Письма в ЖЭТФ, том 51, вып. 5, стр. 252 – 255 *10 марта 1990 г.*

О НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКИ БЕЗ ПРИБЛИЖЕНИЯ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ АМПЛИТУД И ФАЗ

Э.М.Беленов, А.В.Назаркин

Во взаимодействии электромагнитного поля со средой установлен класс новых нелинейных явлений: существование "полуволновых" солитонов электромагнитного поля, индуцирование полем "джозефсоновских" токов, эффективно умножающих частоту излучения.

1. Успехи, достигнутые в методах формирования световых импульсов длительностью в несколько (вплоть до одного) колебаний волны и потоками мощности $(10^9 \div 10^{18})$ вт/см^2 [1], поставили совершенно новые задачи перед оптикой нелинейных сред. Аппарат традиционной нелинейной оптики – метод медленно меняющихся амплитуд и фаз (ММАФ) для поля и материальных переменных среды [2, 3] – становится неадекватным для описания волновых процессов столь малого пространственно-временного масштаба и столь больших напряженностей полей. Мы приводим решение ряда уравнений распространения импульсов в нелинейных средах, когда метод ММАФ неприменим. Показано, в частности, что уравнения нелинейной оптики допускают существование новых волновых объектов – однополярных импульсов, которые, следуя за терминологией в описании биполярных черенковских импульсов [1], можно назвать импульсами длительностью в половину длины волны. В противоположность аналогичным импульсам в линейных средах, где "время их жизни" ограничено длиной дисперсионного расплывания, указанные объекты являются устойчивыми. Можно сказать, что подобного рода сгустки электромагнитного поля в нелинейной среде в существенной степени наделены свойствами частиц.

Для описания эволюции импульса пользуемся уравнениями для матрицы плотности среды [2] с компонентами ρ_{mn} (m и n нумеруют уровни системы) и волновым уравнением для напряженности поля ϵ :

$$\mathrm{rot\,rot}\,\vec{\epsilon} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\epsilon}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\mathcal{P}}}{\partial t^2} . \qquad (1)$$

Поляризация среды $\vec{\mathcal{P}}$ связана с матричными элементами дипольных моментов μ_{mn} и плотностью частиц N соотношением $\vec{\mathcal{P}} = N\sum\limits_{m,n} \rho_{mn}\vec{\mu}_{nm}$. Отметим, что в уравнения для матрицы плотности ρ_{mn} входят частоты ω_{mn} переходов между уровнями, но не входят члены с релаксационными константами, которые мы опускаем. При решении (1) задачу рассматриваем в простейшей постановке: электромагнитная волна с полем, не зависящим от координат y и z и поляризацией $\vec{\epsilon}$ вдоль оси z, распространяется в x – направлении в слое $|z| < a$. Пространство $|z| > a$ заполняет среда с проводимостью $\sigma = \infty$.

2. Пусть для временного масштаба τ_p изменения поля импульса выполнено условие

$$\tau_p^{-1} \ll \omega_{mn} \qquad (m \neq n), \qquad (2)$$

означающее медленность изменения напряженности $\epsilon(t)$ поля по сравнению с характерными атомными временами. Другими словами, импульс слабо взаимодействует с системой и в этом смысле находится в области прозрачности нелинейной среды. Тогда решение для ρ_{mn} представимо в виде разложения в ряд по малому параметру $(\tau_p\omega_{mn})^{-1}$. При полях, малых по сравнению с $\epsilon_a \sim 10^9$ В/см, явный вид разложения можно получить, исходя из интегральных представлений для линейного и нелинейного вкладов в ρ_{mn} [2]. В случае коллинеарности векторов $\vec{\epsilon}$ и $\vec{\mathcal{P}}$ из (1) для "квадратичной" среды получаем уравнение

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x} + c_2 \epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} + c_1 \frac{\partial^3 \epsilon}{\partial \tau^3} = 0, \tag{3}$$

а для "кубичной" среды – уравнение

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x} + c_3 \epsilon^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} + c_1 \frac{\partial^3 \epsilon}{\partial \tau^3} = 0. \tag{4}$$

Малость дисперсии и нелинейности в данном случае позволила укоротить волновое уравнение (1) и описывать волновой процесс, двигаясь по характеристике $\tau = t - x/_v$. Все параметры уравнений (3), (4) определяются низкочастотным пределом линейных $\chi^{(1)}$ и нелинейных $\chi^{(2),(3)}$ восприимчивостей вещества:

$$v = c(1 + 4\pi\chi^{(1)}(0))^{-1/2}, \quad c_1 = \frac{\pi v}{c^2} \frac{\partial^2 \chi^{(1)}(\omega)}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega = 0}, \quad c_2 = \frac{4\pi v}{c^2} \chi^{(2)}(0),$$

$$c_3 = \frac{6\pi v}{c^2} \chi^{(3)}(0).^{1)}$$

Уравнение (3) представляет собой уравнение Кортевега–де Вриза, а (4) – его модификацию. Оба они относятся к классу нелинейных эволюционных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния [5]. Простейшее решение (3) представляет собой однополярный солитон

$$\epsilon(x, \tau) = \epsilon_0 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\tau - x/v_p}{\tau_p} \right], \tag{5}$$

скорость которого $v_p = 3(\epsilon_0 c_2)^{-1}$, а длительность $\tau_p = (12c_1/\epsilon_0 c_2)^{1/2}$.

Уравнение (4) имеет солитонные решения только в случае $\operatorname{sign}(c_1 c_2) = 1$, простейшее из которых также имеет вид однополярного импульса

$$\epsilon(x, \tau) = \epsilon_0 \operatorname{sech} \left[\frac{\tau - x/v_p}{\tau_p} \right], \tag{6}$$

где $v_p = 6(c_3 \epsilon_0^2)^{-1}$, $\tau_p = \epsilon_0^{-1} (6c_1/c_3)^{1/2}$.

3. Другой предельный случай во взаимодействии импульса со средой связан с ситуацией, прямо противоположной рассмотренной. Пусть в квантовой системе можно выделить два или более уровней, достаточно удаленных от других[2)], причем для указанной группы выполнено условие

$$\tau_p^{-1} \gg \omega_{mn}. \tag{7}$$

Рассматриваемый режим взаимодействия характеризуется возможностью сильного изменения состояния среды, так что отклик не может быть представлен в виде разложения по малому параметру. Проследим это на примере двухуровневой системы. Из уравнений для матри-

---

[1)] Можно показать, что параметры нелинейности $\chi^{(2)}(0)$, $\chi^{(3)}(0)$ связаны с измеряемыми нелинейными восприимчивостями вещества следующим образом: $\chi^{(2)}(0) = 2\chi^{(2)}(0, \omega, -\omega)|_{\omega=0} = 2\chi^{(2)}(2\omega, \omega, \omega)|_{\omega=0}$; $\chi^{(3)}(0) = \frac{4}{3}\chi^{(3)}(3\omega, \omega, \omega, \omega)|_{\omega=0} = 4\chi^{(3)}(\omega, \omega, \omega, -\omega)|_{\omega=0}$.

[2)] Примером такой системы может служить группа колебательных подуровней электронного состояния молекулы.

цы плотности при $m, n = 1,2$ получим следующую систему уравнений

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \omega_{21}^2 P = -\omega_{21}\frac{\mu_{12}}{\hbar} n\epsilon, \qquad \frac{\partial n}{\partial t} = -4\frac{\mu_{12}}{\hbar}\frac{\partial n}{\partial t}\epsilon, \tag{8}$$

где $P = \mathrm{Re}\rho_{12}$, $n = \rho_{22} - \rho_{11}$. Согласно (7), из первого уравнения системы (8) можно исключить слагаемое $\omega_{21}^2 P$. Решение (8) тогда элементарно: в частности, индуцируемая полем плотность тока

$$j = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = j_c \sin\Psi, \qquad j_c = N\mu_{12}\omega_{21}n_0 . \tag{9}$$

Волновое уравнение (1), не допускающее в рассматриваемом сильно нелинейном случае укорочения, сводится к уравнению Синус-Гордон для фазы $\Psi(t) = \frac{2\mu_{12}}{\hbar}\int_{-\infty}^{t}\epsilon dt$:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -n_0\frac{\Omega^2}{c^2}\sin\Psi, \qquad \Omega^2 = \frac{8\pi N\mu_{12}^2\omega_{21}}{\hbar} . \tag{10}$$

В случае поглощающей среды $(n_0 = -1)$ (10) имеет солитонные решения, простейшее из которых описывает однополярный 2π-импульс:

$$\epsilon(x,t) = \frac{\hbar}{\mu_{12}\tau_p}\,\mathrm{sech}\left[\frac{t - x/v_p}{\tau_p}\right], \qquad \frac{1}{v_p^2} = \frac{1}{c^2}(1 + \Omega^2\tau_p^2). \tag{11}$$

В усиливающей среде $(n_0 = +1)$ (10) имеет автомодельное решение [6]:

$$\epsilon(x,t) = xF\left(\frac{2\Omega^2}{c}x\left(t - \frac{x}{c}\right)\right),$$

где $F(z)$ – знакопеременная функция типа волнового пакета. При распространении импульса частота его $\omega(x) = \frac{2\Omega^2}{c}x$ сдвигается $(\sim x)$ в "голубую" область спектра, число фотонов в импульсе при его усилении не меняется.

Уместно указать на взаимодействие короткого импульса с комбинационно активной средой, когда выполнено условие (7): длительность τ_p импульса короче времени ω_{21}^{-1} колебания ВК рассеивающего центра. Отбрасывая в уравнении для КР-осциллятора член с возвращающей силой, пропорциональной ω_{21}^2, в двухуровневом приближении сразу получаем выражение для разности населенностей колебательных уровней [4]: $n(t) = -\cos\Psi(t)$, где $\Psi(t) = \int^{t} \alpha\epsilon^2 dt$, а коэффициент α определяется параметрами рассеивающего центра. Даже не обращаясь к уравнениям для поля, можно сказать, что распространяющийся в ВКР-активной среде импульс может быть 2π-импульсом самоиндуцированной прозрачности $(\Psi(\infty) = 2\pi)$: на переднем фронте энергия импульса уменьшается за счет генерации стоксова излучения, на заднем фронте антистоксовы компоненты возвращают энергию в поле импульса.

Отметим, что условие эквивалентное (7) можно написать в виде $\mu_{12}\epsilon_0/\hbar \gg \omega_{21}$, где $\epsilon_0 = \hbar/\mu_{12}\tau_p$ – характерное для импульса (11) (в данном случае максимальное) значение напряженности поля. В случае монохроматической волны с амплитудой E_0 и частотой $\omega \sim \sim \omega_{21}$ условие применимости закона (9) изменения j от ϵ сводится к малости частоты ω_{21} по сравнению с частотой $\mu_{12}E_0/\hbar$ Раби.

4. Рассмотрим более подробно выражение для тока (9). При малых Ψ $(\sin\Psi \approx \Psi)$ (9) переходит в уравнение Лондонов, связывающее плотность тока j с напряженностью ϵ поля в сверхпроводнике, в общем случае ток (9) относится к току Джозефсона, например, подобный ток индуцируется импульсом, распространяющимся в планарной сверхпроводящей структуре [7]. Известно, что нелинейность джозефсоновского типа уникальна при умножении частоты[3)], интересно поэтому указать на эффективность генерации гармоник током

$$j = j_c \sin\left[\frac{2\mu_{12}}{\hbar\omega} E_0 \sin(\omega t - kx)\right] = j_c \sum_n J_n\left(\frac{2\mu_{12}E_0}{\hbar\omega}\right) \sin(n(\omega t - kx)) ,$$

который индуцируется заданным полем $\epsilon = E_0\cos(\omega t - kx)$. В отличие от случая генерации гармоник в условиях применимости метода ММАФ, когда накапливающиеся взаимодействия могут быть реализованы для фиксированного числа волн (не превышающего обычно двух-трех), ток (9) может возбуждать одновременно со сравнимыми амплитудами число гармоник $\sim 10^2 \div 10^3$. Указанное обстоятельство связано с тем, что коэффициенты разложения j по гармоникам суть функции $J_n(z)$ Бесселя и при определенных значениях параметров n и $z = 2\mu_{12}E_0/\hbar\omega$ спадают весьма медленно: например, при $z \approx n \gg 1$ асимптотика $J_n(z) \approx \approx 0{,}67\, n^{-1/3}$.

5. Таким образом, отказ от приближения ММАФ и описание волновых процессов в терминах реальных полей открывает целый класс новых нелинейных явлений. Их экспериментальное наблюдение вполне доступно современной лазерной технике. Например, для формирования солитонов длительностью $\tau_p \sim 10^{-14}$ с в кристаллах типа $AgGaS_2$, обладающих высокой нелинейностью и широким окном прозрачности [1], необходимы потоки излучения фемтосекундного CO_2-лазера $\sim 10^{11}$ Вт/см^2. Получение джозефсоновского тока (9) в оптическом диапазоне (и описание распространения поля в рамках уравнения Синус–Гордон) требует потоков $\sim 10^{12} \div 10^{13}$ вт/см^2. А при величине потока $\sim 10^{14}$ вт/см^2 становится возможным генерация десятой гармоники неодимового лазера, т. е. излучения с квантом $\hbar\omega \sim 10$ эВ.

Литература

1. *Ахманов С.А. и др.* Оптика фемтосекундных лазерных импульсов, М.: Наука, 1988.
2. *Ахманов С.А., Хохлов Р.В.* Проблемы нелинейной оптики. М.: ВИНИТИ, 1964.
3. *Бломберген Н.* Нелинейная оптика. М.: Мир, 1968.
4. *Belenov E.M. et al.* Soviet Laser Research, 1989, № 2, 145.
5. *Захаров В.Е. и др.* Теория солитонов. М.: Наука, 1980.
6. *Беленов Э.М. и др.* Письма в ЖЭТФ, 1988, 47, 442.
7. *Бароне А., Патерю Дж.* Эффект Джозефсона. М.: Мир, 1984.
8. *Vlaney T.G., Knight D.Y.E.* J. Phys. D: Appl. Phys. 1974, 7, 1882.

Физический институт
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
23 января 1990 г.

[3)] Например, при умножении частоты на джозефсоновском контакте удавалось получать гармоники вплоть до тысячной [8].