Письма в ЖЭТФ, том 89, вып. 1, с. 3 – 7 © 2009 г. 10 января

Динамика солитонов в модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена

Е. Ш. Гутшабаш[1)]

Физический факультет Санкт-Петербургского государственного университета
198504 Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Россия

Поступила в редакцию 10 ноября 2008 г.

Методом матричного преобразования Дарбу построены точные решения классической модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена. Проанализировано поведение одно- и двухсолитонных решений и приведено выражение для N-солитонного решения. Также рассмотрена соответствующая линеаризованная задача.

PACS: 11.10.Ef, 11.10.Lm, 11.40.–q

1. Модель Весса-Зумино-Новикова-Виттена (WZNW) занимает важное место в современной теории поля. Она является обобщением широкого класса сигма-моделей (киральных полей) и возникает, в частности, в низкоэнергетических пределах полевых теорий, физике элементарных частиц и теории струн [1 – 3], и физике конденсированных сред [4]. Помимо этого, ее значение заключается в том, что при определенных редукционных предположениях она сводится к хорошо известным вполне интегрируемым системам – матричному уравнению синус-Гордона и цепочке Тоды [5] (стоит отметить также сделанное недавно наблюдение об интерпретации члена вида WZNW в рамках модели магнетика Ландау-Лифшица [6]).

Наиболее значимые и мощные результаты для модели WZNW получены в рамках конформной теории поля (см., например, [7]), что соответствует некоторому конкретному соотношению (так называемой фикс-пойнт) между двумя константами связи, присутствующими в модели. В то же время, отказ от этого предположения позволяет рассмотреть (на классическом уровне) и другие интересные и важные решения.

В данной работе, опираясь на обнаруженное в [8] представление нулевой кривизны для классической модели WZNW, мы построим ее точные решения и выясним специфику их динамики. Заметим также, что пуассоновы структуры моделей WZNW и главного кирального поля [9] оказываются существенно различными и, в силу этого, а также уже упомянутого значения модели WZNW, ее решения представляют самостоятельный интерес.

2. Уравнение модели имеет релятивистски-инвариантную форму:

$$\partial^\mu(\partial_\mu g g^{-1}) - \varrho\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu g g^{-1}\partial_\nu g g^{-1} = 0, \qquad (1)$$

[1)]e-mail: gutshab@EG2097.spb.edu

или, эквивалентно,

$$g_{tt} - g_{xx} = g_t g^{-1}(g_t + \varrho g_x) - g_x g^{-1}(g_x + \varrho g_t), \qquad (1a)$$

где $g: \mathbb{R}^{1,1} \to SU(2)$, $g = g(x,t)$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t \geq 0$, ϱ – константа связи, μ, $\nu = 0, 1$, $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$. В конусных переменных $\xi = (t-x)/2$, $\eta = (t+x)/2$ уравнение (1) перейдет в следующее:

$$(\hat g_\xi \hat g^{-1})_\eta + (\hat g_\eta \hat g^{-1})_\xi - \varrho[\hat g_\xi \hat g^{-1}, \hat g_\eta \hat g^{-1}] = 0, \qquad (1b)$$

причем $\hat g = \hat g(\xi,\eta)$ и $g(x,t) = \hat g(\frac{t-x}{2}, \frac{t+x}{2})$, $\hat g(\xi,\eta) = g(\eta-\xi, \eta+\xi)$. В терминах левых токов $I_0 = I_0(x,t) = g_t g^{-1}$, $I_1 = I_1(x,t) = g_x g^{-1}$, $I_0, I_1 \in su(2)$, где $su(2)$ – алгебра Ли группы $SU(2)$, уравнение (1) можно переписать как

$$I_{0t} = I_{1x} + \varrho[I_0, I_1], \quad I_{1t} = I_{0x} + [I_0, I_1], \qquad (2)$$

при этом второе равенство представляет собой тождество.

Действие для модели (1) задается в виде

$$W = W_1 + W_2,$$

$$W_1 = \frac{1}{4\varkappa_1^2}\int dx\, dt\, \mathrm{Sp}\,(\partial_i g \partial_j g^{-1})\, \eta_0^{ij}\, \sqrt{-\det(\eta_0)}, \qquad (3)$$

$$W_2 = \frac{\varkappa_2}{24\pi}\int_{\mathcal D} d\tau \epsilon^{ijk}\mathrm{Sp}\,(g^{-1}\partial_i g g^{-1}\partial_j g g^{-1}\partial_k g),$$

где η_0^{ij} – метрика Лоренца, $\mathcal D$ - область интегрирования в пространстве x и t, представляющая собой пленку, натянутую на 2-цикл (подробности и геометрическую интерпретацию см. в [9]), $\varkappa_1$, $\varkappa_2 \in \mathbb{R}$ – константы, при этом $\varkappa_2$ – целое число и

$$\varrho = \varkappa_1^2\varkappa_2/4\pi. \qquad (4)$$

Случай $\varrho = 1$ отвечает уже упомянутой “фикс-пойнт” и поэтому далее не рассматривается.

Уравнения (2) порождаются гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2\varkappa_1^2}\int \mathrm{Sp}(I_0^2 + I_1^2 - I_{0\mathrm{init}}^2 - I_{1\mathrm{init}}^2)\,dx, \quad (5)$$

где $I_{0init} = I_{0\mathrm{init}}(x,t)$, $I_{1\mathrm{init}} = I_{1\mathrm{init}}(x,t) \in su(2)$ – некоторые вакуумные (затравочные, фоновые) решения (2), при этом предполагается, что $|I_{0,1}(x,t) - I_{0,1\mathrm{init}}(x,t)| \to 0$ при $x \to \pm\infty$ достаточно быстро (например, в смысле Шварца), а пуассонова структура задается фундаментальными скобками, реализующими алгебру Каца-Муди:

$$\frac{1}{2\varkappa_1^2}\{I_{0\mu}(x), I_{0\nu}(y)\} =$$
$$= -\epsilon_{\mu\nu\gamma}I_{0\gamma}(x)\delta(x-y) - \varrho\epsilon_{\mu\nu\gamma}I_{1\gamma}(x)\delta(x-y),$$
$$\frac{1}{2\varkappa_1^2}\{I_{0\mu}(x), I_{1\nu}(y)\} = -\epsilon_{\mu\nu\gamma}I_{1\gamma}(x)\delta(x-y) - \delta_{\mu\nu}\delta'(x-y), \quad (6)$$
$$\{I_{1\mu}(x), I_{1\nu}(y)\} = 0.$$

3. Рассмотрим вначале линеаризованный вариант системы (2). Пусть $I_0 = I_{0\mathrm{init}} + J$, $I_1 = I_{1\mathrm{init}} + K$, где $I_{0\mathrm{init}}, I_{1\mathrm{init}}$ – некоторые ее известные (вакуумные) решения (в качестве простейших возьмем $I_{0\mathrm{init}} = i\alpha\sigma_3$, $I_{1\mathrm{init}} = i\beta\sigma_3$, α, $\beta \in \mathbb{R}$ – константы, σ_3 – третья матрица Паули), а $J = J(x,t)$, $K = K(x,t)$ – малые возмущения решений, так что $||J|| \ll ||I_{0\mathrm{init}}||$, $||K|| \ll ||I_{1\mathrm{init}}||$ (здесь под нормой матрицы понимается, например, $||C|| = \sup\,(Cy)$ при $|y| = 1$). После подстановки этих выражений в (2) и линеаризации, будем иметь

$$\begin{aligned} J_t - K_x &= i\varrho\alpha[\sigma_3, K] + i\varrho\beta[J, \sigma_3], \\ K_t - J_x &= i\alpha[\sigma_3, K] + i\beta[J, \sigma_3]. \end{aligned} \quad (7)$$

В частности, решениями этой системы являются функции $J = K = e^{i(\omega t - kx)}\sigma_3$ и $J = K = e^{i(\omega t + kx)}\sigma_3$, ω, $k \in \mathbb{R}$, так что дисперсионное соотношение имеет тот же вид, что и для обычного волнового уравнения:

$$\omega = \pm k, \quad (8)$$

то есть в системе отсутствует дисперсия.

4. Переходя непосредственно к (1b), будем вначале искать решение в виде

$$\hat{g}(\xi,\eta) = \hat{u}(\xi)\hat{v}(\eta), \quad (9)$$

где $\hat{u}$, $\hat{v} \in \mathbb{M}at(2,\mathbb{C})$, $\hat{v}^*\hat{u}^* = \hat{v}^{-1}\hat{u}^{-1}$ и $\det\hat{u}\det\hat{v} = 1$. Подставляя (9) в уравнение (1b), получим, что функции $\hat{u}$, $\hat{v}$ должны подчиняться условиям

$$[\hat{u}^{-1},\ \hat{v}_\eta\hat{v}^{-1}] = 0, \quad [\hat{u}^{-1}\hat{u}_\xi,\ \hat{v}_\eta\hat{v}^{-1}] = 0. \quad (10)$$

В частности, им удовлетворяют четыре решения типа плоских волн (здесь ω, $k \in \mathbb{R}$ – произвольные параметры):

$$g(x,t) = e^{\pm i(kx - \omega t)\sigma_3}, \quad g(x,t) = e^{\pm i(kx + \omega t)\sigma_3}. \quad (11)$$

Уравнение (1a) можно представить в виде условия совместности следующей линейной переопределенной матричной системы дифференциальных уравнений (лаксовой пары):

$$\begin{aligned} \Psi_x(x,t,\lambda) &= U(x,t,\lambda)\Psi(x,t,\lambda), \\ \Psi_t(x,t,\lambda) &= V(x,t,\lambda)\Psi(x,t,\lambda), \end{aligned} \quad (12)$$

где $U, V, \Psi \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$, а матрицы U и V равны [8]:

$$U = a(\lambda)I_0 + b(\lambda)I_1, \quad V = b(\lambda)I_0 + a(\lambda)I_1, \quad (13)$$

причем $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, и

$$a(\lambda) = \frac{1}{2}\left[\frac{1-\varrho}{1-\lambda} - \frac{1+\varrho}{1+\lambda}\right],\ b(\lambda) = \frac{1}{2}\left[\frac{1-\varrho}{1-\lambda} + \frac{1+\varrho}{1+\lambda}\right]. \quad (14)$$

Представление (12)–(14) позволяет, в принципе, использовать метод обратной задачи рассеяния и построить широкий класс точных решений уравнения (1a). С этой целью, ограничившись только дискретным спектром задачи (12), воспользуемся методом матричного преобразования Дарбу [10]. Для этого, прежде всего, перейдем к конусным переменным и произведем в (12) замену спектрального параметра: $\lambda \to (1+\varrho-\mu)/\mu$, $\mu \in \mathbb{C}$. Тогда система (12) перейдет в систему

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_\xi(\xi,\eta,\mu) &= P(\xi,\eta,\mu)\hat{\Psi}(\xi,\eta,\mu), \\ \hat{\Psi}_\eta(\xi,\eta,\mu) &= Q(\xi,\eta,\mu)\hat{\Phi}(\xi,\eta,\mu), \end{aligned} \quad (15)$$

где ($A_0 = A_0(\xi,\eta) = \hat{g}_\xi\hat{g}^{-1}$, $B_0 = B_0(\xi,\eta) = \hat{g}_\eta\hat{g}^{-1}$),

$$P = \mu A_0, \quad Q = \frac{(1-\varrho)\mu}{2\mu - 1 - \varrho}B_0, \quad (16)$$

условие совместности которой эквивалентно (1b).

Введем оператор (I-единичная 2×2 матрица)

$$\mathcal{R} = I - \mu S, \quad (17)$$

где $S \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$ – некоторая матрица, и проверим ковариантность системы (15) относительно преобразования $\hat{\Psi} \to \hat{\Psi}[1] = \mathcal{R}\hat{\Psi}$, $A_0 \to A_0[1]$, $B_0 \to B_0[1]$. В результате несложных преобразований получим следующие "одевающие" соотношения для токов (случай $\varrho = 0$ соответствует модели главного кирального поля [9, 11])

$$A_0[1] = A_0 - S_\xi, \quad A_0[1] = SA_0S^{-1}, \quad (18)$$

$$B_0[1] = SB_0S^{-1} + \frac{2}{1-\varrho}S_\eta S^{-1},\ B_0[1] = B_0 + \frac{1+\varrho}{1-\varrho}S_\eta. \tag{19}$$

где A_0, B_0 – некоторое известное (затравочное) решение уравнения (1b). Тогда для искомого поля $g[1]$ с учетом (15) будем иметь:

$$\hat{g}[1] = \hat{\Psi}[1]_{|\mu=1} = c_1^2\sigma^{(1)}(I-S)\hat{\Psi}_{|\mu=1}\tau^{(1)}, \tag{20}$$

причем из бесследовости матриц токов вытекает, что $\det\hat{\Psi} = \text{const}$ (эту константу удобно считать равной единице), а $c_1^2 = 1/\det(I-S)$ – константа, обеспечивающая требование $\hat{g} \in SU(2)$. Матрицы $\sigma^{(1)}$, $\tau^{(1)} \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$, присутствующие в (20), предполагаются невырожденными и постоянными, и гарантируют сходимость решения к вакуумному (возможность введения таких матриц связана с инвариантностью уравнения (1a) относительно преобразований $g \to \sigma g$, $g \to g\tau$, $g \to \sigma g\tau$).

Для определения матрицы S воспользуемся следующим приемом. А именно, наряду с (15) рассмотрим еще одну лаксову пару вида

$$\Phi_\xi = A_0\Phi\Lambda,\quad \Phi_\eta = (1-\varrho)B_0\Phi\Lambda(2\Lambda - I_{(\varrho)})^{-1}, \tag{21}$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}(\tilde{\lambda}^{(1)}, \tilde{\lambda}^{(2)})$, а $\tilde{\lambda}^{(1)}, \tilde{\lambda}^{(2)}$ – некоторые – пока произвольные – комплексные числа, $I_{(\varrho)} = (1+\varrho)I$. Пусть теперь $\hat{\Phi}$ – некоторое фиксированное решение системы (21), отвечающее выбору $\Lambda = \hat{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$. Тогда можно убедиться, что система (15) инвариантна относительно подстановки

$$S = \hat{\Phi}\hat{\Lambda}^{-1}\hat{\Phi}^{-1}, \tag{22}$$

и, тем самым, одевающие соотношения (18)–(20) оказываются полностью определенными[2)].

Выясним некоторые свойства матрицы S. Для этого положим $I_0 = (i/2)I_{0\alpha}\sigma_\alpha$, $I_1 = (i/2)I_{1\alpha}\sigma_\alpha$, так что $I_0 = -I_0^*$, $I_1 = -I_1^*$ (символ $*$ – операция эрмитова сопряжения) и, кроме того, $\mathrm{Sp}\, I_0 = \mathrm{Sp}\, I_1 = 0$. Из (18), (19) тогда следует, что матрицы S_ξ, S_η также должны быть антиэрмитовыми. Таким образом,

$$(S+S^*)_\xi = 0,\quad (S+S^*)_\eta = 0 \tag{23}$$

и, значит, $S + S^* = S_0(\lambda)$, где $S_0(\lambda)$ – произвольная матрица, причем $S_0(\lambda) = S_0^*(\lambda)$ и

$$\mathrm{Sp}\, S_0(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{(1)}} + \frac{1}{\lambda^{(2)}} + \frac{1}{\bar{\lambda}^{(1)}} + \frac{1}{\bar{\lambda}^{(2)}}. \tag{24}$$

[2)] Преобразование, аналогичное (17), (22), было недавно использовано при построении точного решения в двумерной вихревой гидродинамике идеальной жидкости [12]. Отметим, также, что матричное преобразование Дарбу (вида (22)) было применено в [13] при интегрировании самодуальных уравнений Янга-Миллса

Из требования совместности порознь (18) и (19) будем иметь:

$$S_\xi S = [A_0, S],\ (1+\varrho)S_\eta S - 2S_\eta = (1-\varrho)[S, B_0]. \tag{25}$$

Принимая во внимание (22) и полагая $L = [(1+\varrho)S - 2I]^{-1}$, найдем два полезных обобщенных "сплетающих" соотношения:

$$[A_0, S]S^{-1} = -S^{*-1}[A_0,\ S^*],\quad [B_0, S]L = L^*[S^*, B_0]. \tag{26}$$

Ясно, что формулы (18)–(20) носят итерационный характер, и поэтому после N-кратного повторения преобразования (17) мы получим N-солитонное решение:

$$A_0[N] = \prod_{i=1}^{N} S[i]A_0S[i]^{-1},\ B_0[N] = B_0 - \frac{1+\varrho}{1-\varrho}\sum_{i=1}^{N} S_\eta[i], \tag{27}$$

$$\hat{g}[N] = \left(\prod_{i=1}^{N} c_i^2\sigma^{(i)}(I - S[i])\right)\hat{\Psi}\prod_{i=1}^{N}\tau^{(i)}, \tag{28}$$

где $c_i^2 = 1/\det(I - S[i])$, а под символами произведений в (27), (28) понимается упорядоченное произведение матричных сомножителей.

Возвращаясь к случаю однократных одевающих соотношений, построим явные решения уравнения (1). Для этого предварительно отметим, что из условий $\bar{A}_0 = \sigma_2A_0\sigma_2$, $\bar{B}_0 = \sigma_2B_0\sigma_2$, следует инволюция на решение системы (21):

$$\Phi(\lambda) = \sigma_2\bar{\Phi}(\lambda)\sigma_2, \tag{29}$$

которая выполняется, если и только если матрица $\Lambda = \Lambda(\boldsymbol{\lambda})$, где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$ – комплексный вектор, имеет вид $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \bar{\lambda}_1)$, $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. Тогда с учетом (24) и в силу произвольности S_0 можно считать, что

$$S + S^* = \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\bar{\lambda}_1}\right)I. \tag{30}$$

Выберем простейшее затравочное решение уравнения (1a) в виде классического "вращающегося и спирального (геликоидального) вакуума", например, второе из решений (11)[3)] так, что при этом $A_0 = i(\omega + k)\sigma_3$, $B_0 = i(\omega - k)\sigma_3$, а в качестве соответствующего решения $\Psi = \Psi(x,t,\mu)$ возьмем

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 & ie^{-\bar{\varphi}(x,t,\mu)} \\ ie^{-\varphi(x,t,\mu)} & 0 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

[3)] Граничная задача с такого рода стационарным вакуумом для нелинейной $O(3)$ сигма-модели (двумерного изотропного ферромагнетика Гейзенберга) методом обратной задачи была решена в [14, 15].

где

$$\varphi(x,t,\mu) = it\left[\mu(\omega+k) + \frac{\mu(1-\varrho)(\omega-k)}{2\mu-1-\varrho}\right] - -ix\left[\mu(\omega+k) - \frac{\mu(1-\varrho)(\omega-k)}{2\mu-1-\varrho}\right].$$

Интегрируя (21), найдем:

$$\hat{\Phi}(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} e^{\phi_1} & ie^{-\bar{\phi}_1} \\ ie^{-\phi_1} & e^{\bar{\phi}_1} \end{pmatrix}, \quad (32)$$

где (δ_1 – произвольная вещественная постоянная)

$$\phi_1 = i\lambda_1(\omega+k)\xi + i\frac{(1-\varrho)(\omega-k)}{2\lambda_1-(1+\varrho)}\eta + \frac{\delta_1}{2}. \quad (33)$$

Матрица S, согласно (22), тогда равна

$$S = \frac{1}{2\cosh(\phi_1+\bar{\phi}_1)}\times \times\begin{pmatrix} \frac{e^{\phi_1+\bar{\phi}_1}}{\lambda_1} + \frac{e^{-(\phi_1+\bar{\phi}_1)}}{\bar{\lambda}_1} & -ie^{\phi_1-\bar{\phi}_1}(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\bar{\lambda}_1}) \\ ie^{-(\phi_1-\bar{\phi}_1)}(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\bar{\lambda}_1}) & \frac{e^{\phi_1+\bar{\phi}_1}}{\bar{\lambda}_1} + \frac{e^{-(\phi_1+\bar{\phi}_1)}}{\lambda_1} \end{pmatrix} \quad (34)$$

и, очевидно, удовлетворяет условию (24).

Введем обозначения ($g \in SU(2)$)

$$g[1] = \begin{pmatrix} g_{11}[1] & -\bar{g}_{21}[1] \\ g_{21}[1] & \bar{g}_{11}[1] \end{pmatrix}.$$

Используя (20) и переходя к переменным x и t, окончательно получим односолитонное решение ($c_1 = |\lambda_1|/(|\lambda_1|-1)$):

$$g_{11}[1](x,\,t) = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_1|-1}\left[1 - \frac{\cosh(\phi_1+\bar{\phi}_1+\nu_1)}{|\lambda_1|\cosh(\phi_1+\bar{\phi}_1)}\right]e^{-\varphi}, \quad (35)$$

$$g_{21}[1](x,\,t) = \frac{\lambda_{1I}(|\lambda_1|-1)}{|\lambda_1|^3}\frac{1}{\cosh(\phi_1+\bar{\phi}_1)}e^{\phi_1-\bar{\phi}_1}\,e^{-\varphi},$$

где $\varphi = i(kx-\omega t)$, $\lambda_1 = \lambda_{1R} + i\lambda_{1I} = |\lambda_1|e^{i\nu_1}$, $\nu_1 = \arg\lambda_1$, и при этом

$$\phi_1 + \bar{\phi}_1 = 2\sqrt{(p_1-\bar{p}_1)(q_1-\bar{q}_1)}\,\frac{x-v_1t-x_0}{\sqrt{1-v_1^2}},$$

$$\phi_1-\bar{\phi}_1 = it(p_1+q_1+\bar{p}_1+\bar{q}_1) - ix(p_1-q_1+\bar{p}_1-\bar{q}_1), \quad (36)$$

$$p_1 = \frac{\lambda_1(\omega+k)}{2}, \qquad q_1 = \frac{(1-\varrho)(\omega-k)}{2[2\lambda_1-(1+\varrho)]},$$

$p_1, q_1 \in \mathbb{C}$. Очевидно, что при $x \to \pm\infty$ $g[1] \to g_{\text{init}}$, где g_{init} – затравочное решение уравнения (1a) (второе из (11)), то есть на больших расстояниях построенное решение сходится к фоновому (аналогично, после ряда вычислений можно убедиться, что матрицы $I_0[1]$, $I_1[1]$ также обладают требуемыми асимптотиками при $x \to \pm\infty$). С физической точки зрения, (35) представляет собой уединенную волну с амплитудой компоненты $g_{21}[1]$, равной $\lambda_{1I}(|\lambda_1|-1)/|\lambda_1|^3$. Эта волна локализована вдоль направления $x(t) = x_0 + v_1t$, где $x_0 = \delta_1/i(p_1-q_1-\bar{p}_1+\bar{q}_1)$ – положение центра инерции солитона при $t=0$, $v_1 = (p_1+q_1-\bar{p}_1-\bar{q}_1)/(p_1-q_1-\bar{p}_1+\bar{q}_1)$ – скорость, а величина $2\sqrt{(p_1-\bar{p}_1)(q_1-\bar{q}_1)}$ имеет смысл его массы[4)]. Кроме прямолинейного и равномерного движения, решение (35) описывают также осцилляции компоненты $g_{11}[1]$ по x и по t с частотами k и ω и компоненты $g_{21}[1]$ по x и t с частотами $p_1-q_1+\bar{p}_1-\bar{q}_1+k$ и $p_1+q_1+\bar{p}_1+\bar{q}_1+\omega$, соответственно.

Перейдем к двухсолитонному решению, воспользовавшись соотношением (28). С учетом (31), (35) после некоторых вычислений будем иметь:

$$g_{11}[2] = \frac{|\lambda_2||\lambda_1|}{(|\lambda_2|-1|)(|\lambda_1|-1)}\Delta_2\Delta_1 e^{-\varphi} - -\frac{\lambda_{2I}\lambda_{1I}(|\lambda_2|-1)(|\lambda_1|-1)}{|\lambda_2|^3|\lambda_1|^3}\frac{e^{-(\phi_2-\bar{\phi}_2)+\phi_1-\bar{\phi}_1}}{\cosh\Phi_2\cosh\Phi_1}e^{\varphi}, \quad (37)$$

$$g_{21}[2] = i\left\{\frac{\lambda_{2I}(|\lambda_2|-1)}{|\lambda_2|^3}\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_1|-1}\Delta_1\frac{e^{\phi_2-\tilde{\phi}_2}}{\cosh\Phi_2}e^{-\varphi} + +\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_2|-1}\frac{\lambda_{1I}(|\lambda_1|-1)}{|\lambda_1|^3}\Delta_2\frac{e^{\phi_1-\bar{\phi}_1}}{\cosh\Phi_1}e^{\varphi}\right\},$$

$$\Delta_i = 1 - \frac{\cosh\chi_i}{|\lambda_i|\cosh\Phi_i}.$$

Здесь $\Phi_i = \phi_i + \bar{\phi}_i$, $\chi_i = \Phi_i + \nu_i$, $\nu_i = \arg\lambda_i$, $i = 1,\,2$, выражение для ϕ_2 получается из (33) заменой λ_1 на λ_2 и δ_1 на δ_2.

Решение (37), как и (35), при $x \to \pm\infty$ сходится к фоновому. Отметим также появление в спектре возбуждений модели гармоники, кратной основной[5)]. В случае общего положения, то есть когда $v_1 \neq v_2$ (выражение для скорости v_2 получается заменой в v_1 λ_1 на λ_2) формулы (37) описывают связанное состояние двух солитонов.

Подчеркнем еще один важный момент. С этой целью в решении (37) рассмотрим возможность, когда в ситуации общего положения, например, $v_1 = 0$,

4) При этом для вещественности этой величины, как нетрудно проверить, должно выполняться условие $(\omega^2-k^2)(1-\rho) < 0$. В отличие от решения, полученного методом одевания в [11] для модели главного кирального поля, тахионные состояния здесь запрещены, поскольку в этом случае решение не будет сходиться к вакуумному.

5) Аналогичный эффект был получен, например, при интегрировании цилиндрически-симметричной модели магнетика Гейзенберга [16].

то есть первый из солитонов не меняет своего первоначального положения, хотя и подвержен временным осцилляциям. С учетом приведенных выше выражений это приводит к соотношению

$$\omega + k = 2(1-\varrho)(\omega - k)\frac{1}{|2\lambda_1 - (1+\varrho)|^2}, \qquad (38)$$

которое мы будем рассматривать как уравнение относительно λ_{1I}. Решая его, получим:

$$\lambda_{1I} = \\ = \pm\sqrt{\frac{(1-\varrho)(\omega-k)}{2(\omega+k)} + \lambda_{1R}(1+\varrho) - \frac{1}{4}(1+\varrho)^2 - \lambda_{1R}^2}. \qquad (39)$$

Можно показать (в предположении, что подкоренное выражение положительно), что полученное в этом случае решение $g[2]$ при $x \to \pm\infty$ не выходит из требуемого класса решений. Таким образом, в рамках модели WZNW мы получаем "невылет" одного из солитонов из области взаимодействия (самосогласованного потенциала). Очевидно, что для N-солитонного решения при $N \geq 3$ это явление может осуществляться как для одного солитона, так и для пар солитонов: если первому солитону отвечает собственное значение λ_1, где значение λ_{1I} определяется соотношением (39), то, положив $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$, мы получим $v_1 = v_2 = 0$, то есть "невылет" пары. По-видимому, ранее такое явление в моделях, описываемых вполне интегрируемыми системами, не обсуждалось.

Автор выражает глубокую признательность проф. П.П. Кулишу за многочисленные плодотворные дискуссии и поддержку.

1. S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields. Modern Applications*, Vol.2. Cambr. Univer. Press, 1996.
2. С. В. Кетов, *Введение в квантовую теорию струн и суперструн*, Новосибирск, Наука, 1991.
3. E. Abdalla, M. C. B. Abdalla, and K. D. Rothe, *Non-perturbative methods in two- dimensional quantum field theory*, World Scientific, 1991.
4. A. M. Tsvelik, *Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics*, Cambr. Univer. Press, 2003.
5. L. Feher, L. O'Raifeartaign, P. Ruelle et al., Phys. Rep. **222**, 1 (1992).
6. A. Melikyan, A. Pinzul, V. O. Rivelles et al., hep-th/0808.2489v1.
7. V. Knizhnik and A. B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B **247**, 83 (1984).
8. S. G. Rajeev, A. Stern, and P. Vitale, Phys. Lett. B **388**, 769 (1996).
9. Л. А. Тахтаджан, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, М.: Наука, 1986.
10. V. Matveev and M. Salle, *Darboux Transformation and Solitons*, Springer-Verlag, 1991.
11. В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, ЖЭТФ **74**, 1953 (1978).
12. Е. Ш. Гутшабаш, Записки научных семинаров ПОМИ **335**, 119 (2006).
13. Дж. Дж. Ниммо, К. Р. Джилсон, Й. Охта, ТМФ **122**, 284 (2000).
14. Е. Ш. Гутшабаш, В. Д. Липовский, ТМФ **90**, 175 (1992).
15. Г. Г. Варзугин, Е. Ш. Гутшабаш, В. Д. Липовский, ТМФ **104**, 513 (1995).
16. Е. Ш. Гутшабаш, Письма в ЖЭТФ **73**, 317 (2001).