Письма в ЖЭТФ, том 51, вып. 5, стр. 233 – 236 *10 марта 1990 г.*

РЕГУЛЯРИЗОВАННАЯ СКАЛЯРНАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

С.М.Кузенко, О.А.Соловьев

Исследована общая структура скалярной функции Грина на компактных римановых поверхностях. Получено уравнение, связывающее вторые (и высшие) производные скалярного пропагатора с первыми.

Скалярные двуточечные функции на компактных римановых поверхностях играют важную роль в струнной теории возмущений. Различные математические аспектры этих объектов анализировались многими авторами и достаточно полно отражены в обзоре [1]. В то же время двуточечная функция Грина является скалярным пропагатором в квантовой теории поля на римановой поверхности. В данных заметках мы покажем, как можно извлечь интересную информацию о структуре этого объекта, анализируя вспомогательную двумерную квантовую теорию.

Рассмотрим теорию скалярного поля $X(z)$ на римановой поверхности M рода h с метрикой $ds^2 = 2g_{z\bar z}dzd\bar z$

$$S = \frac{1}{4\pi}\int d^2z\,[\partial_z X\,\partial_{\bar z}X - \Lambda_{\bar z}^{z}(\partial_z X)^2 - \Lambda_z^{\bar z}(\partial_{\bar z}X)^2 + 4\pi g_{z\bar z}\Phi X], \tag{1}$$

где $\Lambda_{\bar z}^{z}(z)$, $\Phi(z)$ – фоновые двумерные поля, причем поле $\Lambda_{\bar z}^{z}$ – бесконечно малое. Наши обозначения совпадают с принятыми в [1].

Вычислим Λ–Φ-вклад в эффективное действие (ЭД) $W(\Lambda, \Phi)$, определяемое как

$$\exp(-W) = \int DX\exp(-S).$$

В рамках теории возмущений это можно сделать двумя способами:

а) выберем в качестве свободного действия S_0

$$S_0 = \frac{1}{4\pi}\int d^2z\,\partial_z X\,\partial_{\bar z}X.$$

Тогда Λ–Φ вклад дается диаграммой а, изображенной на рисунке;

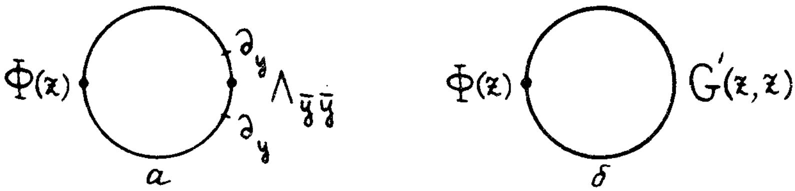
б) определим другое свободное действие S_0

$$S_0 = \frac{1}{4\pi}\int d^2z[\partial_z X\partial_{\bar z}X - \Lambda_{\bar z}^{z}(\partial_z X)^2 - \Lambda_z^{\bar z}(\partial_{\bar z}X)^2],$$

которое можно переписать в ковариантном виде, используя ковариантные производные $D_z = \nabla_z - \Lambda_z^{\bar z}\nabla_{\bar z} + (\nabla_{\bar z}\Lambda_z^{\bar z})\hat{M}$. В этом случае все $\Lambda - \Phi$ члены содержатся в диаграмме б на рисунке, где функция Грина $G'(z, z)$ строится по новой метрике

$$ds'^2 = 2g_{z\bar z}|\,dz + \Lambda_{\bar z}^{z}|d\bar z|^2. \tag{2}$$

Из выражения (2) видно, что зависимость $G'(z, z)$ от Λ определяется трансформационными свойствами функции $G(z, z)$ относительно бесконечно малых деформаций Бельтрами. Поэтому необходимо знать общую структуру скалярного пропагатора в пределе совпадающих точек. Заметим, что в статье [3] найден закон преобразования (регуляризованной) скалярной функции Грина относительно вейлевского растяжения метрики, но ее структура исследована не до конца.



Функция Грина в пределе $z \to z'$ плохо определена. Для придания смысла $G(z, z')|_{z\to z'}$, регуляризуем функцию Грина, используя обрезание по собственному времени [4]. Можно показать, что в данной регуляризации справедливо равенство

$$\lim_{z\to z'} G(z, z'; \epsilon) \equiv G(z; \epsilon) = A + \frac{1}{4\pi}\int d^2\omega\sqrt{g}\,G(z, \omega; \epsilon)N(\omega; \epsilon),$$

$$A \equiv \frac{1}{\int d^2y\sqrt{g}}\int d^2\omega\sqrt{g}\,G(\omega; \epsilon) = -\ln\epsilon + \ldots, N(z; \epsilon) \equiv \Delta_0 G(z; \epsilon) = 2(\Delta_0 - \nabla_z\nabla^{\omega} -$$

$$-\nabla^z\nabla_{\omega})\,G(z, \omega; \epsilon)|_{z=\omega}. \tag{3}$$

Здесь ϵ – бесконечно малый параметр регуляризации, Δ_0 – оператор Лапласа, функция Грина $G(z, \omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_0 G(z, \omega) = \frac{4\pi}{\sqrt{g}}\,\delta(z-\omega) - \frac{4\pi}{\int d^2y\sqrt{g}}. \tag{4}$$

Далее, используя интегральное представление для пропагатора $G(z, \omega; \epsilon)$, легко получить

$$N(z; \epsilon \to 0) = 2\widetilde{R}_g(z) \equiv 2R_g(z) + 4\pi g^{z\bar z}\sum_{I,J=1}^{h}\omega_z^I(\mathrm{Im}\,\Omega)^{-1}_{IJ}\bar\omega_{\bar z}^J, \tag{5}$$

где $R_g(z)$ – скалярная кривизна, ω_z^I – голоморфные дифференциалы, Ω_{IJ} – матрица периодов римановой поверхности рода h. Интересно отметить, что интеграл $\int d^2z\sqrt{g}\widetilde{R}_g = 4\pi$ не зависит от рода поверхности.

Из уравнения

$$\delta_{Weyl}G(z, y) = \frac{-2}{\int d^2v\sqrt{g}}\int d^2\omega\sqrt{g}\sigma(w)[G(z, w) + G(y, w)]$$

находим константу A

$$A = -\ln\epsilon + \frac{1}{2\pi}\int d^2y\sqrt{\hat{g}}\left[\frac{1}{2}\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\rho\partial_\nu\rho + \rho\tilde{R}_{\hat{g}}\right] - \tag{6}$$
$$- \frac{1}{16\pi^2}\int d^2\omega\sqrt{g}\int d^2y\sqrt{g}\tilde{R}_g(\omega)\,G(\omega, y)\tilde{R}_g(y) + \Psi(m_i).$$

Здесь $\hat{g}_{\mu\nu} = e^{-2\rho}g_{\mu\nu}$ – метрика постоянной кривизны, $\Psi(m_i)$ – функция на пространстве Тейхмюллера. Выражения (5), (6), полностью определяют структуру регуляризованной функции Грина (3).

Зависимость функции $G(z;\epsilon)$ от дифференциалов Бельтрами Λ теперь можно установить, используя формулы (3), (5), (6), а также трансформационное свойство

$$\delta_{Beltrami}G(z, y) = \frac{1}{2\pi}\int d^2\omega\Lambda_{\bar{\omega}}^{\omega}\,\partial_\omega G(z, \omega)\,\partial_\omega G(y, \omega) + \text{h.c.} \tag{7}$$

Изложенного достаточно для нахождения интересующих нас членов в ЭД. Из требования равенства Λ–Φ-вкладов, посчитанных способами а) и б), возникает уравнение на скалярную функцию Грина

$$(\partial_z G(z, \omega))^2 = \nabla_z^2 G(z, \omega) + \frac{1}{2\pi}\partial_z G(z, \omega)\int d^2y\sqrt{g}\nabla_z G(z, y)\tilde{R}_g(y) -$$
$$- 2\int d^2y\,\partial_z G(z, y)\,\partial_y G(\omega, y)\mathcal{P}_{z\bar{y}} +$$
$$+ \Psi_{zz} + \frac{1}{8\pi^2\int d^2u\sqrt{g}}\int d^2v\sqrt{g}\nabla_z G_z^{(+)}(z, v)^v\int d^2y\sqrt{g}\,\partial_v G(v, y)\tilde{R}(y). \tag{8}$$

Здесь: $\mathcal{P}_{z\bar{y}}$ проектор на пространстве голоморфных дифференциалов,

$$\mathcal{P}_{z\bar{y}} \equiv \frac{1}{2}\sum_{I,J=1}^{h}\omega_z^I(\operatorname{Im}\Omega)_{IJ}^{-1}\bar{\omega}_{\bar{y}}^J;$$

Ψ_{zz} – квадратичный голоморфный дифференциал, $\partial_{\bar{z}}\Psi_{zz} = 0$; функция Грина $G_z^{(+)}(z, v)^v$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_1^{(+)}G_z^{(+)}(z, v)^v = 4\pi\delta(z, v).$$

Уравнение (8) корректно, когда $h \geqslant 2$, поскольку в этом случае отсутствуют нулевые моды лапласиана $\Delta_1^{(+)}$ [1]. Случаи $h = 0, 1$ разобраны ниже.

Найденное соотношение (8) интересно тем, что связывает вторые (и высшие) производные функции Грина с первыми. Замечательно также то, что уравнение (8) ковариантно относительно вейлевского преобразования. Последнее доказывается непосредственным варьированием диаграмм а), б) на рисунке.

Проанализируем уравнение (8) для римановых поверхностей рода $h = 0,1$. Для сферы ($h = 0$) отсутствуют абелевы и квадратичные дифференциалы. Как следствие, соотношение (8) принимает простой вид

$$(\partial_z G(z, \omega))^2 = \nabla_z^2 G(z, \omega), \quad h = 0. \tag{9}$$

Нетрудно проверить, что функция Грина

$$G(z, z') = -\ln \frac{|z - z'|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)},$$

отвечающая стандартной метрике на сфере [1], удовлетворяет уравнению (9).

В случае тора $(h = 1)$ $\omega_z = 1$, $\Psi_{zz} = \mathrm{const}$. Поэтому уравнение (8) записывается в форме[1)]

$$(\partial_z G(z - \omega))^2 = \partial_z^2 G(z - \omega) + \frac{1}{\tau_2} \int d^2 y \partial_z G(z - y) \partial_\omega G(\omega - y) + \mathrm{const}, \quad h = 1. \tag{10}$$

Последнее слагаемое в (8) исчезает в силу равенства $\int d^2 y G(z - y) = 0$ [1,3].

Скалярная функция Грина на торе строится в терминах θ_1 – функции Римана[1)]

$$G(z - z') = -\ln \left| \frac{\theta_1(z - z'; \tau)}{\theta_1'(0, \tau)} \right|^2 - \frac{\pi}{2\tau_2}(z - \bar{z} - z' + \bar{z}')^2. \tag{11}$$

Для доказательства уравнения (10) заметим, что ρ-функция Вейерштрасса $\rho(z - \omega) \equiv \partial_z^2 G(z - \omega)$ – голоморфна, когда $z \neq \omega$ и имеет разложение в ряд Лорана

$$\rho(z - \omega) = \frac{1}{(z - \omega)^2} + \text{регулярные слагаемые}.$$

С другой стороны, легко показать, что комбинация

$$(\partial_z G(z - \omega))^2 - \frac{1}{\tau_2} \int d^2 y \partial_z G(z - y) \partial_\omega G(\omega - y) \tag{12}$$

также голоморфна, когда $z \neq \omega$ и обладает полюсом таким же как и ρ. Это означает, что функции $\rho(z - \omega)$ и (12) отличаются лишь на константу в полном соответствие с нашим уравнением (10).

Заметим, что из тождества (10) вытекает новое интегральное представление для функции Вейерштрасса только в терминах функции θ_1. Кроме того, из соотношений (3), (5), (6) следует, что $G(z, z; \epsilon)$ – константа для сферы и тора.

Главным результатом нашей работы является уравнение (8), которое возникает из условия непротиворечивости квантовой полевой теории (1) на римановой поверхности. Таким образом, продемонстрирован способ извлечения нетривиальной математической информации из физической теории.

Мы думаем, что полученные результаты могут оказаться полезными для вычисления высших петлевых поправок к струнным уравнениям движения в рамках σ-модельного подхода [5].

Литература

1. *D'Hoker E., Phong D.H.* Rev. Mod. Phys., 1988, 60, 917.
2. *Кузенко С.М., Соловьев О.А.* Письма в ЖЭТФ, 1989, 50, 52.
3. *Verlinde E., Verlinde H.* Nucl. Phys. B, 1987, 288, 357.
4. *Polyakov A.M.* Phys. Lett. B, 1981, 103, 207.
5. *Ooguri H., Sakai N.* Nucl. Phys. B, 1988, 312, 435.

Томский государственный университет

Поступила в редакцию
31 декабря 1989 г.

1) Мы используем стандартную параметризацию тора [1].