

Влияние тепловых флуктуаций на автоколебания спинов в микроволновом наногенераторе

А. Ф. Попков¹⁾, М. Ю. Чиненков

Научно-исследовательский институт физических проблем им. Ф.В. Лукина, 124460 Москва, Россия

Московский государственный институт электронной техники, 124498 Москва, Россия

Поступила в редакцию 2 июля 2008 г.

После переработки 9 сентября 2008 г.

Получены редуцированные уравнения медленной эволюции фазы и огибающей амплитуды автоколебаний спинов, возникающих в незакрепленном магнитном слое наноразмерного генератора микроволновых колебаний при протекании через него спин-поляризованного тока выше порогового значения. На основании полученных уравнений рассчитана спектральная интенсивность сигнала основной гармоники спинового автогенератора с учетом тепловых шумов в спиновой подсистеме. Показано, что токовая зависимость ширины линии определяется характером бифуркационного изменения состояния спинов вблизи порога автоколебаний. Из-за неизохронности автоколебаний возникает асимметрия формы спектральной линии, характер которой может меняться при приближении к точке рождения цикла.

PACS: 72.25.Ba, 72.70.+m, 73.63.Rt, 75.30.Ds, 76.50.+g, 84.30.Ng

Возникновение спиновых колебаний в наноразмерных спин-вентильных структурах под действием тока привлекает интерес исследователей как с точки зрения проявления мезоскопических явлений в спиновых системах [1–11], так и с точки зрения создания микроволновых наноразмерных генераторов, работающих на новом принципе [12–14]. Весьма актуальным здесь, особенно с практической точки зрения, представляется обсуждение ширины линии и добротности генерируемых автоколебаний. Ряд вопросов, связанных с флуктуационным механизмом уширения линии в спиновом автогенераторе из-за тепловых возбуждений в спиновой подсистеме, обсуждался в работах [13–16]. В этих работах, в частности, отмечалось значительное уширение линии из-за нелинейной зависимости собственной частоты от амплитуды колебаний спинов, предсказан переход от симметричной лоренцевой формы линии к асимметричной при увеличении тока выше порога автоколебаний. Проведенный анализ касался случая мягкого рождения автоколебаний, которые рассматривались в слабоамплитудном приближении. Бифуркационный анализ макроспиновой динамики спинов в незакрепленном магнитном слое наноструктуры с учетом токовой передачи вращательного момента, проведенный в работах [17–20], показывает, что в общем случае наблюдаются более сложные сценарии рождения автоколебаний, связанные, в частности, с жестким рождением цикла. Поэтому представляет интерес ис-

следование спектра автоколебаний спинов при наличии теплового шума с учетом особенностей ее бифуркационного поведения вблизи критических значений спин-поляризованного тока как при мягком, так и при жестком сценариях рождения прецессионных циклов, и рассмотрение соответствующего изменения ширины и формы спектральной линии.

Рассмотрим спиновый автогенератор, представляющий собой наностолбчатую слоистую структуру, один из магнитных слоев которой магнитно закреплен и служит в качестве спинового поляризатора для протекающего тока, а второй магнитный слой свободен и отделен от закрепленного немагнитной проводящей прослойкой. Будем рассматривать случай, когда внешнее магнитное поле \mathbf{h} параллельно плоскости свободного слоя ($z = 0$) и направлено вдоль оси анизотропии $\mathbf{n} \parallel \mathbf{e}_x$. Для описания автоколебаний спинов будем исходить из уравнений Ландау-Лифшица, модифицированных Слончевским для описания явления спин-транспортной передачи вращательного момента [1, 2]. В нормированных переменных эти уравнения можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{m}} = -\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}} - \alpha \mathbf{m} \times [\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}}], \quad (1)$$

где $\mathbf{h}_{\text{eff}} = \mathbf{h} + \beta \mathbf{n}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) - 4\pi m_z \mathbf{e}_z - J_s g \mathbf{m} \times \mathbf{s} + \mathbf{h}_f$ – эффективное магнитное поле в макроспиновом приближении, $J_s = j_s \hbar / 2edM^2$ – нормированный ток j_s , e – заряд электрона, d – толщина слоя, M – намагниченность, \hbar – постоянная Планка, g – параметр спиновой поляризации, \mathbf{s} – вектор спиновой поляризации, β – параметр поля анизотропии, α – параметр магнитной

¹⁾e-mail: afpopkov@inbox.ru

релаксации, \mathbf{h}_f – флуктуационное поле, ответственное за тепловой шум в спиновой подсистеме. Все поля нормированы на намагниченность M , время – на $\omega_M = \gamma M$, γ – магнитомеханическое отношение.

Введем новые переменные, используя структуру основной моды колебаний намагниченности в линейном приближении:

$$m_y = \rho \cos \varphi, m_z = a_1 \rho \sin \varphi, \quad (2)$$

где $a_1 = \sqrt{(h_x + \beta)/(h_x + \beta + 4\pi)}$, $\varphi = \omega_0 t + \vartheta$ – фаза колебаний, ρ – амплитуда колебаний, $\omega_0 = \sqrt{(h_x + \beta)(h_x + \beta + 4\pi)}$ – собственная частота линейной моды. Тогда после дифференцирования и преобразований с учетом уравнений (1) после усреднения по периоду первой гармоники $T_0 = 2\pi/\omega_0$ получим редуцированные уравнения для медленного изменения амплитуды и фазы первой гармоники колебаний

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\rho F(\rho) + \langle h_{zf} \cos \varphi - h_{yf} \sin \varphi \rangle, \\ \dot{\vartheta} &= \Delta\omega(\rho) + \frac{1}{\rho} \langle h_{zf} \sin \varphi - a_1 h_{yf} \cos \varphi \rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} F(\rho) &= \langle (h_x + \beta m_x) m_x + 2\pi(1 - 2m_z^2) \rangle \alpha - J_s g(m_x), \\ \Delta\omega(\rho) &= \\ &= \omega_0 \left\langle \left(\frac{h_x + \beta m_x}{h_x + \beta} + \frac{h_x + \beta m_x + 4\pi m_x}{h_x + \beta + 4\pi} \right) \cos^2 \varphi - 1 \right\rangle. \end{aligned}$$

В пренебрежении флуктуациями первое уравнение в (3) определяет равновесную амплитуду ρ_0 и параметр устойчивости – “прочность” цикла $p = \rho_0 dF/d\rho|_{\rho=\rho_0}$. Второе уравнение описывает эволюцию фазы и определяет нелинейный равновесный сдвиг частоты колебаний $\Delta\omega(\rho)$ при $\rho = \rho_0$. Нелинейный член этого уравнения $\Delta\omega(\rho)$ показывает степень неизохронности автоколебаний, которая связывает флуктуации фазы колебаний с флуктуациями амплитуды. Параметр неизохронности определяется как $q(\rho_0) = \rho_0 d\Delta\omega/d\rho|_{\rho=\rho_0}$. В дальнейшем можно включить нелинейную часть сдвига частоты в основную гармонику и определить фазу $\varphi = \omega_1 t + \vartheta$, где $\omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega(\rho_0)$ – резонансная частота колебаний в первом нелинейном приближении. В слабоамплитудном пределе $\rho \ll 1$, когда учитываются только квадратичные члены разложения, полученные уравнения сокращенного описания колебаний переходят в уравнения аналогичного типа, использованные для шумового анализа в [14–16].

Из первого уравнения системы (3) следует, что равновесная амплитуда определяется условием

$$J_s = \frac{\alpha \langle (h_x + \beta m_x) m_x + 2\pi(1 - 2m_z^2) \rangle}{g(m_x)}. \quad (4)$$

Учитывая, что $\langle m_y^2 + m_z^2 \rangle = 1 - \langle m_x^2 \rangle$, $\langle m_y^2 \rangle = a_1^{-1} \langle m_z^2 \rangle$ можно положить $\langle m_z^2 \rangle = (1 - \langle m_x^2 \rangle) / (1 + a_1^{-1})$. При этом $\langle m_x \rangle = (2/\pi)(1 - \rho^2 a_1) E(\pi/2, k^2)$, $\langle m_x^2 \rangle = 1 - (1 + a_1) \rho^2 / 2$, $k^2 = \rho^2 / ((a_2/a_1)^2 - \rho^2)$, $a_2 = \sqrt{(h_x + \beta)/(h_x + \beta + 2\pi)}$, $E(\varphi, k^2)$ – полный эллиптический интеграл первого рода. Полученные уравнения справедливы при не слишком большой амплитуде колебаний, когда $\rho^2 < a_2^2 / 2a_1^2$. Отсюда следует, что с точностью до малых членов второго порядка можно положить $\langle m_x \rangle \approx (\langle m_x^2 \rangle)^{1/2}$. Рассчитывая только на качественный характер поведения цикла, можно рассмотреть $m_x = f(J_s)$ в (4) во всей области изменения m_x , не обращая внимания на ограничение по малости амплитуды колебаний. Анализ этого поведения дает возможность определить критическое значение h_x , при котором мягкое рождение устойчивого цикла переходит в жесткое и найти равновесное значение m_x в зависимости от тока вплоть до нулевого значения. Анализ уравнений (3) показывает, что вблизи критического значения тока $J_s^0 = \alpha(h_x + \beta + 4\pi)/g$ в зависимости от значений магнитных параметров в (4), в частности внешнего магнитного поля h_x , возможны два бифуркационных сценария рождения прецессии. В области малых значений поля, когда $h_x < h_x^0 \approx \pi - 3\beta/2$, реализуется сценарий “мягкого” рождения устойчивого цикла, при котором $\rho \sim (J_s - J_s^0)^{1/2}$ – бифуркация Андронова-Хопфа [21]. При этом в точке рождения цикла $J_s = J_s^0$ параметры прочности и неизохронности цикла падают до нуля. При $h_x > h_x^0$ имеется критическое значение тока $J_s = J_s^1 < J_s^0$, при котором в динамической системе (1) реализуется бифуркация “жесткого” рождения из полуустойчивого цикла с конечной амплитудой, когда $\langle m_x \rangle \neq 1$ (см. рис.1). В точке

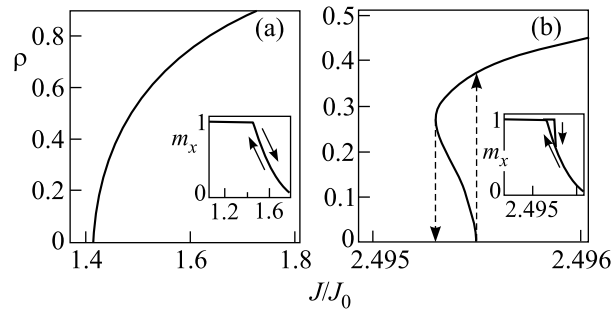


Рис.1. Токвые зависимости радиуса прецессионного цикла $\rho_0(J_s)$, рассчитанные на основании решения уравнения (4) при $\alpha = 0.02$, $\beta = 0.2$ для сценариев (a) – “мягкого” ($h_x = 0.6$) и (b) – “жесткого” рождения ($h_x = 6$) цикла. На врезке – гистерезис намагниченности в окрестности соответствующей бифуркации

образования полустойчивого цикла, когда $J_s = J_s^1$, параметр “прочности” циклических колебаний обращается в нуль, то есть $p(\rho_0) = 0$, а параметр неизохронности остается конечным, $q(\rho_0) > 0$. В области токов $J_s^1 < J_s < J_s^0$ неустойчивый и устойчивый циклы прецессии разделяются. При этом состояние прецессии $\langle m_x \rangle \neq 1$ сосуществует наряду со стационарным равновесным состоянием $m_x = 1$, то есть возникает гистерезис усредненной намагниченности $\langle m_x \rangle$. Гистерезис стационарных состояний будет приводить к скачкообразным изменениям частоты и ширины автоколебаний. Прямое численное моделирование спиновой динамики на основе исходных уравнений (1) показывает, что уравнения сокращенного описания дают завышенное значение критического поля, выше которого происходит смена сценариев рождения прецессионного цикла с мягкого на жесткое. В связи с этим для более адекватного определения параметра “прочности” цикла представляется целесообразным использование результатов прямого численного моделирования для расчета функции $F(\rho)$ на основе обобщающего соотношения $dF/d\rho_0 = \langle m_x \rangle (dJ_s/d\rho_0)$, которое следует из зависимости $J_s(\rho_0)$, определенной в (4). В области больших значений токов, когда из одного цикла большой амплитуды рождаются два устойчивых цикла (см. например, [5, 18–20]), характеризующиеся сильным выходом намагниченности из плоскости слоя, используемое приближение перестает работать и для описания новой бифуркации требуется другое приближение. В последнем случае термофлуктуации могут оказывать существенное влияние на области существования модовых возбуждений из-за явлений межмодового переброса, на что указывалось, например, в [22].

Рассмотрим теперь влияние термоактивационных спин-волновых возбуждений на малоамплитудные спиновые автоколебания. Введем относительную величину отклонений амплитуды колебаний $\bar{\rho} = (\rho - \rho_0)/\rho_0$. В результате линеаризации нелинейных уравнений (3) вблизи циклической траектории получим систему флуктуационных уравнений Ланжевена:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\rho}} &= -p(\rho_0)\bar{\rho} + \frac{1}{\rho_0}(e_{\perp} \cos \vartheta - e_{\parallel} \sin \vartheta) \\ \dot{\vartheta} &= -q(\rho_0)\bar{\rho} - \frac{1}{\rho_0}(e_{\parallel} \cos \vartheta + e_{\perp} \sin \vartheta), \end{aligned} \quad (5)$$

в которых

$$\begin{aligned} p &= \frac{\alpha \rho_0^2 a_1^2}{a_2^2 \langle m_x \rangle} (\beta \langle m_x \rangle + 4\pi \langle m_x \rangle a_2^2 - \\ &\quad - \frac{2\pi}{\langle m_x \rangle} (1 - (1 - \langle m_x^2 \rangle) a_2^2)), \end{aligned}$$

$$q = \left(\frac{\beta}{h_x + \beta} + \frac{\beta + 4\pi}{h_x + \beta + 4\pi} \right) (a_1^2/a_2^2) \frac{\omega_0 \rho_0}{2 \langle m_x \rangle},$$

$$e_{\parallel} = \langle h_{zf} \cos \omega_1 t - a_1^{-1} h_{yf} \sin \omega_1 t \rangle,$$

$$e_{\perp} = \langle h_{zf} \sin \omega_1 t + a_1^{-1} h_{yf} \cos \omega_1 t \rangle.$$

Спектральные характеристики источников шума e_{\parallel} и e_{\perp} мы определим для актуальной области частот $\Omega = (\omega - \omega_1)/\omega_1 \ll 1$ вблизи резонансной частоты $\omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega(\rho_0)$, предполагая, что температура не слишком мала $k_B T \gg \hbar\omega_1$, и квантовыми флуктуациями можно пренебречь. В этих предположениях, используя флуктуационно-диссипационную теорему [19] для линеаризованной системы (1) случайные функции h_{zf} и h_{yf} можно рассматривать как источники некоррелированного белого шума. Тогда, согласно теории флуктуаций гармонических колебаний для $\Omega \ll \omega_1$ (см., например, [23, 24]), случайные функции e_{\parallel} и e_{\perp} также представляют собой белый шум и имеют следующие спектральные характеристики:

$$\langle e_{\parallel}(t + \tau) e_{\parallel}(t) \rangle_{\Omega} = \langle e_{\perp}(t + \tau) e_{\perp}(t) \rangle_{\Omega} = S_0 / \pi a_2^2 \quad (6)$$

$$\langle e_{\parallel}(t + \tau) e_{\perp}(t) \rangle_{\Omega} = 0, \quad (7)$$

где $S_0 = 2\alpha k_B T / M^2 V$, V – объем магнитной области спинтронного наногенератора с незакрепленной намагниченностью. Для шума с подобными характеристиками система флуктуационных уравнений (5) с произвольной величиной флуктуаций фазы ϑ статистически эквивалентна упрощенной системе, описывающей автоколебания с малой величиной дрейфа фазы. В этом случае мы имеем линейную систему флуктуационных уравнений для амплитуды и фазы автоколебаний с независимыми δ -коррелированными источниками шума e_{\parallel} и e_{\perp} на входе. Вероятность распределения амплитуды подобного шума дается нормальным законом распределения, что позволяет рассчитать корреляционные и спектральные характеристики амплитудных, ρ , и фазовых, ϑ , флуктуаций колеблющихся компонент намагниченности $\mathbf{m}(t)$ в незакрепленном слое. Зная эти характеристики, можно теперь рассчитать корреляционные и спектральные характеристики сигнала автоколебаний спинтронного генератора.

Магнитосопротивление спин-вентильной наностолбчатой структуры определяется изменением взаимной ориентации намагниченностей в закрепленном и магнитно свободном слоях, которая в

данном случае задается компонентой $m_x(t)$, то есть $R(t) = R_0 - \Delta R m_x(t)$, где ΔR – амплитуда переменного сопротивления спинового наногенератора. В режиме с заданным протеканием тока I по структуре сигнал автоколебаний дается переменным напряжением, которое пропорционально величине $u \sim \Delta R I (m_x - \langle m_x \rangle)$. В приближении малой амплитуды колебаний легко показать, что основная гармоника сигнала спинтронного автогенератора будет даваться выражением

$$u(t) = u_0(1 + 2\bar{\rho}) \cos(2\omega_1 t + 2\vartheta), \quad (8)$$

в котором $u_0 = 4\pi \Delta R I \rho_0^2 / (h_x + \beta + 4\pi)$. Спектральная мощность сигнала наногенератора определяется формулой

$$S_u(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int \langle u(t)u(t+\tau) \rangle \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (9)$$

Используя известные результаты анализа флуктуаций гармонического колебания с малой величиной амплитуды флуктуаций [24] для спектральной мощности (9) сигнала (8), можно получить аналитическое выражение в случае высокой ”прочности” цикла, когда $D \ll p$. В области частот $\Omega = \omega - \omega_2$ вблизи основной фурье-гармоники $\omega_2 = 2\omega_1$ в этом случае спектральная мощность сигнала описывается формулой

$$S_u(\Omega) = \frac{u_0^2}{\pi} \frac{2D}{p^2 + \Omega^2} (A_1(\Omega) + A_2(\Omega)), \quad (10)$$

где

$$A_1(\Omega) = 1 + \frac{p^2 + q^2 + \Omega^2}{(4D^2(1 + q^2/p^2)^2 + \Omega^2)},$$

$$A_2(\Omega) = 2\Omega \frac{q}{p^2} \frac{4D^2(1 + q^2/p^2)^2 - p^2}{4D^2(1 + q^2/p^2)^2 + \Omega^2},$$

$D = 2\pi S_0 / a_2^2 \rho_0^2$ – диффузионный коэффициент флуктуационного дрейфа фазы.

Из формулы (10) видно, что вследствие неизохронности генератора $q \neq 0$ форма резонансной линии спинтронного наногенератора в общем случае является асимметричной (см. рис.2). Характер асимметрии зависит от соотношения величин параметров D , p и q . При приближении к точке бифуркации, когда параметр ”прочности” цикла p уменьшается, вклад асимметричной части спектральной мощности $A_2(\Omega)$ падает. В случае $D \ll p$ спектр сигнала представляет собой узкую линию на частоте $\omega_2 = 2\omega_1$ шириной $\Delta\Omega_0 = 2\pi D (1 + q^2/p^2)$ и пьедестал с шириной, определяемой параметром ”прочности” цикла $\Delta\Omega_1 \sim 2\pi p$. В рассматриваемом нами

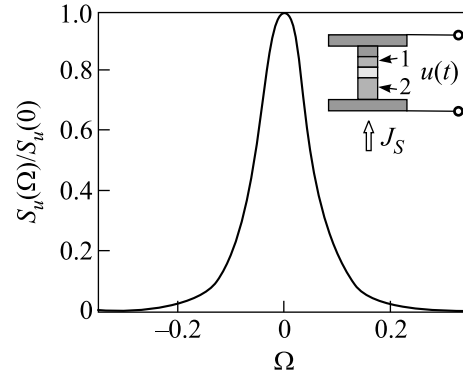


Рис.2. Спектральная интенсивность автоколебаний спинового наногенератора вблизи основной гармоники колебаний магнитосопротивления. Расчетные параметры $p = 0.0935$, $q = 1.611$, $D = 0.0002$, $Q = 635$, $\rho_0 = 0.8$. На врезке – структура наногенератора, цифрами обозначены ферромагнитные слои: 1 – магнитно незакрепленный слой, 2 – закрепленный слой

случае $D (1 + q^2/p^2) \sim p$ релаксационный пьедестал в форме линии не выделяется.

Найденное выражение для ширины линии полностью согласуется с результатами работ [13–16]. Оно показывает ее уширение из-за эффекта неизохронности колебаний. При приближении к пороговому току генерации из-за падения параметра ”прочности” цикла до нуля в точке бифуркации ширина линии резко возрастает. При этом в случае жесткого рождения цикла параметр ”неизохронности” колебаний остается конечным, и поэтому форма линии асимметрична также и при пороговом значении тока. Кроме того, при этом сценарии возникает гистерезис равновесного состояния, который будет сопровождаться гистерезисом ширины линии по току. Заметим здесь, что квадрат амплитуды определяет мощность автоколебаний, но мощность снимаемого сигнала с магнитосопротивления, согласно (8), пропорциональна четвертой степени амплитуды цикла. В связи с этим ширина линии автогенератора обратно пропорциональна мощности спиновых колебаний и корню из мощности снимаемого сигнала. Добротность автоколебаний дается формулой $Q = \omega_2 / \Delta\Omega_0$. При приближении к точке рождения цикла добротность автоколебаний падает. Проведем оценку добротности автоколебаний, используя полученные формулы, когда амплитуда цикла составляет $\rho_0 \sim 0.4$. Для оценок возьмем параметры, типичные для проводимых экспериментов, $\alpha = 0.02$, $h_x = 0.6$, $\beta = 0.2$, $M = 1000$ Гс, $T = 300$ К, $V = 5 \times 100 \times 150$ нм. В этом случае $q = 1.611$, $p = 0.0935$, $D = 0.0002$ и добротность колебаний составляет $Q = 635$. Величина доб-

ротности пропорциональна объему незакрепленного магнитного слоя наностолбика. Рост толщины слоя увеличивает пороговое значение тока генерации, что нежелательно для практических приложений. Увеличение магнитного объема наногенератора за счет поперечных размеров приводит к нарушению мономодности и возникновению многомодности и пространственной неоднородности колебаний²⁾. Возникновение пространственной неоднородности и многомодности влечет за собой падение синхронности и добротности колебаний и появление других нелинейных явлений, таких, как конкуренция мод, биения колебаний и динамическая стохастизация. Важное значение здесь для увеличения добротности автоколебаний могут иметь методы нелинейной и внешней их синхронизации [26, 27].

Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований # 07-02-91589.

1. J. C. Slonczewski, J. Magn. Magn. Mater. **159**, L1 (1996).
2. J. C. Slonczewski, J. Magn. Magn. Mater. **195**, L261 (1999).
3. L. Berger, Phys. Rev. B **54**, 9353 (1996).
4. C. Heide, P. E. Zilberman, and R. J. Elliott, Phys. Rev. B **63**, 0644424 (2001).
5. S. I. Kiselev, J. C. Sankey, I. N. Krivorotov et al., Nature **425**, 380 (2003).
6. A. Fert, V. Cross, J. M. George et al., JMMM **272-276**, 1706 (2004).
7. Y. Tserkovnyak, A. Brataas, and G. E. W. Bauer, Phys. Rev. B **66**, 224403 (2002).
8. M. D. Stiles, J. Xiao, and A. Zangwill, Phys. Rev. B **69**, 054408 (2004).
9. А. К. Звездин, К. А. Звездин, ЖЭТФ **122**, 879 (2002).

10. Ю. В. Гуляев, П. Е. Зильберман, Э. М. Эпштейн, Письма в ЖЭТФ **84**, 407 (2006).
11. A. N. Slavin and V. S. Tiberkevich, Phys. Rev. B **72**, 094428 (2005).
12. K. J. Lee, O. Redon, and B. Dieny, Appl. Phys. Lett. **86**, 22505 (2005).
13. Joo-Von Kim, V. Tiberkevich, and A. N. Slavin, J. Magnetism **12**, 53 (2007).
14. V. Tiberkevich, A. Slavin, and Joo-Von Kim, Appl. Phys. Lett. **91**, 192506 (2007).
15. Joo-Von Kim, V. Tiberkevich, and A. Slavin, Phys. Rev. Lett. **100**, 017207 (2008).
16. Joo-Von Kim, Q. Mistral, C. Chappert et al., Phys. Rev. Lett. **100**, 167201 (2008).
17. P. P. Horley, V. R. Vieira, P. M. Gorley et al., Phys. Rev. B **77**, 094427 (2008).
18. G. Bertotti, A. Magni, R. Bonin et al., JMMM **290-291**, 522 (2005).
19. V. I. Korneev, N. E. Kulagin, A. F. Popkov et al., Euro-Asian Symposium "Magnetism on a Nanoscale", august 23-26, 2007, Kazan, p. 39.
20. В. И. Корнеев, А. Ф. Попков, М. Ю. Чиненков, ФТТ, в печати (2008).
21. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер, *Качественная теория динамических систем второго порядка*, М.: Наука, 1966.
22. Jiang Xiao and A. Zangwill M. D. Stiles, Phys. Rev. B **72**, 014446 (2005).
23. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, М.: Наука, 1964.
24. А. Н. Малахов, *Флуктуации в автоколебательных системах*, М.: Наука, 1968.
25. D. V. Berkov and J. Miltat, JMMM **320**, 1238 (2008).
26. М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков, *Введение в теорию колебаний и волн*, М.: Наука, 1984.
27. J. Grollier, V. Cros, and A. Fert, Phys. Rev. B **73**, 060409 R (2006).

²⁾ В случае квазистатического перемагничивания однородная мода перемагничивания является преобладающей при размерах образца, сравнимых с обменной длиной $l_{ex} = \sqrt{A/M} \sim 10$ нм. В случае спиновой автогенерации под действием однородного тока макроспиновое приближение удовлетворительно работает в области не слишком больших полей и токов для значительно больших размеров (см. по этому поводу, например, [25]).