

Сумматор на троичных базовых элементах для квантового компьютера

В. Е. Зобов¹⁾, Д. И. Пехтерев

Институт физики им. Л.В. Киренского Сибирского отд. РАН, 660036 Красноярск, Россия

Сибирский федеральный университет, 660041 Красноярск, Россия

Поступила в редакцию 30 декабря 2008 г.

После переработки 2 февраля 2009 г.

Предложена схема из квантовых элементарных логических операторов на кутритах для сумматора в троичной системе счисления. Найдена последовательность импульсов радиочастотного магнитного поля для его реализации методом ядерного магнитного резонанса на цепочке квадрупольных ядер со спином $I = 1$. Выполнено численное моделирование работы сумматора.

PACS: 03.67.Lx

Введение. Троичная система счисления [1, 2] – позиционная система счисления с основанием 3. Существует в двух вариантах: несимметричная (цифры 0, 1, 2 или 0, –1, –2) и симметричная (цифры $\bar{1}$, 0, 1, здесь и далее $\bar{1}$ означает –1). В симметричной системе троичное число записываем в виде $(A_n \dots A_3 A_2 A_1)$, где $A_n = \{\bar{1}, 0, 1\}$ – вычислительный базис. Связь троичного числа с десятичным:

$$A = A_n 3^{n-1} + \dots + A_3 3^2 + A_2 3^1 + A_1 3^0. \quad (1)$$

Симметричная система позволяет изображать отрицательные числа, не используя отдельный знак минуса и поэтому наиболее экономна с точки зрения представления чисел. Она обладает многими другими достоинствами [2, 3]. Правила суммирования в троичной логике двух одноразрядных чисел А и В [1] представлены в табл. 1.

Таблица 1
Сложение двух троичных чисел А и В

| В\А | –1 | 0 | 1 |
|-----|------|----|------|
| –1 | –1 1 | –1 | 0 |
| 0 | –1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 –1 |

Троичная цифровая техника вызывала интерес с самого начала развития цифровых машин в связи с арифметическими свойствами симметричного кода

¹⁾e-mail: rsa@iph.krasn.ru

чисел. Троичная система на трехстабильных элементах памяти (тритах) использовалась в ЭВМ “Сетунь”, выпущенных небольшой серией [2].

В последнее время были открыты квантовые вычислительные процессы, обещающие грандиозный прорыв в вычислительной технике [4]. Основная масса исследований посвящена квантовым компьютерам на двухуровневых квантовых системах – кубитах (квантовых аналогах битов), выполняющих вычисления в двоичной системе. В связи с тем, что троичная логика имеет ряд преимуществ перед двоичной, квантовые компьютеры, работающие на трехуровневых квантовых системах – кутритах (квантовых аналогах тритов), могут оказаться более перспективными [5, 6], чем работающие на кубитах. Однако это направление изучено недостаточно. В настоящей статье рассмотрен сумматор на кутритах, работа которого, насколько нам известно, не изучалась. Тогда как сумматор на цепочке из кубитов достаточно хорошо изучен теоретически [7–9]. Рассмотренный алгоритм суммирования не является квантовым алгоритмом [4], а является примером классического алгоритма, выполняемого на квантовом компьютере. Хотя квантовый сумматор не ускоряет по сравнению с классическим процесс сложения, тем не менее, он является важным элементом любого компьютера.

Элементарные логические операторы (вентили) и схема сумматора на кутритах. Работа сумматора на кубитах организуется [7–9] с помощью двухкубитного вентиля контролируемого НЕ (*CNOT*), и трехкубитного вентиля Тоффоли – вентиля, дважды контролируемого НЕ (*CCNOT*). Обобщением указанных вентилях на случай кутритов являются, соответственно, двухкутритный вентиль

SUM и трехкутритный вентиль $CSUM$ [10]. Правила работы вентиля SUM и $CSUM$ приведены в табл.2 и 3 (в жирных рамках выделены значения рабочих

Таблица 2

| Оператор SUM_{AB} | | | |
|---------------------|----|----|----|
| BA | -1 | 0 | 1 |
| -1 | 1 | -1 | 0 |
| 0 | -1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | -1 |

Таблица 3

Результат действия оператора $CSUM_{ABC}$ на $C = 0$

| BA | -1 | 0 | 1 |
|----|----|---|---|
| -1 | -1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |

кутритов после действия соответствующего оператора); A , B и C , как и в табл.1, означают одноразрядные троичные числа.

Работу сумматора на кутритах можно организовать из этих вентилях по схеме, показанной на рис.1. Горизонтальные линии соответствуют состоя-

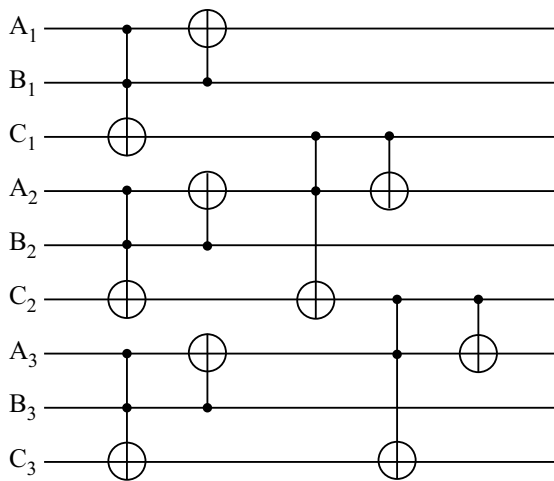


Рис.1. Логическая схема работы сумматора на кутритах

ниям кутритов в разрядах складываемых чисел (A_1, A_2, A_3) и (B_1, B_2, B_3), а также кутритов, используемых для переноса в следующие разряды (C_1, C_2, C_3).

Вентили обозначены вертикальными линиями, связывающими линии-состояния двух кутритов (SUM) или трех кутритов ($CSUM$). На рис.1, в качестве примера суммирования, взято два трехразрядных числа (разряд обозначается нижним индексом). Кутриты объединены в блоки (по три кутрита), которые соответствуют разрядам двух суммируемых чисел A_n и B_n , а также кутриту C_n . Вентили действуют поочередно на каждый разряд чисел A_n и B_n . Итоговая сумма чисел n -го разряда записывается в состоянии кутрита A_n . Суммирование в n -ом разряде, согласно схеме на рис.1, представляется следующей последовательностью вентилях SUM и $CSUM$:

$$F_n = SUM_{C_{n-1}A_n} CSUM_{C_{n-1}A_n C_n} \times \\ \times SUM_{B_n A_n} CSUM_{A_n B_n C_n}. \quad (2)$$

В универсальной логической схеме рис.1 не конкретизируется расположение кутритов в пространстве. Рассмотрим сумматор на цепочке кутритов, в качестве которых могут быть взяты квадрупольные ядра со спином $I = 1$, управляемые методами ядерного магнитного резонанса (ЯМР) (см. следующий раздел). Схема расположения кутритов и соответствующих им разрядов A_n и B_n двух суммируемых троичных чисел имеет следующий вид:

$$A_1 B_1 C_1 A_2 B_2 C_2 A_3 B_3 C_3 \dots A_n B_n C_n.$$

Адресацию, необходимую для избирательного управления с помощью радиочастотного (РЧ) магнитного поля нужными состояниями спинов, можно обеспечить, например, при изменении величины постоянного магнитного поля вдоль цепочки. Для выполнения условных операций предполагаем, как и в работах [7, 8], наличие спин-спиновой взаимодействия между ближайшими соседями.

Для реализации сумматора на цепочке кутритов при наличии взаимодействия только ближайших соседей возникает необходимость смены места рабочего спина в операторе $CSUM$. С этой целью необходимо дополнить схему операторами перестановки местами состояний двух рядом стоящих спинов (операторами $SWAP$, правило работы которого приведено в табл.4). С учетом новой операции вместо выражения (2) получаем следующую последовательность операторов:

$$F_n = SUM_{C_{n-1}A_n} SWAP_{B_n C_n} SWAP_{B_n A_n} \times \\ \times CSUM_{C_{n-1}B_n A_n} SWAP_{A_n B_n} SWAP_{C_n B_n} \times \\ \times SUM_{B_n A_n} SWAP_{B_n C_n} CSUM_{A_n C_n B_n} SWAP_{C_n B_n}. \quad (3)$$

Таблица 4
Оператор SWAP_{AB}

| B \ A | -1 | 0 | 1 | |
|-------|--------|-------|-------|------|
| -1 | -1, -1 | 0, -1 | 1, -1 | B, A |
| 0 | -1, 0 | 0, 0 | 1, 0 | |
| 1 | -1, 1 | 0, 1 | 1, 1 | |

Для суммирования всего числа оператор F_n нужно применить к каждому разряду слагаемых.

ЯМР реализация логических операторов и сумматора. Возьмем цепочку квадрупольных ядер со спином $I = 1$, взаимодействующих с аксиально-симметричным градиентом кристаллического поля. С одной стороны, такая система достаточно проста, с другой стороны, ЯМР на сегодняшний день лидирует при экспериментальном моделировании квантовых вычислений. Наконец, такая система является прямым развитием ранее изученной модели сумматора на цепочке кубитов [7, 8]. Гамильтониан системы имеет вид [11]

$$H_0 = - \sum_{k=1}^N \omega_k I_k^z + q \sum_{k=1}^N \left(I_k^{z2} - \frac{2}{3} \right) - \sum_{k=1}^N J_k I_k^z I_{k+1}^z, \quad (4)$$

где $\omega_k = B_0 \gamma + k g \gamma$ – ларморовская частота прецессии в сильном постоянном магнитном поле B_0 , γ – гиромагнитное отношение, g – градиент магнитного поля, k – номер спина, q – константа квадрупольного взаимодействия, J_k – константа спин-спинового взаимодействия ближайших соседей, I_k^z – оператор проекции спина k на ось Z . Энергию будем измерять в единицах угловой частоты и примем $\hbar = 1$.

Каждое ядро рассматривается как отдельный кутрит, а в качестве вычислительного базиса используются состояния с различной проекцией спина на выделенную ось Z :

$$|I^z = 1\rangle = |1\rangle; \quad |I^z = 0\rangle = |0\rangle; \quad |I^z = -1\rangle = |\bar{1}\rangle. \quad (5)$$

Базис двух спинов организуется как прямое произведение базисных состояний каждого из спинов – $|ij\rangle = |i\rangle \otimes |j\rangle$; $i, j = \{\bar{1}, 0, 1\}$. Состояния, соответствующие девяти неэквидистантным уровням ε_n двухкутритной системы, пронумеруем следующим образом:

$$\begin{aligned} |1\rangle &= |\bar{1}\bar{1}\rangle, \quad |2\rangle = |\bar{1}0\rangle, \quad |3\rangle = |\bar{1}1\rangle, \\ |4\rangle &= |0\bar{1}\rangle, \quad \dots, \quad |8\rangle = |10\rangle, \quad |9\rangle = |11\rangle. \end{aligned}$$

В таком базисе состояние системы описывается вектор-столбцом (строкой), а двухкутритный вентиль SUM_{12} будет представлять собой матрицу 9×9 , имеющую блочный вид

$$SUM_{12} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & A' \end{bmatrix}, \quad \text{где } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

A' – транспонированная матрица, а E – единичная матрица.

Для получения оператора SUM_{12} необходимо РЧ полем осуществить селективные переходы между состояниями кутритов, которые связаны отличными от нуля матричными элементами в матрице (6) [12–14]. Вентиль SUM_{12} получается в результате действия следующей последовательности импульсов РЧ поля [13, 14]:

$$\{\pi\}_X^{7-8} \rightarrow \{\pi\}_X^{8-9} \rightarrow \{\pi\}_X^{2-3} \rightarrow \{\pi\}_X^{1-2}. \quad (7)$$

Стрелки указывают порядок следования импульсов во времени. Эта последовательность селективных поворотов на угол π вокруг оси X обеспечивает повороты не только на разрешенных, но и на запрещенных переходах 7–9 и 1–3. Резонансные частоты ω РЧ импульсов в (7) принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} \omega^{7-8} &= \omega_2 - q - J; \quad \omega^{8-9} = \omega_2 + q - J; \\ \omega^{3-2} &= \omega_2 + q + J; \quad \omega^{2-1} = \omega_2 - q + J. \end{aligned} \quad (8)$$

Во вращающейся с частотой РЧ поля ω системе координат действие отдельного РЧ импульса задается оператором эволюции [11]

$$U(t) = e^{-iHt} \quad (9)$$

с не зависящим от времени эффективным гамильтонианом H :

$$H = H_0 + \omega \sum_{k=1}^N I_k^z + \Omega \sum_{k=1}^N I_k^X. \quad (10)$$

Здесь $\Omega = B_1 \gamma$, B_1 – амплитуда РЧ поля, I_k^X – оператор проекции спина k на ось X . Селективный π -импульс получаем из (9) при включении поля с постоянной амплитудой $\Omega \ll d$ и частотой ω в течение конечного времени $t_p = \pi/\sqrt{2}\Omega$ ($t_p \gg 1/\omega$).

Матрица вентилей $CSUM_{132}$ (спины 1 и 3 – контролирующие, спин 2 – рабочий) в базисе трех спинов $|ijk\rangle$; $i, j, k = \{\bar{1}, 0, 1\}$ имеет размер 27×27 и выглядит следующим образом:

$$CSUM_{132} = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & S' \end{bmatrix};$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где E – единичная матрица размером 13×13 , S' – транспонированная матрица. Вентиль $CSUM_{132}$ получается в результате действия следующей последовательности РЧ импульсов:

$$\{\pi\}_X^{7-4} \rightarrow \{\pi\}_X^{4-1} \rightarrow \{\pi\}_X^{24-21} \rightarrow \{\pi\}_X^{27-24}. \quad (12)$$

Нумерация уровней начинается от $|1\rangle = |\bar{1}\bar{1}\bar{1}\rangle$ и заканчивается $|27\rangle = |111\rangle$.

Вентиль $SWAP_{12}$ в базисе 2-х спинов $|ij\rangle$, $i, j = \{\bar{1}, 0, 1\}$ описывается следующей матрицей:

$$SWAP_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Импульсная последовательность для получения вентиля $SWAP_{12}$ будет следующей:

$$\begin{aligned} \{\pi\}_X^{4-5} &\rightarrow \{\pi\}_X^{4-7} \rightarrow \{\pi\}_X^{4-5} \rightarrow \{\pi\}_X^{3-6} \rightarrow \{\pi\}_X^{5-6} \rightarrow \\ &\rightarrow \{\pi\}_X^{3-6} \rightarrow \{\pi\}_X^{4-7} \rightarrow \{\pi\}_X^{4-5} \rightarrow \{\pi\}_X^{4-7} \rightarrow \\ &\rightarrow \{\pi\}_X^{5-6} \rightarrow \{\pi\}_X^{5-8} \rightarrow \{\pi\}_X^{5-6} \rightarrow \\ &\rightarrow \{\pi\}_X^{4-5} \rightarrow \{\pi\}_X^{2-5} \rightarrow \{\pi\}_X^{4-5}. \end{aligned} \quad (14)$$

На основе полученных результатов, с использованием математического пакета, была сделана численная модель квантового ЯМР сумматора. Слагаемые в n -м блоке разряда кодируются начальным квантовомеханическим состоянием (вектор-столбцом), образованным прямым произведением векторов состояний отдельных кутритов и вектором состояния кутрита переноса разряда в предыдущем блоке:

$$\{|\psi_{C_{n-1}}\rangle \otimes |\psi_{A_n}\rangle \otimes |\psi_{B_n}\rangle \otimes |\psi_{C_n}\rangle\}. \quad (15)$$

Вектор состояния блока представляется “1” на соответствующем месте в 3^i -компонентного вектора-столбца, где $i = 4$. Суммирование производится в

результате действия оператора (3) на каждый вектор состояния блока (15) последовательно. Согласно такой схеме, при сложении разряда необходимо работать с четырьмя ядерными спинами. Поэтому матрицы, используемые в вычислениях соответствующих операторов, имеют размерность 81×81 . Вентили SUM , $CSUM$ и $SWAP$ получаются в результате применения приведенных выше импульсных последовательностей, дополненных с учетом взаимодействий с добавленными спинами. После суммирования всех разрядов числа, получаем вектор-столбцы каждого разряда с измененным состоянием, раскодировав которые, получаем итоговую сумму двух чисел в троичной записи.

Действие каждого РЧ импульса рассчитывается по формулам (9), (10). РЧ поле действует не только на конкретно выбранный переход отдельного спина, но и на соседние к нему спины, а также близкие по частоте переходы, поэтому в результате умножения матрицы эволюции на вектор состояния получается суперпозиционное состояние. В этом состоянии, с одной стороны, с малой вероятностью появляются неверные ответы, с другой стороны, на месте верного ответа будет стоять величина, отличная от “1”. За вероятность (P) того, что два числа просуммированы верно, возьмем квадрат модуля максимального элемента в вектор-столбце, тогда ошибка сложения будет $\delta = 1 - P$. Рассчитанная так ошибка одного блока из четырех ядер приведена на рис.2. Подбирая

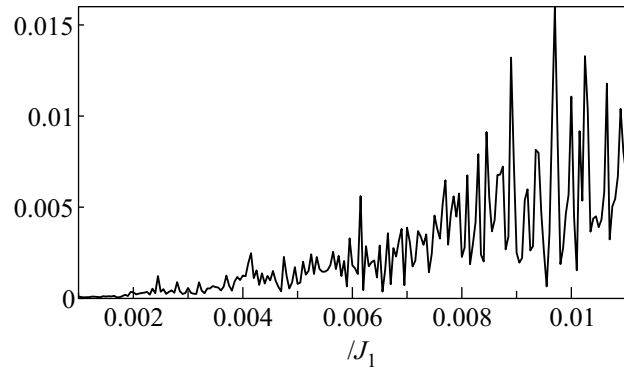


Рис.2. Зависимость ошибки сложения одного разряда δ от амплитуды РЧ поля Ω при $J_2 = 7.333J_1$, $J_3 = J_1$, $q = 100J_1$, $g = 11.5J_1$

параметры, мы можем уменьшить ошибку до величины, нужной для работы сумматора. Ввиду малости ошибки отдельного блока, ошибка суммирования всего троичного числа (всех его разрядов) будет являться суммой ошибок отдельных блоков, то есть будет расти пропорционально числу разрядов (числу спинов в цепочке). Такая зависимость для сумматора

на кубитах подтверждена численным расчетом в работе [8].

В заключение заметим, что полученные квантовые схемы открывают возможность экспериментальной реализации сумматора на кутритах. Причем в качестве рабочего кутрита, вместо трех уровней квадрупольного ядра, можно использовать три электронных уровня ионов, атомов или молекул при наличии соответствующей симметрии гамильтониана. Для этих систем в универсальной квантовой схеме надо будет заменить РЧ импульсы на микроволновые или лазерные импульсы.

1. А. А. Папернов, *Логические основы цифровых машин и программирования*, М.: Наука, 1968.
2. Н. П. Брусенцов, *Пороговая реализация трехзначной логики электромагнитными средствами*. В кн.: *Вычислительная техника и вопросы кибернетики*, вып. 9, с. 3, М.: Изд-во МГУ, 1972.
3. А. Кушнеров, *Троичная цифровая техника. Ретроспектива и современность*, Израиль, Университет им. Бен-Гуриона, 2005.
4. К. А. Валиев, А. А. Кокин, *Квантовые компьютеры: надежды и реальность*, Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001.
5. A. B. Klimov, R. Guzman, J. C. Retamal, and C. Saavedra, *Phys. Rev. A* **67**, 062313 (2003).
6. B. Tamir, *Phys. Rev. A* **77**, 022326 (2008).
7. G. P. Berman, G. D. Doolen, G. V. Lopez, and V. I. Tsifrinovich, *Comp. Phys. Commun.* **146**, 324 (2002); quant-ph/0105133.
8. D. I. Kamenev, G. P. Berman, R. B. Kassman, and V. I. Tsifrinovich, *Int. J. Quantum Inf.* **2**, 323 (2004); quant-ph/0403085.
9. B.-S. Choi and R. Van Meter, quant-ph/0809.4317.
10. J. Daboul, X. Wang, and B. C. Sanders, *J. Phys. A* **36**, 7063 (2003).
11. Ч. Сликтер, *Основы теории магнитного резонанса*, М.: Мир, 1981.
12. R. Das, A. Mitra, V. Kumar, and A. Kumar, *Int. J. Quantum Inf.* **1**, 387 (2003); quant-ph/0307240.
13. R. Das and A. Kumar, *Phys. Rev. A* **68**, 032304 (2003).
14. В. П. Шауро, Д. И. Пехтерев, В. Е. Зобов, *Изв. вузов. Физика*, **6**, 41 (2007).