

Сверхтонкое расщепление в мюонном водороде: КЭД поправки порядка α^2

С. Г. Каршенбойм¹⁾²⁾, Е. Ю. Корзинин, В. Г. Иванов³⁾

Государственный научный центр “Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии им. Д.И. Менделеева”,
190005 Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 8 октября 2008 г.

Найдены поправки второго порядка по α к сверхтонкому расщеплению состояний $1s$ и $2s$ в мюонном водороде. Рассмотрены как специально нормированная разность $8 \cdot E_{\text{hfs}}(2s) - E_{\text{hfs}}(1s)$, так и общая ситуация с теоретическими вычислениями СТР в мюонном водороде.

PACS: 12.20.Fv, 31.30.Jr, 36.10.Ee

Сверхтонкое расщепление в ряде простых атомных систем чувствительно к структуре ядра, а его расчеты из первых принципов имеют ограниченную точность. Однако им можно воспользоваться и для того, чтобы из сравнения теории и эксперимента определить различные эффективные параметры, описывающие структуру ядра, и использовать их значения в других вычислениях.

Исследование мюонных атомов представляет значительный интерес в связи с определением зарядовых радиусов различных ядер. В частности, в настоящее время предпринимаются усилия по измерению лэмбовского сдвига в мюонном водороде [1]. Ожидается, что в рамках этого эксперимента будет также измерено сверхтонкое расщепление (СТР) метастабильного состояния $2s$. В то же время рассматриваются планы по измерению СТР основного состояния в атоме водорода [2].

Один эксперимент находится на стадии, далекой от завершения, а другой только планируется, и обсуждать их точность преждевременно. Тем не менее, желательно вычислить все поправки, сравнимые с 100 ppm , а также иметь стратегию для использования экспериментальных результатов, если они окажутся точнее этой величины.

В том, что касается первой задачи, мы вычисляем здесь единственную неизвестную электродинамическую поправку, представляющую интерес. Она вносит в СТР приблизительно 59 ppm для $1s$ состояния. Другие неизвестные квантовые электродинамические (КЭД) поправки существенно меньше.

Вместе с тем имеется ряд поправок, связанных со структурой ядра, и погрешность их вычисления может превысить 100 ppm . Для преодоления этой трудности можно воспользоваться решением, предложенным в случае легких водородоподобных атомов [3, 4] и заключающимся в вычисление разности

$$\Delta E_{21} = 8 \times E_{\text{hfs}}(2s) - E_{\text{hfs}}(1s). \quad (1)$$

Ее особенностью является то, что “жесткие” вклады в энергию nl состояний, обычно пропорциональные значению квадрата волновой функции в нуле

$$|\Psi_{nl}(\mathbf{r} = 0)|^2 = \frac{(Z\alpha)^3 m_r^3}{\pi n^3} \delta_{0l}, \quad (2)$$

сокращаются. Здесь Z – заряд ядра, α – постоянная тонкой структуры, m_r – приведенная масса связанной частицы (электрона в обычных атомах и мюона – в мюонных), и мы используем релятивистскую систему единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

В частности, в водородоподобных атомах ведущий нерелятивистский вклад в СТР определяется δ -образным потенциалом и не дает вклада в (1):

$$E_{\text{hfs}}^{(0)}(ns) = \frac{E_F}{n^3}, \quad (3)$$

где

$$E_F = \frac{8}{3} \alpha (Z\alpha)^3 m \frac{m}{m_p} \frac{\mu}{\mu_N} \left(\frac{m_r}{m} \right)^3 = 182\,443 \cdot 10^{-6} \text{ эВ}$$

– так называемая энергия Ферми⁴⁾, μ_N – ядерный магнетон, μ – магнитный момент ядра (для спина предполагается $I = 1/2$), m – масса связанной частицы (электрона или мюона) и m_p – масса протона.

¹⁾ А также: Max-Planck-Institut für Quantenoptik, 85748 Garching, Germany.

²⁾ e-mail: s.g.karshenboim@vniim.ru

³⁾ А также: Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, 196140 Санкт-Петербург, Россия.

⁴⁾ Численные значения приводятся для мюонного водорода.

Погрешность теоретических расчетов связана с эффектами структуры ядра. Ведущие вклады, связанные со структурой ядра, определяются двухфотонными обменами с большим переданным импульсом и имеют “жесткую” структуру, а следовательно, сокращаются при вычислении (1).

Вычислить разность в легких водородоподобных атомах удается из первых принципов с гораздо более высокой абсолютной точностью, чем при расчетах СТР для входящих в нее состояний по отдельности. Результат оказывается чувствителен к КЭД поправкам третьего и четвертого порядков малости (по параметрам α , $Z\alpha$ и отношению масс m/M) [5, 6]. Теоретические расчеты можно критически сравнить с имеющимися результатами измерений для СТР $1s$ и $2s$ уровней в водороде [7, 6], дейтерии [8, 6] и иона гелия-3 [9]. В то же время, упомянутые поправки неактуальны для сравнения с существующими или ожидаемыми экспериментальными данными по СТР $1s$ и $2s$ уровней по отдельности, будучи существенно меньше, чем погрешности учета структуры ядра. Аналогичное вычисление может быть проведено и для мюонного водорода, имея в виду ожидаемые экспериментальные результаты [2] и [1] (см. также [10]). Вычисление [10], проведенное несколько лет назад, ограничилось поправками первого порядка по α , и основная теоретическая погрешность была связана с двухпетлевыми поляризационными вкладами. В данной работе мы вычисляем эти вклады для $1s$ и $2s$ состояний, а также исследуем старшие поправки, учитывающие структуру ядра. В заключение мы обсуждаем точность вычисления разности (1) в мюонном водороде и перспективы сравнения теории и эксперимента.

Значительная часть уже известных поправок выводилась для обычных, а не мюонных, атомов [3, 4], и мы здесь кратко их обсудим применительно к мюонному водороду. Ведущие КЭД вклады в СТР определяются следующим выражением:

$$E_{\text{hfs}}^{\text{eQED}}(ns) = E_{\text{hfs}}^{(0)}(ns) \times \left[1 + Q_{\text{QED}}^e(ns) \right], \quad (4)$$

где (см., например, [11])

$$\begin{aligned} Q_{\text{QED}}^e(1s) = & a + \left\{ \frac{3}{2}(Z\alpha)^2 + \alpha(Z\alpha) \left(\ln 2 - \frac{5}{2} \right) + \right. \\ & + \frac{\alpha(Z\alpha)^2}{\pi} \left[-\frac{2}{3} \ln \frac{1}{(Z\alpha)^2} \left(\ln \frac{1}{(Z\alpha)^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 4 \ln 2 - \frac{281}{240} \right) + 16.903772... \right] + \\ & \left. + 0.7718(4) \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

и a – аномальный момент связанный частицы (электрона в водороде или мюона в мюонном водороде). Выражение содержит электродинамические поправки, одинаковые для мюонных и обычных атомов, и не включает эффектов конечного размера и структуры ядра. К последним относятся поправки на отдачу, которые предполагают интегрирование по большим переданным импульсам, когда необходимо учитывать формфакторы ядра и другие более сложные эффекты [12].

Для нормированной разности (1) ситуация с поправками к отдаче существенно иная, так как “жесткие” петлевые интегрирования, требующие учета структуры ядра, приводят к δ -образным потенциалам и не дают вклада в (1). КЭД часть разности может включать и дополнительные члены. В частности, поправки порядка $(Z\alpha)^2(m/M)$ в общем случае (например, для состояния $1s$) не являются чисто электродинамическими поправками, каковыми они оказываются для разности (1), для которой КЭД результат имеет вид [3, 5, 13]

$$\begin{aligned} \Delta E_{21}^{(\text{eQED})} = & (Z\alpha)^2 E_F \times \left\{ \frac{5}{8} + \right. \\ & + \frac{\alpha}{\pi} \left[\left(7 - \frac{16}{3} \ln 2 \right) \ln \frac{1}{Z\alpha} - 5.55155\dots \right] + \\ & + \frac{m}{M} \left[-\frac{9}{8} + \left(\frac{\ln 2}{2} - \frac{7}{32} \right) \left(1 - \frac{1}{\eta} \right) - \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{145}{128} - \frac{7}{8} \ln 2 \right) \eta \right] \right\} = 1.98 \cdot 10^{-6} \text{ эВ}, \end{aligned}$$

где M – масса ядра, а параметр

$$\eta = \frac{\mu}{\mu_N I} \frac{M}{m_p} \frac{1}{Z} \quad (6)$$

имеет смысл g -фактора.

Поправки, помеченные индексом eQED, одинаковы для электронных и мюонных атомов, но погрешность их вычисления существенно отличается. В обоих случаях неопределенность связана с вкладами четвертого порядка $\delta E_{21}^{(\text{eQED})}$, которые включают дополнительно один из параметров: α , $Z\alpha$ или m/M . Эти поправки известны лишь частично [5, 6, 14]. Поправки с дополнительными факторами α и $Z\alpha$ доминируют в электронных атомах. Для мюонного водорода актуальными являются только поправки, связанные с эффектами отдачи (напомним, в водороде и мюонном водороде: $(m/M)_e \simeq 1/1836 \ll \alpha = Z\alpha \simeq 1/137 \ll (m/M)_\mu \simeq 1/9$). Часть из них известна в логарифмическом приближении [5]:

$$\delta E_{21}^{(e\text{QED})} = (Z\alpha)^2 E_F \times \left\{ \frac{\alpha}{\pi M} \left(\frac{32}{3} \ln 2 - 14 \right) + \frac{Z\alpha m}{\pi M} \left(2 - \frac{4}{3} \ln 2 \right) \right\} \ln \frac{1}{Z\alpha}. \quad (7)$$

Погрешность оценена половиной величины логарифмического вклада: $\delta E_{21}^{(e\text{QED})} = -0.069(34) \cdot 10^{-6}$ эВ. В погрешности для мюонного водорода доминирует вклад $(Z\alpha)^2(m/M)^2$, который неизвестен, так как в задаче для обычных атомов [5] им пренебрегают.

Ведущий вклад в разность ΔE_{21} в обычных атомах имеет порядок $(Z\alpha)^2 E_F$, однако для мюонных атомов имеется дополнительный вклад первого порядка по α (см. табл.1) [10], который доминирует

Вклад	$c_2(1s)$	$c_2(2s)$	$c_2(21)$
a	0.883041	0.91026	0.027219
b 2	1.73115	1.40425	-0.326906
Всего	2.61419	2.31451	-0.299687

Табл. 1. Вклады порядка αE_F в СТР мюонном водороде [10]: вклад *a* отвечает учету поправки на электронную поляризацию вакуума в поперечном фотоне, вклад *b* учитывает влияние электростатического потенциала Юлинга на величину СТР; двойная линия обозначает кулоновскую функцию Грина мюона.

и изменяет вклад разности. Для подобных специфических мюонных КЭД вкладов можно написать

$$\Delta E^{(\mu\text{QED})}(ns) = \frac{\alpha}{\pi} \left(c_1(n) + \frac{\alpha}{\pi} c_2(n) \right) (1 + a_\mu) E_{\text{hfs}}^{(0)}(ns),$$

$$\Delta E_{21}^{(\mu\text{QED})} = \frac{\alpha}{\pi} \left(c_1(21) + \frac{\alpha}{\pi} c_2(21) \right) (1 + a_\mu) E_F.$$

До недавнего времени [10] погрешность вычисления электродинамической части ΔE_{21} определялась неизвестной величиной двухпетлевого вклада в $\Delta E_{21}^{(\mu\text{QED})}$. Вычисление коэффициента c_2 является основным результатом данной работы.

Специфические КЭД вклады более высокого порядка включают как неизвестные трехпетлевые вклады поляризации вакуума порядка $(\alpha/\pi)^3 E_F$, так и релятивистские поправки к однопетлевому вкладу порядка $(\alpha/\pi)(Z\alpha)^2 E_F$. Последние известны для состояний $1s$ [15], $2s$ [5] и $\delta E_{21}^{(\mu\text{QED})} = 1.5 \frac{\alpha}{\pi} (Z\alpha)^2 E_F = 0.033 \cdot 10^{-6}$ эВ.

В данной работе мы вычисляем вклады второго порядка по поляризации вакуума, для чего необходимо рассмотреть вклады первого, второго и третьего порядков по нерелятивистской теории возмущений. Соответствующие графики и результаты для отдельных вкладов собраны в табл.2. Найденный нами вклад поляризации второго порядка равен

Вклад	$c_2(1s)$	$c_2(2s)$	$c_2(21)$
a	1.28028	1.30453	0.02425
b	1.68287	1.73944	0.05657
c 2	1.85512	1.73785	-0.11727
d 2	3.79665	2.83394	-0.96271
e 2	1.16347	1.02936	-0.13410
f 2	0.92294	0.56352	-0.35942
g	0.68104	0.41990	-0.26114
Всего	11.3824	9.62854	-1.75382

Табл.2. Вклады электронной поляризации вакуума второго порядка в СТР в мюонном водороде. Вклады *b* и *d* отвечают полной неприводимой части двухпетлевого поляризационного оператора.

$-1.72842 \cdot 10^{-6}$ эВ, а полный результат для специфических мюонных вкладов составил $\Delta E_{21}^{(\mu\text{QED})} = -128.878(2) \cdot 10^{-6}$ эВ.

Кратко остановимся на основных элементах вычисления. Ключевые блоки, входящие в диаграммы, представленные в табл.2, включают электростатическое и магнитное взаимодействия, индуцированные поляризацией вакуума, и нерелятивистскую волновую функцию Грина для мюона в кулоновском поле. Мы использовали представление поляризации вакуума при помощи дисперсионного

интеграла так, чтобы соответствующий электростатический потенциал имел вид

$$-\frac{Z\alpha}{r} \int_0^1 dv \rho(v) \exp\left[-\frac{2m_e r}{\sqrt{1-v^2}}\right], \quad (8)$$

и воспользовались известными спектральными функциями ρ для неприводимых потенциалов Юлинга и Чалена-Сабри (см., например, [16]), а приводимую двухпетлевую поляризацию представили в виде

$$\rho_{1.1}(v) = -\frac{1}{9} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{v^2(1-v^2/3)}{1-v^2} \times \\ \times \left\{ 16 - 6v^2 + 3v(3-v^2) \ln\left(\frac{1-v}{1+v}\right) \right\}. \quad (9)$$

Соответствующее магнитное взаимодействие выражается через производные электростатического потенциала. Единообразное представление потенциалов упрощает вычисление радиальных интегралов (см. ниже) и позволяет провести ряд проверок как исходных формул, так и программ для их вычисления (сравнивая вычисляемые вклады табл. 2 с известными [10] вкладами табл. 1).

В то же время, для другого важного элемента диаграмм, нерелятивистской кулоновской функции Грина, мы используем представление в виде разложения по решениям задачи Штурма–Лиувилля [17]:

$$G(E; \mathbf{r}', \mathbf{r}) = \frac{1}{Z\alpha} \sum_{lm_l} \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{\nu}{k-\nu} \times \\ \times \Phi_{kl}^{(\nu)}(r) \Phi_{kl}^{(\nu)}(r') Y_{lm_l}^*(\Omega) Y_{lm_l}(\Omega'). \quad (10)$$

Решения задачи Штурма–Лиувилля $\Phi_{nlm_l}^{(\nu)}(\mathbf{r}) = n(Z\alpha m)^{-1/2} \Psi_{nlm_l}(\frac{n}{\nu} \mathbf{r})$ с энергией $E = -(Z\alpha)^2 m / 2\nu^2$ имеют вид, аналогичный волновым функциям связанных состояний в атоме водорода $\Psi_{nlm_l}(\mathbf{r})$. В техническом плане это представление во многом похоже на обычную сумму по состояниям в кулоновской задаче, однако присутствует лишь дискретный спектр. Матричные элементы от взаимодействий вычисляются в координатном представлении и полностью аналогичны тем, что неоднократно исследовались нами ранее [18–20].

Несколько упрощений позволили уменьшить количество сумм и интегралов во вкладах ряда диаграмм. Так, применение дисперсионного представления для приводимой двухпетлевой поляризации в виде $\rho_{1.1}(v)$ сократило количество интегрирований по дисперсионным параметрам⁵⁾.

⁵⁾ Приводимую часть поляризации вакуума обычно представляют при помощи двойного интеграла. При этом по-

При вычислении нескольких вкладов (см. табл. 2, вклады c , d , и f) возникает характерная свертка

$$\delta\Psi_{ns}^{\text{hfs}}(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' \Psi_{ns}(\mathbf{r}') V_{\text{hfs}}(\mathbf{r}') \tilde{G}_{ns}(E_n; \mathbf{r}', \mathbf{r}), \quad (11)$$

которую можно свести к выражению

$$\delta\Psi_{ns}^{\text{hfs}}(\mathbf{r}) = \frac{E_{\text{hfs}}^{(0)}(ns)}{\Psi_{ns}(\mathbf{r}=0)} \tilde{G}_{ns}(E_n; 0, \mathbf{r}), \quad (12)$$

где для редуцированных функций Грина \tilde{G} имеются явные формулы, например, [21]

$$\tilde{G}_{1s}(E_1; 0, \mathbf{r}) = \frac{Z\alpha m^2}{\pi} e^{-\frac{z}{2}} \left(\ln z + C + \frac{z^2 - 5z - 2}{2z} \right),$$

где C – постоянная Эйлера и $z = 2Zamr$. В итоге одно суммирование по промежуточным состояниям и одно интегрирование по радиусу оказываются тривиальными; интегрирование по радиусу, которое включает $\delta\Psi_{ns}^{\text{hfs}}(\mathbf{r})$, аналогично рассмотренным в [15, 22].

Общее выражение в третьем порядке теории возмущений по потенциальному δV (см. два последних вклада в табл. 2)

$$\Delta E_{\text{hfs}}^{(3)}(ns) = \langle \Psi_{ns}(\mathbf{r}) | \delta V(\mathbf{r}) \tilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') | \delta V(\mathbf{r}') - \delta E_{ns}^{(1)} \rangle \times \\ \times \tilde{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \delta V(\mathbf{r}'') | \Psi_{ns}(\mathbf{r}'') \rangle,$$

где $\delta E_{ns}^{(1)} = \langle \Psi_{ns} | \delta V | \Psi_{ns} \rangle$, включает вычитательные члены, которые можно значительно упростить, поскольку

$$\int d^3\mathbf{r} \Phi_{ns}^{(n)}(\mathbf{r})^* \Phi_{n's}^{(n)}(\mathbf{r}) = 0, \quad \text{если } |n - n'| \geq 2.$$

С учетом указанных упрощений, наиболее сложные вклады включают лишь двухкратные интегралы по радиусу и однократную сумму по промежуточным состояниям, причем все интегралы по радиусу вычисляются аналитически (ср. [18, 15]), а интегралы по дисперсионной переменной v берутся как аналитически, так и численно (сравни [18–20, 22]).

Расчет поправок на структуру ядра представляется собой задачу, имеющую отношение скорее к ядерной, чем к атомной физике. Однако при вычислении поправок к нормированной разности (1) можно воспользоваться феноменологическими δ -потенциалами [5], которые, в частности, успешно описывают вклады в ведущем порядке. Два таких вклада пропорциональны δ -функции и приводят к поправке $\Delta E_{\text{hfs}}^{\text{Nuc}}(1s)$

правка к фотонному пропагатору в импульсном представлении явно обращается в нуль при нулевом переданном импульсе. В данном представлении поправка пропорциональна $\int dv \rho_{1.1}(v) [q^2 - 4m_e^2/(1-v^2)]^{-1}$ и обращается при $q^2 = 0$ в нуль, так как $\int dv \rho_{1.1}(v) (1-v^2) = 0$.

к величине СТР и к лэмбовскому сдвигу (потенциал, пропорциональный квадрату зарядового радиуса ядра R_E), соответственно. Имеется еще один контактный член, имеющий вид лапласиана от δ -функции и пропорциональный квадрату магнитного радиуса R_M . Вклад эффектов структуры ядра имеет вид [5, 6, 23]

$$\Delta E_{21}^{e\text{Nucl}} = (Z\alpha)^2 \cdot \left\{ \left(\ln 2 + \frac{3}{16} \right) \cdot \Delta E_{\text{hfs}}^{e\text{Nucl}}(1s) + \left(m_r R_E \right)^2 E_F \left[2 - \frac{4}{3} \ln 2 - \frac{1}{4} \left(\frac{R_M}{R_E} \right)^2 \right] \right\},$$

где зарядовый и магнитный радиусы протона определены как среднеквадратичные радиусы. Эти вклады примерно одного порядка в обычном водороде (так как $m_r R_p \simeq 0.002$). Для мюонного водорода, где $m_r R_p \simeq 0.4$, вклады, пропорциональные $(m_r R_p)^2$, оказываются порядка $(Z\alpha)^2 E_F$, а первый вклад – порядка $(Z\alpha)^3 E_F$. Это связано с тем, что $\Delta E_{\text{hfs}}^{e\text{Nucl}}(1s) \sim (Z\alpha)(m_r R_p)E_F$.

Как отмечено в [10], имеется также специфический мюонный вклад

$$\Delta E_{21}^{\mu\text{Nucl}} = \frac{\alpha}{\pi} c_1^b \cdot \Delta E_{\text{hfs}}^{e\text{Nucl}}(1s). \quad (13)$$

Здесь учтено, что значение нерелятивистской волновой функции в нуле модифицируется потенциалом Юлинга.

Собирая рассмотренные выше вклады, получаем выражение

$$\Delta E_{21} = \left(-126.93(49) + 1.03(1) \frac{\Delta E_{\text{hfs}}^{e\text{Nucl}}(1s)}{\Delta E_{\text{hfs}}^{e\text{Nucl},0}(1s)} + + 1.96(2) \left(\frac{R_E}{R_0} \right)^2 - 0.46(1) \left(\frac{R_M}{R_0} \right)^2 \right) \cdot 10^{-6} \text{эВ},$$

которое включает три параметра: $\Delta E_{\text{hfs}}^{e\text{Nucl}}(1s)$, R_E и R_M . Чтобы сделать порядки величин понятными, мы воспользовались грубыми оценками для радиусов и поправки на структуру ядра. Здесь $R_0 = 0.9$ фм, а для нормировки ведущей поправки $\Delta E_{\text{hfs}}^{e\text{Nucl}}(1s)$ мы сделали грубую оценку ($\Delta E_{\text{hfs}}^{e\text{Nucl},0}(1s) = -1450.72 \cdot 10^{-6}$ эВ). Отклонение реальных значений параметров $\Delta E_{\text{hfs}}^{e\text{Nucl}}(1s)$, R_E и R_M заметно меньше единицы, и такая параметризация чрезвычайно удобна для оценки погрешностей разных вкладов.

Обсудим точность полученного выражения. Погрешность специфических мюонных вкладов $\Delta E_{21}^{\mu\text{QED}}$ определяется неизвестными вкладами третьего порядка $(\alpha/\pi)^3 E_F$. Ранее [10] в теоретическом выражении доминировала неопределенность,

связанная с вкладом $(\alpha/\pi)^2 E_F$, вычисленным в настоящей работе.

Погрешность стандартной КЭД теории, общей для электрона и мюона, $\Delta E_{21}^{e\text{QED}}$, связана с неизвестными вкладами порядка $(Z\alpha)^2(m/M)^2 E_F$. Именно этот вклад определяет погрешность КЭД вычислений в настоящее время. Аналогичные вычисления уже имели место [4, 24] и следует ожидать, что вклад через некоторое время будет вычислен. Тогда погрешность электродинамических вкладов будет связана с другими поправками старших порядков, $\frac{\alpha}{\pi}(Z\alpha)^2 \frac{m}{M} E_F$ и $(Z\alpha)^3 \frac{m}{M} E_F$, которые известны [5] в логарифмическом приближении (7).

При рассмотрении вкладов, учитывающих структуру ядра, необходимо разделить точность, с которой найдены коэффициенты в (14), и точность, с которой известны входящие в них параметры ядра. Нерелятивистская поправка $\Delta E_{21}^{\mu\text{Nucl}}$ известна с точностью до нерелятивистских эффектов старших порядков; учет релятивизма приведет к дополнительному множителю $(Z\alpha)^2$. Точность вычисления коэффициента находится на процентном уровне.

Вклады в $\Delta E_{21}^{e\text{Nucl}}$ состоят из двух типов слагаемых. Члены, явно включающие радиус ядра, имеют нерелятивистскую природу, и поправки к ним находятся на процентном уровне, тогда как малая релятивистская поправка, содержащая $\Delta E_{\text{hfs}}^{e\text{Nucl}}(1s)$, связана с релятивистскими расчетами и может иметь относительный порядок m/M .

Таким образом, в настоящее время погрешность определяется неизвестным вкладом порядка $(Z\alpha)^2(m/M)^2 E_F$, а после его вычисления будет определяться точностью, с которой известны входящие в выражение параметры.

Параметры, характеризующие структуру ядра, можно рассматривать по-разному. Можно опереться на существующие значения радиусов R_E и R_M , которые в значительной степени основаны на данных расстояния [25], причем зарядовый радиус измерен лучше, чем магнитный. Кроме того, имеется результат для электрического зарядового радиуса протона из спектроскопии атома водорода [26]. Поправку на структуру ядра $\Delta E_{\text{hfs}}^{e\text{Nucl}}(1s)$ можно оценить из более или менее реалистических моделей.

Мы предпочтаем другую стратегию. Напомним, что вычисление разности ΔE_{21} имеет практический смысл лишь в случае успеха экспериментов по изменению СТР в мюонном водороде [1, 2]. Точность этих экспериментов непосредственно определит точность экспериментального определения разности ΔE_{21} . Отметим, что величина $\Delta E_{\text{hfs}}^{e\text{Nucl}}(1s)$ не составит проблем, так как ее можно извлечь из прямого сравне-

ния с экспериментом по $1s$ СТР в мюонном водороде, сравнивая с КЭД теорией, обсуждавшейся выше:

$$\Delta E_{\text{hfs}}^{e\text{Nucl}}(1s) = \frac{E_{\text{hfs}}^{\text{exp}}(1s) - E_{\text{hfs}}^{\text{QED}}(1s)}{1 + c_1^b(1s) \frac{\alpha}{\pi}}.$$

После умножения на α/π возникший вклад будет иметь погрешность, связанную с параметром $\Delta E_{\text{hfs}}^{\text{Nucl}}(1s)$, пренебрежимую по сравнению с погрешностью экспериментального значения ΔE_{21} .

Что же касается радиусов протона, то в настоящий момент точность их определения вполне удовлетворительна для сравнения теории и эксперимента для разности (1) (при реалистических ожиданиях точности экспериментов [1, 2]), что позволит проверить согласованность экспериментальных данных из двух разных экспериментов в мюонном водороде. Учитывая сложность экспериментов [1, 2], это было бы крайне полезно. Если же при повышении точности экспериментов погрешность определения радиусов окажется в каком-то сценарии доминирующей, то сравнение теории и эксперимента для разности (1) позволит уточнить этот параметр.

Авторы благодарны В.А. Шелюту за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 08-02-91969) и DFG (грант # GZ 436 RUS 113/769/0-3), а Е.Ю.К. был также поддержан фондом Династия.

1. P. Regoliosi, *QCL-MUH — Tunable sources for measurements of proton polarizability*, Presented at Opening Meeting of Hadron Physics 2 – LNF, Frascati, Italy, Sept., 28, 29, 2007.
2. T. Nebel et al., Can. J. Phys. **85**, 469 (2007).
3. D. Zwanziger, Phys. Rev. **121**, 1128 (1961).
4. M. Sternheim, Phys. Rev. **130**, 211 (1963).
5. S. G. Karshenboim and V. G. Ivanov, Phys. Lett. B **524**, 259 (2002); Euro. Phys. J. D **19**, 13 (2002); S. G. Karshenboim, *Hydrogen atom: Precision physics of simple atomic systems*, Eds. S. G. Karshenboim et al., Springer, Berlin, Heidelberg, 2001, p. 335.
6. С. Г. Каршенбойм, Н. Н. Колачевский, В. Г. Иванов и др., ЖЭТФ **129**, 419 (2006).
7. N. Kolachevsky, M. Fischer, S. G. Karshenboim, and T. W. Hänsch, Phys. Rev. Lett. **92**, 033003 (2004).
8. N. Kolachevsky, P. Fendel, S. G. Karshenboim, and T. W. Hänsch, Phys. Rev. A **70**, 050412 (2004).
9. M. H. Prior and E. C. Wang, Phys. Rev. A **16**, 6 (1977).
10. K. Jungmann, V. G. Ivanov, and S. G. Karshenboim, in *Hydrogen atom: Precision physics of simple atomic systems*. Eds. S. G. Karshenboim et al., Springer, Berlin, Heidelberg, 2001, p. 446.
11. M. I. Eides, H. Grotch and V. A. Shelyuto, Phys. Rept. **342**, 63 (2001); *Theory of Light Hydrogenic Bound States*, Springer Tracts Mod. Phys. **222**, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.
12. G. T. Bodwin, D. R. Yennie, and M. Gregorio, Phys. Rev. Lett. **48**, 1799 (1982); Rev. Mod. Phys. **57**, 723 (1985).
13. S. G. Karshenboim, Phys. Rep. **422**, 1 (2005).
14. S. G. Karshenboim and V. G. Ivanov, Can. J. Phys. **83**, 1063 (2005); V. A. Yerokhin, A. N. Artemyev, V. M. Shabaev, and G. Plunien, Phys. Rev. A **72**, 052510 (2005).
15. С. Г. Каршенбойм, В. Г. Иванов, В. М. Шабаев, ЖЭТФ **117**, 67 (2000); S. G. Karshenboim, V. G. Ivanov, and V. M. Shabaev, Can. J. Phys. **76**, 503 (1998).
16. M. I. Eides, S. G. Karshenboim, and V. A. Shelyuto, Phys. Lett. B **229**, 285 (1989); Ю. Швингер *Частицы, источники, поля*, т. 2 М.: 1976.
17. П. П. Павинский, А. И. Шерстюк, Вестник ЛГУ **22**, 11 (1968); L. Hostler, J. Math. Phys. **11**, 2966 (1970); С. В. Христенко, С. И. Вечников, Оптика и спектроскопия **31**, 503 (1971); С. А. Запрягаев, Н. Л. Манаков, Л. П. Рапопорт, ЯФ **15**, 508 (1972).
18. С. Г. Каршенбойм, ЖЭТФ **116**, 1575 (1999); S. G. Karshenboim, Can. J. Phys. **76**, 169 (1998).
19. S. G. Karshenboim, V. G. Ivanov, and E. Yu. Korzinin, Eur. Phys. J. D **39**, 351 (2006); E. Yu. Korzinin, V. G. Ivanov, and S. G. Karshenboim, Eur. Phys. J. D **41**, 1 (2007).
20. E. Yu. Korzinin, V. G. Ivanov, and S. G. Karshenboim, arXiv:0712.2114.
21. В. Г. Иванов, С. Г. Каршенбойм, ЖЭТФ **109**, 1219 (1996).
22. S. G. Karshenboim, U. Jentschura, V. Ivanov, and G. Soff, Eur. Phys. J. D **2**, 209 (1998).
23. S. G. Karshenboim, Phys. Lett. A **225**, 97 (1997).
24. K. Pachucki, Phys. Rev. Lett. **79**, 4120 (1997); Phys. Rev. A **56**, 297 (1997); K. Pachucki and S. G. Karshenboim, Phys. Rev. Lett. **80**, 2101 (1998).
25. I. Sick, Prog. Part. Nucl. Phys. **47**, 245 (2001).
26. P. J. Mohr, B. N. Taylor, and D. B. Newell, Rev. Mod. Phys. **80**, 633 (2008).