

Правило Ландау – Станюковича и параметр автомодельности сходящихся ударных волн

В. Ц. Гурович, Л. Г. Фел

Department of Physics, Technion, 32000 Haifa, Israel

Department of Civil Engineering, Technion, 32000 Haifa, Israel

Поступила в редакцию 20 ноября 2008 г.

После переработки 3 декабря 2008 г.

В задачах автомодельности второго рода параметр подобия α определяется численным расчетом вместе с решением основных уравнений. Правило Ландау – Станюковича (Л-С) указывает приближенное значение α , близкое к фактическому и подлежащее уточнению в последующем численном расчете. Установление статуса оценки Л-С и развитие указанного подхода позволяют для заданного показателя адиабаты γ найти верхнюю и нижнюю границы $\alpha(\gamma)$. Малость интервала между ними определяет α , отличающее от истинной на 0.01–0.02. При этом задача автомодельности второго рода практически сводится к самоподобию первого рода, в котором значение α до решения уравнений следует из анализа размерностей основных физических параметров задачи.

PACS: 47.40.–x, 52.80.Qj

1. Введение. Автомодельные решения для сходящихся ударных волн (УВ) были исследованы Гудерлеем [1] и независимо Ландау и Станюковичем (Л-С) (см. в [2]). Две причины определяют важность этой проблемы и постоянный к ней интерес. Во-первых, движение среды сопровождается неограниченной самофокусировкой плотности энергии, нашедшей применение во многих прикладных проблемах. В последние годы задача Гудерлея используется для исследования процессов в релятивистской астрофизике и задачах термоядерного синтеза [3].

Во-вторых, задача для сходящихся УВ является первым примером автомодельности второго рода. В отличие от самоподобия первого рода, параметр автомодельности здесь не определяется до решения системы уравнений для представителей, а находится в процессе самого численного решения. Это заставляет для каждого значения показателя адиабаты γ и идеального газа определять численно с высокой точностью параметр автомодельности $\alpha(\gamma)$.

Ландау и Станюкович [4] поставили задачу оценки α без использования решения этой задачи. Как отмечено в монографии [4], предложенная оценка весьма близка к фактической. Ниже в данной работе определяется статус этого правила Л-С. Дальнейшее исследование задачи приводит к нижней и верхней границам для $\alpha(\gamma)$ в случае цилиндрических и сферических УВ. Как и в правиле Л-С, при этом не используются численные решения уравнений для представителей. Близость этих оценок к истинным значениям параметра автомодельности будет указана ниже.

2. Основное уравнение динамики УВ и оценка Ландау – Станюковича. Радиус фронта сходящейся $R(t)$ ударной волны меняется по закону: $R(t) = A(-t)^\alpha$, где $A = \text{const}$. Время коллапса фронта соответствует моменту $t = 0$. Автомодельная переменная определяется соотношением $\xi = r/R(t)$. Здесь r – радиальная координата в сферическом либо цилиндрическом случаях. Переменная ξ изменяется в интервале $1 \leq \xi < \infty$. Нижняя граница соответствует фронту ударной волны. Далее все обозначения полностью соответствуют книге Ландау и Лифшица [2]. Основное уравнение для исследования задачи есть уравнение для представителя квадрата скорости звука $Z(\xi)$ как функции от представителя скорости $V(\xi)$:

$$\frac{dZ}{dV} = \frac{Z}{1-V} \times \left\{ \frac{K(V, Z)}{L(V, Z)} \left[\frac{2}{\alpha} - (J(\gamma - 1) + 2)V \right] + (\gamma - 1) \right\}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + \beta.$$

Здесь параметр $J = 2, 3$ для цилиндрической и сферической УВ и

$$\begin{aligned} K(V, Z) &= Z - (1 - V)^2; \quad L(V, Z) = \\ &= Z \left(JV - \frac{2\beta}{\gamma} \right) - V(1 - V)(1 + \beta - V). \end{aligned} \quad (2)$$

Граничные условия для уравнения (1) задаются на фронте УВ при $\xi = 1$:

$$V(1) = V_r(\gamma) = \frac{2}{\gamma+1} < 1; \quad Z(1) = Z_r(\gamma) = \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}. \quad (3)$$

Эти соотношения следуют из ударной адиабаты сильной УВ для идеального газа. Анализ решений (1) показывает (см. [2, 5]), что при $V \rightarrow 0$ значение $Z(V) \rightarrow V^2$, и в интервале изменения аргумента ($0 \leq V \leq V_r$) решение $Z(V)$ не имеет экстремальных точек. Примеры численных реализаций решения для различных значений адиабаты γ и параметра J приведены на рис.1. Отсюда, а также из анализа

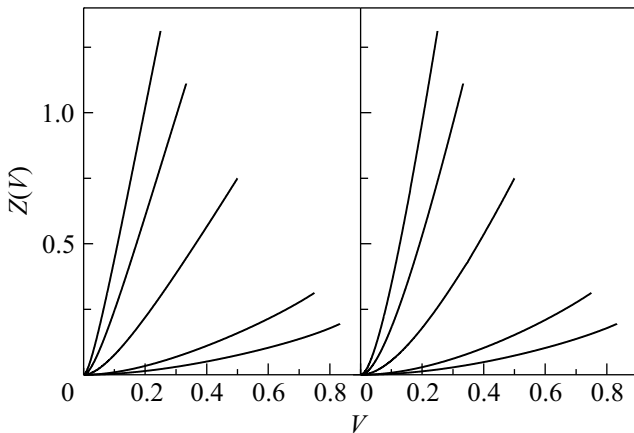


Рис.1. Численные решения уравнения (1) для цилиндрических и сферических УВ с различными адиабатическими постоянными: $\gamma_1 = 1.4$, $\gamma_2 = 1.66$, $\gamma_3 = 2$, $\gamma_4 = 3$

решений следует, что производная dZ/dV монотонно падает с уменьшением аргумента V (см. рис.1).

Решение $Z(V)$ на плоскости Z, V при стремлении аргумента к нулю должно с необходимостью пройти через особую точку (седло) с координатами V_S, Z_S , в которой выполняются условия

$$K(V_S, Z_S) = L(V_S, Z_S) = 0. \quad (4)$$

В эти два уравнения, согласно (2), входят три неизвестных величины: Z_S, V_S, α . При известном решении уравнения (1) $Z(V)$ из уравнений (4) исключается Z_S , и система однозначно определяет неизвестные параметры V_S, α . Но аналитическое решение (1) – не известно. Численная реализация (1) при заданных граничных условиях осуществляется перебором параметра α до тех пор, пока кривая $Z(V)$, выйдя из точки Z_r, V_r , пройдет через седло Z_S, V_S и устремится к нулю при $V \rightarrow 0$. Для определения начального значения α Ландау и Станюкович предложили следующее правило.

Из системы алгебраических уравнений (4) исключается Z_S , что дает квадратное уравнение для V_S :

$$\alpha\gamma(J-1)V_S^2 - V_S[\alpha(\gamma J-2) + (2-\gamma)] + 2(1-\alpha) = 0. \quad (5)$$

Далее требуется, чтобы это квадратное уравнение имело для V_S совпадающие корни. При этом

$$V_{LS} = \frac{\alpha_{LS}(J\gamma-2) + (2-\gamma)}{2\gamma(J-1)\alpha_{LS}},$$

$$\alpha_{LS} = \frac{J\gamma^2 + 2J\gamma + 4 - 6\gamma + 2\sqrt{2}(J-1)\gamma^{3/2}}{(J\gamma+2)^2 - 8\gamma}. \quad (6)$$

Это значение α , как указывалось выше, близко к фактическому.

Для определения статуса параметра α_{LS} используем уравнение (5) как определение функции $\alpha(V)$ при $0 \leq V \leq V_r$:

$$\alpha(V) = \frac{2 + (\gamma-2)V}{2 + V(J\gamma-2) - V^2\gamma(J-1)}; \quad \alpha(V) \leq 1. \quad (7)$$

При условии $J > 1$ эта функция имеет минимум при $V = V_m$, где $V_m \equiv V_{LS}$. Отсюда следует, что правило Л-С при заданных γ, J указывает минимальное из возможных значений α , а его уточнение в процессе “пристрелки” должно идти в сторону увеличения α_m . Формулы (6) могут быть представлены в явном виде как функции J, γ :

$$V_m(\gamma) = \frac{1}{1 + \sqrt{\gamma/2}}; \quad \alpha(V_m) = \frac{2 + 2\sqrt{2\gamma} + \gamma}{2 + \sqrt{2\gamma} + J\gamma} < 1. \quad (8)$$

Точность оценки Л-С будет указана ниже. Здесь отметим, что при некоторых значениях показателя адиабаты γ значение скорости $V_m(\gamma)$ становится больше значения $V_r(\gamma)$ – скорости на фронте УВ. Согласно (8), (3), это происходит при $\gamma > \gamma_r$, где нижняя граница находится из равенства указанных скоростей: $\gamma_r = 2 + \sqrt{3}$. В этом случае точка минимума $\alpha(V)$ находится вне области решения $Z(V)$ и может быть указана более точная оценка $\alpha(\lambda)$.

3. Верхняя и нижняя границы для параметра автомодельности. Наличие минимума функции (7) и указанные выше общие свойства решений уравнения (1) для всех J и γ позволяют без использования численной реализации $Z(V)$ указать верхнюю и нижнюю границы $\alpha(J, \gamma)$. Координата особой точки V_s (см. рис.2) находится из пересечения параболы $Z_K = (1-V)^2$ и решения уравнения (1). В этой точке обращается в нуль выражение $K(V_S, Z_S)$, а выбор, согласно (7), $\alpha(V_S)$ обращает в нуль $L(V_S, Z_S)$.

Прямая линия $Z_3 = (Z_r/V_r)*V$, соединяющая точку V_r, Z_r с началом координат ($Z = 0; V = 0$), в

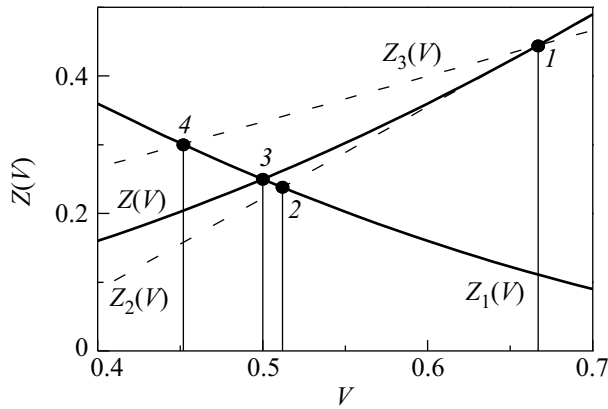


Рис.2. Интегральная кривая $Z(V)$ уравнения (1) и парабола $Z_1(V) = (1 - V)^2$ пересекаются в седловой точке 3 с координатами (V_s, Z_s) . Другие две прямые заданы уравнением $Z_3(V) = (Z_r/V_r) \cdot V$ и касательной $Z_2(V)$ к $Z(V)$ на фронте YB (точка 1)

интервале изменения аргумента решения будет находиться выше решения $Z(V)$. Это определяется отсутствием в решении экстремальных точек и монотонным уменьшением производной dZ/dV от максимального значения при $V = V_r$ до нуля при $V = 0$. Ее пересечение с параболой (координата точки 4 на оси $0, V$, рис.2) реализуется при

$$V_L = \frac{2 + \gamma + \gamma - \sqrt{\gamma^4 + 2\gamma^3 + \gamma^2 - 4\gamma}}{2(1 + \gamma)} \quad (9)$$

и используется как оценка снизу для значения V_S .

Для оценки сверху V_S (рис.2) используется касательная к решению на фронте волны: $Z_2(V) = Z_r + P(V_r, Z_r, V) \cdot (V - V_r)$. Согласно указанным свойствам решения уравнения (1), эта прямая лежит ниже $Z(V)$, а ее пересечение с параболой будет давать координату V_u , являющуюся верхней оценкой V_S . Значение производной к решению при V_r следует из (1), (2):

$$P(V_r, Z_r, V) = \frac{Z_r}{1 - V_r} \left\{ \frac{K(V_r, Z_r)}{L(V_r, Z_r)} [2\beta(V) + 2 - (J(\gamma - 1) + 2)V_r] + (\gamma - 1) \right\}, \quad (10)$$

$$L(V_r, Z_r) = Z_r \left(JV_r - \frac{2\beta(V)}{\gamma} \right) - V_r[(1 - V_r)[1 + \beta(V) - V_r]. \quad (11)$$

Все величины с индексом r определены на фронте волны параметром γ (см. (3)). Значение вспомогательного параметра $\beta = 1/\alpha - 1$ определяется значением V – координатой пересечения касательной с

параболой (рис.2, точка 2). В соответствии с формулой (7) имеем

$$\beta(V) = \frac{V\gamma(J - 1)(1 - V)}{2 + V(\gamma - 2)}, \quad (12)$$

а само значение $V = V_u$ определяется при подстановке в уравнение касательной $Z = (1 - V)^2$ для параболы

$$(1 - V)^2 - Z_r = P(V_r, Z_r, V) \cdot (V - V_r). \quad (13)$$

Подстановка в это уравнение выражений (10)–(12) дает одно уравнение четвертой степени для определения $V = V_u$. Оно позволяет найти аналитически все четыре корня уравнения. Два из них – комплексные, два – положительные и действительные. Из них только один попадает в интересующий нас интервал: $0 < V_u < 1$. На рисунках ниже используется его численное представление $V_u(J, \gamma)$. Подстановка этого значения в (7) определяет соответствующее значение показателя автомодельности $\alpha(V_u)$. На рис.3 приведены нижние и верхние границы для значений

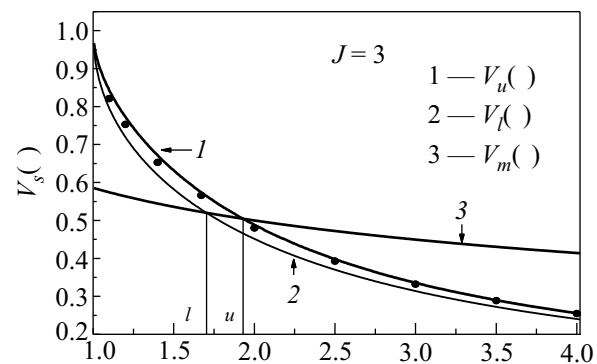


Рис.3. Верхняя, $V_u(\gamma)$, и нижняя $V_l(\gamma)$ границы седловой точки $V_s(\gamma)$ для сферической ударной волны. Кривая $V_m(\gamma)$ пересекает две другие кривые при γ_l и γ_u . Численные решения уравнения (1) указаны точками

$V_S(\gamma, J = 3)$. Указано также значение $V_m(\gamma)$ согласно формуле (8). Для анализа границ параметра автомодельности α важны точки пересечения $V_L(\gamma)$ и $V_u(\gamma)$ с этой кривой. Для первой из них пересечение происходит при $\gamma_L = 1.70287$, для второй – при $\gamma_u = 1.92988$.

Немонотонная зависимость $\alpha(V)$ (см. (7)) дает правила определения верхней и нижней границ для истинного $\alpha(V_S)$ с помощью $\alpha(V_l)$ и $\alpha(V_u)$. Если для V_S всегда выполняются неравенства $V_l(\gamma) < V_S(\gamma) < V_u(\gamma)$, то для $\alpha(V_S)$ это не так.

На рис.4 приведены зависимости $\alpha(V)$ для значений $\gamma = 1.2$ и 3. На первой из них точками B с

соответствующими индексами показаны значения параметра автомодельности, определяемого из (7) значениями скорости V с этими же индексами. Для верхней кривой видно, что истинное значение α_S ограничено сверху значением α_u и снизу значением $\alpha > \alpha_l > \alpha_m$. Для нижней кривой истинное значение α_S находится левее α_m . При этом выполняются неравенства: $\alpha_l > \alpha_S > \alpha_u > \alpha_m$. Теперь верхняя и нижняя оценки для α_S меняются местами. Отсюда следуют правила для нижней и верхней границ α_S при различных γ :

- 1) $1 \leq \gamma \leq \gamma_l$; $\alpha(V_l) \leq \alpha_S \leq \alpha(V_u)$,
- 2) $\gamma_l \leq \gamma \leq \gamma_e$; $\alpha(V_m) \leq \alpha_S \leq \alpha(V_u)$,
- 3) $\gamma_e \leq \gamma \leq \gamma_u$; $\alpha(V_m) \leq \alpha_S \leq \alpha(V_l)$,
- 4) $\gamma_u \leq \gamma \leq \infty$; $\alpha(V) \leq \alpha_S \leq \alpha(V)$.

В эти неравенства введено еще одно значение адиабаты γ_e , при котором $\alpha_u(\gamma_e) = \alpha_l(\gamma_e)$. Для $J = 2, 3$ имеем $\gamma_e = 1.83208; 1.81661$ и $\alpha(\gamma_e) = 0.80734; 0.67767$.

На рис.5 приведены границы параметра автомодельности для сферической УВ. Точками указаны

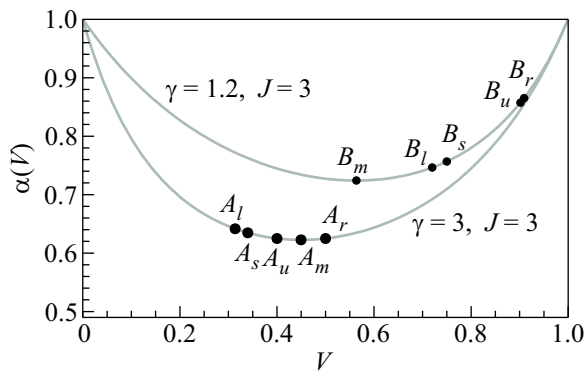


Рис.4. Графики $\alpha(V)$ для параметров: $\gamma = 1.2, J = 3$ и $\gamma = 3, J = 3$. Последовательность точек на каждой кривой соответствует последовательности специальных значений V : V_s, V_r, V_m, V_l и V_u , заданных в тексте

некоторые значения α , полученные из численного решения уравнения (1). Заметим, что в процентах величина $|\alpha_u(\gamma) - \alpha_l(\gamma)|/\alpha_u(\gamma)$ для указанного на рис.5 интервала значений γ меняется от 3.5% при $\gamma = 1.1$ до нуля для γ_e и далее возрастает до 1% при $\gamma = 4$. Истинные значения α_S находятся внутри этого интервала и отличаются от граничных значений еще меньше. Легко видеть, что рассчитанные из решения (1) параметры автомодельности “прижимаются” снизу и сверху к границе $\alpha_u(\gamma)$. Для $J = 2, \gamma = 7/5$

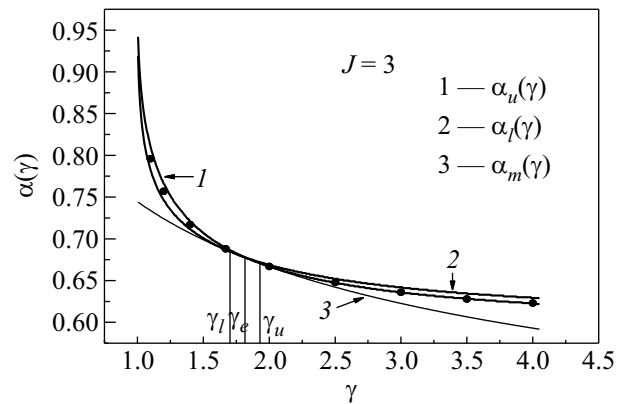


Рис.5. Верхняя и нижняя границы $\alpha_m(\gamma), \alpha_u(\gamma)$ и $\alpha_l(\gamma)$ параметра автомодельности $\alpha_S(\gamma)$ для сферической УВ. Численные решения уравнения (1) указаны точками

полученное с высокой точностью численное значение $\alpha_S = 0.835217$ (см. [6]), значение $\alpha_u = 0.83754$. Для $\gamma = 4$ имеем $\alpha_S = 0.62286$, значение $\alpha_u = 0.62269$.

4. Выводы. Показано дальнейшее развитие правила Л-С, оно позволяет с точностью до 1–2% найти параметр автомодельности и практически приблизить автомодельность второго рода к первому.

Приведенный анализ позволяет понять высокую точность предсказания α_S в модели Уизема [7] и работе [6]. Используемые там модельные функции близки к истинному решению (1) и дают весьма точные значения α . Для оценки точности этих α следует рассмотреть их положение внутри указанных границ параметра автомодельности.

В последующие годы был рассмотрен ряд автомодельных обобщений задачи Гудерлея. К ним относятся сходящаяся УВ, распространяющаяся по газу с неоднородной плотностью; УВ для идеального газа, содержащего “пылевидные” частицы; волна с учетом теплового излучения с фронта УВ (ссылки см. в [8]). Укажем также задачу Зельдовича о движении газа под действием кратковременного удара [5]. Все они относятся к автомодельности второго рода, в которой уравнения имеют особую точку, а параметр автомодельности α определяется методом “пристрелки”. Использование рассмотренного выше подхода для определения α требует качественного анализа формы решений и построения мажорирующих функций для истинных решений в каждой задаче. Целесообразность проведения такого исследования указана рецензентом.

Авторы благодарят за обсуждения Я.Е. Красика и А.А. Старобинского.

1. G. Guderley, Luftfahrtforschung **19**, 302 (1942).

2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, М.: Наука, 1986.
3. С. R. Evans and J. S. Coleman, arXiv: gr-qc/94002041 v1 23 Feb. 1994.
4. К. П. Станюкович, *Неустановившиеся движения сплошной среды*, М.: Гостехиздат, 1955.
5. Я. Б. Зельдович и Ю. П. Райзер, *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*, М.: Наука, 1966.
6. G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, John Willey and Sons, Inc, NY, 1974, p. 261.
7. V. Ts. Gurovich, A. Grinenko, and Y. E. Krasik, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 124503 (2007).
8. J. P. Vishwakarma and Subhash Vishwakarma, *Physika Scripta* **72**, 218 (2005); T. Hirschler and H. Steiner, *Fluid Dynamics Research* **32**, 61 (2003); T. Hirschler and W. Gretler, *Acta Mechanica* **154**, 159 (2002).