего распространение волны накачки \mathbf{E}_p вдоль оси z с начальным условием при $z = 0$ в виде многомодового случайного процесса (спекл-неоднородного поля) [15]:

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{r}, z = 0) \approx \mathbf{E}_p^0 \sum_{0 < j_x, j_y < N_G} A_{j_x, j_y} \times \exp \left[i2\pi \left\{ \frac{x \cdot j_x}{p_x} + \frac{y \cdot j_y}{p_y} + i\theta_{j_x, j_y} \right\} \right], \quad (5)$$

где θ_{j_x, j_y} – случайные числа из интервала $[0, \pi]$, A_{j_x, j_y} – действительные амплитуды, p_x, p_y – максимальный поперечный размер (в плоскости x, y), $\mathbf{r} = (x, y) = (r, \phi)$, j_x, j_y – целые числа, перенумеровывающие плоские волны со случайными фазами. В этом случае распределение амплитуды и фазы \mathbf{E}_p при любом z имеет вид [12]

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{r}, z > 0) \approx \mathbf{E}_p^0 \exp(ikz) \sum_{0 < j_x, j_y < N_G} A_{j_x, j_y} \times \exp \left[i2\pi \left\{ \frac{x \cdot j_x}{p_x} + \frac{y \cdot j_y}{p_y} + \frac{\pi z}{k_p} \left(\frac{j_x^2}{p_x^2} + \frac{j_y^2}{p_y^2} \right) \right\} \right] \times \exp[i\theta_{j_x, j_y}]. \quad (6)$$

Особые (сингулярные) точки в плоскости (x, y) , соответствующие нулям амплитуды, являются одновременно и центрами винтовых дислокаций фазы [1, 6], как это изображено на (рис.1а), полученном по формуле (6) с числом пространственных гармоник $N_G = 32$. Положение сингулярных точек медленно меняется при смещении вдоль оси z , как это видно на рис.2: каждая вихревая линия, описывающая фазовую дислокацию, медленно изгибается. При этом, как правило, поблизости от каждой дислокации расположена дислокация с противоположным топологическим зарядом [11]. В контексте данной работы [8] это означает, что суммарный момент импульса пары вихрь-антивихрь близок к нулю [7]. Интерференция же со встречной волной дает набор случайно расположенных спиральных интерференционных картин (рис.3) аналогично тому, как это имеет место для одиночного оптического вихря, интерферирующего со встречным фазово-сопряженным вихрем [8] или в пылевой плазме [16].

В соответствии с формулой (4), гиперзвуковое поле в объеме ВРМБ зеркала, образованное интерференцией встречных волн [1], имеет пространственную структуру, коррелированную с распределением интенсивности излучения, то есть представляет собой набор хаотически расположенных в пространстве пар спиралей со взаимно противоположной закруткой (рис.3). При этом оказывается, что, несмотря на вращение пар, поле скоростей в звуковой волне оказывается непрерывным, и это происходит именно вследствие соседства вихревых пар с противоположными циркуляциями [7].

Из вышеизложенного очевидно, что акустическое спекл-поле, сформированное фазовыми сингулярностями, также является носителем момента импульса, хотя акустические волны считаются продольными и поляризация для них должна была бы отсутствовать. Действительно, в данном случае “спиновая компонента” момента импульса акустического поля (4) практически равна нулю, однако орбитальный момент количества движения является весьма заметной величиной. Вследствие закона сохранения момента импульса $L_z = \pm \ell \hbar$, переносимого фотоном волны накачки, мандельштам-бриллюэновское рас-

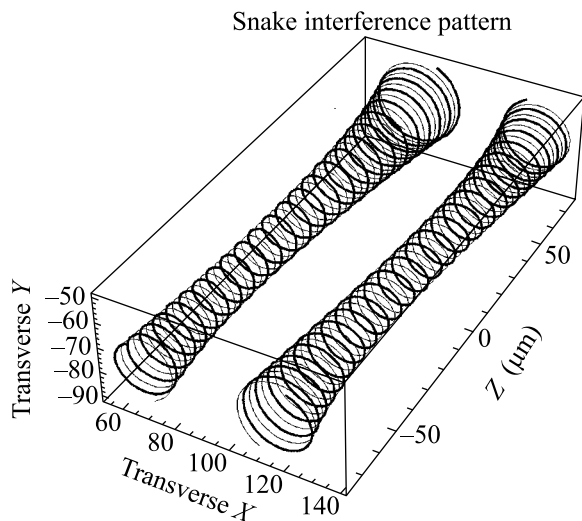


Рис.2. Пара вихрь-антивихрь оптического спекл-неоднородного поля. Интерференция встречных фазовосопряженных волн с фазовыми сингулярностями образует пару соседствующих двойных спиралей с противоположными циркуляциями. Каждая из двойных спиралей состоит из двух вложенных спиралей, сдвинутых вдоль оси z на расстояние, равное половине длины волны $\lambda_{p,s} \approx 1$ мкм. Характерный размер в поперечном сечении $\langle D \rangle \approx 20 \div 50$ мкм. Характерный средний размер в продольном направлении до аннигиляции пары $k_{p,s} \langle D \rangle^2 \approx 400 \div 2500$ мкм. Обе двойные спирали вращаются в одном направлении со звуковой частотой $\Omega_{ac} = (\omega_p - \omega_s)$. Вращение оптических спиралей синхронизовано во времени и с высокой точностью коррелировано в пространстве с гиперзвуковыми спиральями. Направление вращения меняется на противоположное при смене знака Ω_{ac} . Витки спирали с правой закруткой движутся в положительном направлении оси z , в то время как витки “левой” спирали движутся в противоположном направлении. В результате “правая” и “левая” спирали перемещают изменения плотности во взаимно противоположных направлениях подобно “архимедовым” винтам

сеяние на акустическом фоне должно сопровождаться передачей фону удвоенного орбитального момента величиной $L_{ac} = 2\ell\hbar$, в результате чего соответствующий отраженный фазово-сопряженный стоксов фотон приобретает перевернутый орбитальный момент, $L_z = \mp\ell\hbar$ [8]. Это обстоятельство отражено в уравнении (4), где аргумент фазового множителя $\exp[i2\ell\phi]$ (топологический заряд) удвоен по сравнению с фазовым аргументом у оптической волновой функции.

Наличие у акустических фононов орбитального момента имеет предельно ясную физическую интерпретацию: орбитальный момент переносится цирку-

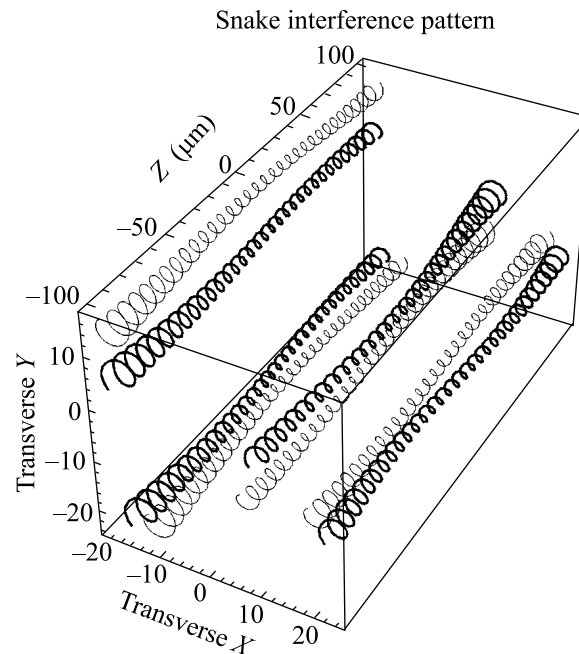


Рис.3. Случайно расположенный набор пар вихрь-антивихрь оптического спекл-неоднородного поля в объеме ВРМБ зеркала. Интерференция встречных фазовосопряженных волн с фазовыми сингулярностями образует случайно расположенный набор пар соседствующих двойных спиралей с противоположными циркуляциями. На данном рисунке правовинтовые двойные спирали обозначены жирными линиями, а левовинтовые – тонкими. Характерные размеры те же, что и на рис.2, однако поперечный размер и направление вихревых линий плавно меняются при смещении вдоль оси z . Каждый элемент набора (правая или левая двойная спираль) вращается синхронно в одном направлении со звуковой частотой. Вращение оптических спиралей синхронизовано во времени и с высокой точностью коррелировано в пространстве с гиперзвуковыми спиральями

лярным движением среды вокруг фазовой сингулярности. Существование акустического орбитального момента импульса было доказано недавно экспериментально для ультразвуковых волн мегагерцового диапазона, возбуждаемых матрицей пьезоизлучателей, причем вихревые структуры в поле акустических скоростей были зафиксированы прямым детектированием при помощи перемещаемого в поперечной плоскости гидрофона [17]. При данном способе измерения, в отличие от случая оптических вихрей [11], наложение дополнительной опорной волны не требуется. Теоретически генерация спиральных (сингулярных) звуковых волн исследовалась теми же авторами в рамках уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова [18]:

$$\frac{\partial^2 Q_{ac}(z, r, \phi, \tau)}{\partial z \partial \tau} = \Delta_{\perp} Q_{ac} + C_s(z, r, \phi) \frac{\partial^2 Q_{ac}}{\partial \tau^2} + \mu \frac{\partial^2 Q_{ac}^2}{\partial \tau^2}, \quad (7)$$

где $C_s(z, r, \phi)$ – зависящая от продольной координаты скорость звука, μ – отношение рэлеевской (френелевской) длины $k_{p,s} D^2/2$ к характерной длине формирования ударной волны. При этом была продемонстрирована высокая степень корреляции результатов численного моделирования с экспериментально измеренными акустическими полями [19]: было доказано как существование единичных акустических вихрей, так и взаимодействие пар вихрей, причем сингулярности с одноименными топологическими зарядами отталкивались, а для акустических сингулярностей с противоположными циркуляциями наблюдалась их аннигиляция [20].

Наличие спиральных структур излучения и гиперзвука (а значит, и показателя преломления) с шагом, равным половине оптической длины волны $\lambda_{p,s}$, вносит существенные коррективы в теорию, основанную на приближении медленно меняющихся амплитуд [1]. Действительно, волновое уравнение в изначально однородном и изотропном диэлектрике с учетом электрострикции имеет следующий вид [1]:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(z, r, \phi, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \Delta_{\perp} \mathbf{E} = \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \quad (8)$$

где \mathbf{P} – вектор электрической поляризации (дипольный момент единицы объема), ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_s$ – полное электрическое поле в среде (бигармоническое на частотах ω_p и ω_s). Уравнение для колебаний давления $p(z, r, \phi, t) \approx Q_{ac}$ в звуковой волне, возбуждаемой стрикционной силой

$$f_{es} = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \nabla |\mathbf{E}|^2, \quad (9)$$

где ϵ – диэлектрическая проницаемость среды, ρ_0 – плотность среды в отсутствие поля, записывается следующим образом:

$$\Delta p + \frac{2\Lambda}{v_{ac}^2} \Delta \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{v_{ac}^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\rho_0}{v_{ac}^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \Delta \frac{|\mathbf{E}|^2}{4\epsilon_0}, \quad (10)$$

где $v_{ac} = (\partial p / \partial \rho)_S$ – скорость звука, $(\partial p / \partial \rho)_S$ – адиабатическая сжимаемость среды, Λ – затухание звука. Уже из исходных, непараксиальных уравнений движения (8), (10) видно, что правая часть, содержащая интерференционную вынуждающую силу $|\mathbf{E}|^2$, представляет собой набор хаотически расположенных в пространстве пар “архимедовых винтов”

(рис.3), приводящих нелинейную среду во вращение вокруг фазовых сингулярностей и обеспечивающих передачу орбитального момента от излучения к веществу. При этом каждая пара вихрь – антивихрь перемещает вещество во взаимно противоположных направлениях еще и вдоль оси z (см. рис.2).

В заключение хотелось бы отметить следующее обстоятельство. Известно, что мандельштам-бриллюэновская нелинейность является скалярной, поскольку акустическое давление при электрострикционном механизме раскачки звука модулируется интенсивностью излучения (10). Поэтому состояние поляризации стоксова излучения \mathbf{E}_s стремится воспроизвести состояние поляризации волны накачки \mathbf{E}_p . В результате большим инкрементом усиления обладает конфигурация поля, воспроизводящая состояние поляризации [1], и “обращение состояния поляризации” светового поля достигается за счет дополнительных интерференметрических схем [21]. Однако, как показано выше, интерференционные спиральные структуры, модулирующие показатель преломления, превращают изначально изотропный диэлектрик в анизотропный [8]. По существу, анизотропия среды, а значит, отсутствие симметрии по отношению к вращениям, должна приводить к эффектам наведенного двулучепреломления, то есть к изменению состояния поляризации отраженной волны \mathbf{E}_s по сравнению с поляризацией возбуждающей волны \mathbf{E}_p даже при идеальном фазовом сопряжении. Взаимосвязь поляризации излучения и его пространственной структуры давно обсуждается в связи с эффектами спин-орбитального взаимодействия фотона [22]. Недавно эффект наведенного двулучепреломления был рассмотрен и для среды, состоящей из ультрахолодных атомов, через которую распространяется излучение, переносящее орбитальный момент импульса, например лазерный пучок Гаусса-Лагерра (LG) [23].

Автор признателен участникам семинаров под руководством П.П. Пашинина и А.А. Рухадзе за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант # 08-02-01229-а.

1. Б. Я. Зельдович, Н. Ф. Пилипецкий, В. В. Шкунов, *Обращение волнового фронта*, М.: Наука, 1985.
2. В. В. Рагульский, *Обращение волнового фронта*, М.: Наука, 1990.
3. Б. Я. Зельдович, В. И. Поповичев, В. В. Рагульский, Ф. С. Файзуллоев, *Письма в ЖЭТФ* **15**, 160 (1972).
4. Н. Г. Басов, И. Г. Зубарев, А. Б. Миронов и др., *ЖЭТФ* **79**, 1678 (1980).

5. F. A. Starikov, Yu. V. Dolgoplov, A. V. Korpalkin et al., *J. Phys. IV France* **133**, 683 (2006).
6. J. F. Nye and M. V. Berry, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **336**, 165 (1974).
7. A. Yu. Okulov, *J. Mod. Opt.* **55**, 241 (2008).
8. A. Yu. Okulov, *J. Phys. B* **41**, 101001 (2008).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, М.: Наука, 1980.
10. J. Leach, M. J. Padgett, S. M. Barnett et al., *Phys. Rev. Lett.* **88**, 257901 (2002).
11. Н. Б. Баранова, Б. Я. Зельдович, А. В. Мамаев и др., *ЖЭТФ* **83**, 1702 (1982).
12. A. Yu. Okulov, *JOSA B* **7**, 1045 (1990).
13. K. Staliunas and C. O. Weiss, *JOSA B* **12**, 1142 (1995).
14. Y. F. Chen and Y. P. Lan, *Phys. Rev. A* **64**, 063807 (2001).
15. С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чиркин, *Введение в статистическую радиофизику и оптику*, М.: Наука, 1981.
16. В. Н. Цытович, *УФН* **177**, 427 (2007).
17. J-L. Thomas and R. Marchiano, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 244302 (2003).
18. Е. А. Заболотская, Р. В. Хохлов, *Акустический журнал* **15**, 40 (1969).
19. R. Marchiano, F. Coulouvrat, L. Ganjehi, and J-L. Thomas, *Phys. Rev. E* **77**, 016605 (2008).
20. R. Marchiano and J-L. Thomas, *Phys. Rev. E* **71**, 066616 (2005).
21. Н. Г. Басов, В. Ф. Ефимков, И. Г. Зубарев и др., *Письма в ЖЭТФ* **28**, 215 (1978).
22. V. S. Liberman and B. Ya. Zeldovich, *Phys. Rev. A* **46**, 5199 (1992).
23. J. Ruseckas, G. Juzelinas, P. Ohberg, and S. M. Barnett, *Phys. Rev. A* **76**, 053822 (2007).