

## О возможности наблюдения спирального рассеяния релятивистских частиц в изогнутом кристалле

Г. В. Ковалев<sup>1)</sup>

North Saint Paul, MN 55109, USA

Поступила в редакцию 26 декабря 2008 г.

После переработки 2 февраля 2009 г.

Получены оценки положения пика, ширины области прицельных параметров и условий оптимального наблюдения спирального рассеяния релятивистских частиц в равномерно изогнутом кристалле. Указано на существование спирального рассеяния с корневой сингулярностью, где вторичный процесс объемного захвата в режим каналирования отсутствует и условия наблюдения этого эффекта наиболее благоприятные.

PACS: 13.88.+e, 41.60.-m, 61.85.+p

Явление спирального рассеяния заключается в том, что классическая функция отклонения частицы  $\chi(b)$  (или луча света) при некотором прицельном параметре  $b = b_s$  имеет отрицательную логарифмическую сингулярность [1]. Аналогом спирального рассеяния в квантовой механике является резонансное рассеяние [2]. Однако резонансное рассеяние, с квантово-механической точки зрения, охватывает более широкий класс явлений. В частности, оно может присутствовать при рассеянии быстрых частиц на прямоугольной цилиндрической яме (см., например, [3]), в то время как классическое спиральное рассеяние на подобном потенциале отсутствует [4]. Для иллюстрации этого и определения границ спирального рассеяния сравним рассеяние на цилиндрической (или сферической) потенциальной яме радиуса  $R$  и глубиной  $-U_0$  и рассеяние на яме такой же глубины и радиуса, но со сглаженным параболическим краем шириной  $d/2$  ( $d \ll R$ ) (рис.1а, кривые 1, 2):

$$U(r) = -U_0 \frac{4}{d^2} \begin{cases} 0, & R < r \\ (r - R)^2, & (R - \frac{d}{2}) < r < R \\ \frac{d^2}{4}, & 0 < r < (R - \frac{d}{2}) \end{cases} . \quad (1)$$

Классическую функцию отклонения,

$$\chi(b) = 2\alpha(b) = \pi - 2b \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r \sqrt{r^2 [1 - \phi(r)] - b^2}} \quad (2)$$

(здесь  $\phi(r) = 2U(r)E/p_{\infty}^2 c^2$  и  $b, U(r), E, p_{\infty}$  – прицельный параметр, центрально-симметричный потенциал, полная энергия и импульс частицы на бесконечности), можно вычислить для обоих случаев, но

<sup>1)</sup>e-mail: kovalevgennady@qwest.net

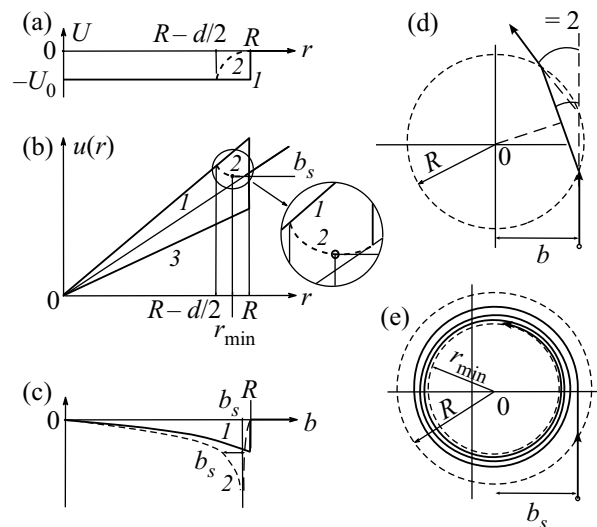


Рис.1. (а) Потенциал прямоугольной ямы (сплошная кривая 1) и яма со сглаженным краем (штриховая кривая 2); (б) – функция  $u(r)$  формула (3), кривые 1 и 3 для ямы и барьера, кривая 2 для ямы со сглаженным краем; (с) – функция отклонения  $\alpha = \chi/2$ ; (д) – траектория частицы в прямоугольной яме; (е) – спиральная траектория частицы в прямоугольной яме со сглаженным краем

отсутствие спирального рассеяния для прямоугольной ямы можно увидеть и непосредственно из графика (рис.1б, кривая 1) функции

$$u(r) = r \sqrt{1 - \phi(r)}, \quad (3)$$

которая имеет конечный скачок и локальный минимум при  $r = R$ . Следовательно, в этой точке производная  $u(R)'$  не определена. С учетом (3), функция отклонения (2) запишется в следующем виде:

$$\chi(b) = \pi - 2b \int_{r_o}^{\infty} \frac{dr}{r \sqrt{u(r) - b} \sqrt{u(r) + b}}, \quad (4)$$

где точка поворота  $r_o$ , как и прежде, определяется из условия  $u(r_o) = b$ . Для потенциала с гладким краем (кривая 2) функция  $u(r)$  имеет гладкий локальный минимум в точке  $r_{\min}$ , в которой  $u(r_{\min})' = 0$ . При совпадении прицельного параметра с этим минимумом,

$$b_s = u(r_{\min}), \quad (5)$$

обращается в нуль как радиальная скорость частицы, так и радиальное ускорение (см. подробнее [1, 5]), то есть возникают условия спирального рассеяния. При этом функция  $u(r)$  в окрестности минимума  $r = r_{\min}$  представляется в виде

$$u(r) \approx u(r_{\min}) + \frac{u(r_{\min})''}{2}(r - r_{\min})^2, \quad (6)$$

а сама точка локального минимума  $r_{\min}$ , определяемая из условия  $u(r_{\min})' = 0$ , задается уравнением

$$1 - \phi(r_{\min}) - \frac{r_{\min}}{2} \phi(r_{\min})' = 0. \quad (7)$$

Это выражение справедливо для любого потенциала, а для (1) оно сводится к простому виду:

$$2\hat{r}_{\min}^2 - 3\hat{r}_{\min} + 1 + \delta = 0. \quad (8)$$

Здесь для удобства введены обозначения

$$\hat{r} = \frac{r}{R}, \quad \hat{d} = \frac{d}{R}, \quad \delta = \frac{\hat{d}^2}{4|\phi_o|}, \quad \phi_o = \frac{-2U_0 E}{p_{\infty}^2 c^2} \quad (9)$$

и  $\theta_L = \sqrt{|\phi_o|}$  – угол каналирования Линдхарда (в случае потенциала (1) можно говорить о полуканалировании, когда частица движется вблизи края потенциала, поочередно отражаясь от его внутренней стенки). Везде далее величина с символом  $\hat{\phantom{x}}$  будет обозначать величину без символа, деленную на  $R$ .

Из двух решений уравнения (8)  $\hat{r}_{\min} = (3 \pm \sqrt{1 - 8\delta})/4$ , оставляем только физически значимое (со знаком + перед корнем):

$$\hat{r}_{\min} = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{1 - 8\delta}}{4}. \quad (10)$$

Отметим важное условие, что  $\hat{r}_{\min}$  должно быть в пределах  $1 - \hat{d}/2 \leq \hat{r}_{\min} \leq 1$  (см. рис.1), в противном случае локального минимума не существует. Нижняя граница,  $1 - \hat{d}/2 = \hat{r}_{\min}$ , подставленная в левую часть (10), дает критическое значение параметра  $\delta_c$  для наблюдения спирального рассеяния релятивистских частиц на яме с гладким краем:

$$\delta \leq \delta_c = \frac{\hat{d}(1 - \hat{d})}{2}. \quad (11)$$

Поскольку, согласно (9),  $|\phi_o| = \hat{d}^2/4\delta$ , то можно также выписать соответствующий критерий для квадрата угла Линдхарда  $|\phi_{o,c}|$ :

$$|\phi_o| \geq |\phi_{o,c}| = \frac{\hat{d}}{2(1 - \hat{d})}. \quad (12)$$

Далее, используя малость области гладкого края,  $\hat{d} \ll 1$  (или  $d \ll R$ ), получаем простые ограничения:  $\delta \leq \hat{d}/2$ ,  $|\phi_o| \geq \hat{d}/2$ . Легко видеть, что эти ограничения эквивалентны условию  $R \geq R_c = p_{\infty}^2 c^2 d / 4U_0 E = d/2\theta_L^2$ , которое, как отмечалось в [4, 5], совпадает с критерием Цыганова для существования эффекта каналирования в изогнутом кристалле. Из малости  $\hat{d} \ll 1$  также следует малость параметра  $\delta \ll 1$  и приближение для (10),  $\hat{r}_{\min} \cong 1 - \delta$ .

Для сравнения приведем выражение для  $\alpha(\hat{b}) = \chi(\hat{b})/2$  в прямоугольной яме для  $0 \leq \hat{b} \leq 1$  (см. [6], § 19 или формулу (12) в [5]):

$$\alpha(\hat{b}) = \arcsin\left(\frac{\hat{b}(\sqrt{1 - \hat{b}^2} - \sqrt{1 - \phi_o - \hat{b}^2})}{\sqrt{1 - \phi_o}}\right). \quad (13)$$

На рис.1с это кривая 1 и все углы отклонения для прямоугольной ямы – отрицательны, с максимальным по модулю значением

$$|\alpha(1)| = \arcsin\left(\frac{\sqrt{-\phi_o}}{\sqrt{1 - \phi_o}}\right), \quad (14)$$

достигаемым у края ямы,  $\hat{b} = 1$ . Для малых значений,  $\sqrt{|\phi_o|} \ll 1$ , угол  $|\alpha(1)| \approx \theta_L$ . Типичная траектория частиц в таком потенциале показана на рис.1d. В случае ямы со сглаженным краем (1) функция отклонения (2) представляется в виде громоздкого выражения с эллиптическими функциями. Если же воспользоваться приближением (6), то функция отклонения для прицельных параметров  $\hat{b}_s < \hat{b} < 1$  принимает следующий вид:

$$\alpha(\hat{b}) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\hat{b}) - \sqrt{\frac{\hat{b}}{\hat{u}(\hat{r}_{\min})''}} \times \quad (15)$$

$$\times \frac{\ln\left(\frac{2(\hat{r}_0 - \hat{r}_{\min})}{(\sqrt{\hat{r}_0(1 + \hat{r}_0 - 2\hat{r}_{\min}) - \sqrt{(1 - \hat{r}_0)(2\hat{r}_{\min} - \hat{r}_0)^2}})}{\sqrt{\hat{r}_{\min}^2 - (\hat{r}_0 - \hat{r}_{\min})^2}}\right)}{\sqrt{\hat{r}_{\min}^2 - (\hat{r}_0 - \hat{r}_{\min})^2}},$$

где  $\hat{r}_0 = \hat{r}_{\min} + \sqrt{2(\hat{b} - \hat{u}(\hat{r}_{\min})) / \hat{u}(\hat{r}_{\min})''}$ . Для прицельных параметров  $0 < \hat{b} < \hat{b}_s$  функция отклонения имеет несколько иную форму:

$$\alpha(\hat{b}) = \arcsin\left(\frac{\hat{b}}{A\sqrt{1+\hat{d}^2/(4\delta)}}\right) - \arcsin(\hat{b}) - \sqrt{\frac{\hat{b}}{C\hat{u}(\hat{r}_{\min})''}} \ln\left(\frac{2C+AB+2\sqrt{C}\sqrt{A^2+AB+C}}{A(2C+B+2\sqrt{C}\sqrt{1+B+C})}\right), \quad (16)$$

где  $A = 1 - \hat{d}/2$ ,  $B = -2\hat{r}_{\min}$ ,  $C = \hat{r}_{\min}^2 + 2(\hat{u}(\hat{r}_{\min}) - \hat{b})/\hat{u}(\hat{r}_{\min})''$ .

При  $\hat{b} \rightarrow \hat{b}_s = \hat{u}(\hat{r}_{\min})$  углы отклонения (15) и (16) логарифмически стремятся к  $-\infty$  (см. рис.1с кривая 2), то есть частица закручивается вокруг центра потенциала на угол, превышающий максимальный угол (14) для прямоугольной ямы. В случае совпадения  $\hat{b} = \hat{b}_s$  возникает спиральное рассеяние, релятивистская частица не имеет уходящей ветви и остается у потенциала навсегда (см. рис.1е), приближаясь к предельному циклу  $\hat{r} \rightarrow \hat{r}_{\min}$ . Только одна траектория удовлетворяет условию спирального рассеяния. Траектории с близкими к  $\hat{b}_s$  прицельными параметрами имеют обычные симметричные входящую и уходящую ветви, но могут следовать вдоль окружности на угол, превосходящий угол Линдхарда (14).

Определим область спирального рассеяния как диапазон прицельных параметров  $\Delta\hat{b}_s$  около  $b = b_s$ , в котором модули отрицательных углов (15), (16) превышают значение максимального угла (14) для прямоугольной ямы (см. рис.1с). Такое определение полезно, поскольку оно дает отличие спирального рассеяния от преломления, которое лежит в пределах угла (14), и от объемного отражения, которое, как известно [7], имеет положительный знак, но не превышает угла (14). Спиральное рассеяние также отличается от каналирования (см. ниже). Если (10) подставить в (5), то это дает точное значение спирального прицельного параметра  $\hat{b}_s$  для потенциала (1):

$$\hat{b}_s = \frac{3 + \sqrt{1-8\delta}}{4} \sqrt{1 + \frac{(1 - \sqrt{1-8\delta})^2}{16\delta}}. \quad (17)$$

В случае  $\delta \ll 1/8$  имеем  $\hat{b}_s \approx 1 - \delta/2$ .

Для нахождения правой и левой границ спирального рассеяния надо найти корень трансцендентного уравнения

$$\alpha(\hat{b}) = -\arcsin\left(\frac{\sqrt{|\phi_0|}}{\sqrt{1+|\phi_0|}}\right), \quad (18)$$

где для правой границы  $\alpha(\hat{b})$  берется из (15), а для левой – из (16). Раскладывая все функции в (15) в ряд по степеням  $(\hat{b} - \hat{b}_s)$  в правой окрестности  $\hat{b}_s$ , оставляя только первый член и решая затем более простое трансцендентное уравнение  $c_1 \ln(\Delta\hat{b}_{sr}) + c_2 = 0$

( $c_1, c_2$  – некоторые константы) относительно  $\Delta\hat{b}_{sr}$ , получим правую часть  $\Delta\hat{b}_{sr} = \hat{b}_r - \hat{b}_s$  области  $\Delta\hat{b}_s$ :

$$\Delta\hat{b}_{sr} = 2\hat{u}(\hat{r}_{\min})'' \delta^2 \exp\left(-\sqrt{\frac{\hat{u}(\hat{r}_{\min})''}{\hat{b}_s}} \times \left(\frac{\hat{d}}{\sqrt{\delta}} + 2\sqrt{1 - \hat{b}_s^2}\right)\right). \quad (19)$$

Здесь и далее мы используем малость величин  $|\phi_0| \ll 1$ ,  $\delta \ll 1/8$ , заведомо справедливую в релятивистском случае.

Для вычисления левой части  $\Delta\hat{b}_{sl} = \hat{b}_s - \hat{b}_l$  во всем диапазоне (12) необходимо оставить несколько членов разложения в (16) по степеням  $(\hat{b} - \hat{b}_s)$ , поскольку при изменении параметра  $|\phi_0|$  прицельный параметр  $\hat{b}_s$  приближается к точке излома  $\approx \hat{d}/4$  функции  $\hat{u}(\hat{r})$ . Если оставить только два члена, то полученное трансцендентное уравнение  $c_1 \ln(c_3 \Delta\hat{b}_{sl}) + \Delta\hat{b}_{sl} + c_2 = 0$  дает решение, выраженное через функцию Ламберта  $W(x)$  (функция Ламберта определена как  $W(x) \exp W(x) = x$ , [8]):

$$\Delta\hat{b}_{sl} = c_1 W\left(\frac{\exp(-c_2/c_1)}{c_1 c_3}\right), \quad (20)$$

здесь параметры  $c_1, c_2, c_3$  имеют следующий вид:

$$c_1 = \frac{\sqrt{A^2(1+\phi_0) - \hat{b}_s^2} \sqrt{1 - \hat{b}_s^2}}{(\sqrt{A^2(1+\phi_0) - \hat{b}_s^2} - \sqrt{1 - \hat{b}_s^2}) \sqrt{\hat{u}(\hat{r}_{\min})''}},$$

$$c_2 = -\sqrt{A^2(1+\phi_0) - \hat{b}_s^2} \sqrt{1 - \hat{b}_s^2} + \frac{\hat{d} \sqrt{A^2(1+\phi_0) - \hat{b}_s^2} \sqrt{1 - \hat{b}_s^2}}{2\sqrt{\delta(1+\phi_0)}(\sqrt{A^2(1+\phi_0) - \hat{b}_s^2} - \sqrt{1 - \hat{b}_s^2})},$$

$$c_3 = \frac{A}{2\delta(\hat{d}/2 - \delta)\hat{u}(\hat{r}_{\min})''}. \quad (21)$$

Ширина всей области прицельных параметров,  $\Delta\hat{b}_s$ , где существенно спиральное рассеяние, определяется суммой (19) и (20):

$$\Delta\hat{b}_s = \Delta\hat{b}_{sr} + \Delta\hat{b}_{sl}. \quad (22)$$

Вторая производная  $\hat{u}(\hat{r}_{\min})''$ , входящая в (19) и (20), выражается через  $\delta$  как

$$\hat{u}(\hat{r}_{\min})'' = \frac{4\hat{r}_{\min} - 3}{\delta \sqrt{1 + \frac{(\hat{r}_{\min} - 1)^2}{\delta}}} = \frac{\sqrt{1-8\delta}}{\delta \sqrt{1 + \frac{(1 - \sqrt{1-8\delta})^2}{16\delta}}}, \quad (23)$$

и для малых  $\delta$ ,  $\hat{u}(\hat{r}_{\min})'' \approx \delta^{-1}$ .

Помимо приближенных выражений (19) и (20) для правой и левой границ спирального рассеяния, были также численно решены трансцендентные уравнения (18), и результат представлен сплошной кривой на рис.2. При этом для правой границы (кри-

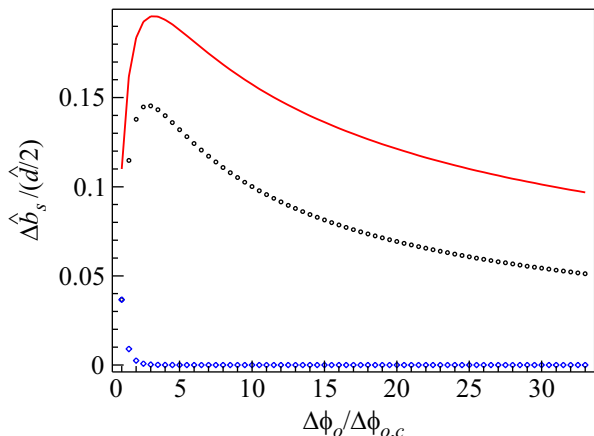


Рис.2. Нормированная зависимость ширины спирального рассеяния  $\Delta \hat{b}_s$  от параметра  $|\phi_o|/|\phi_{o,c}|$ . Сплошная кривая – численный расчет по формуле (18). Кривая из кружков – вклад в  $\Delta \hat{b}_s$  от  $\Delta \hat{b}_{sl}$ , формула (20). Кривая, обозначенная ромбами, – вклад в  $\Delta \hat{b}_s$  от  $\Delta \hat{b}_{sr}$ , формула (19)

вая ромбами) численное решение совпадает с высокой точностью с формулой (19). Для левой границы (кривая кружками) формула (20) дает заниженный результат, но характер поведения кривой тот же, что и для точного численного решения. Кроме того, вклад от правой области спирального рассеяния в общую ширину крайне мал по сравнению с левой областью, за исключением окрестности критической точки  $|\phi_o| = |\phi_{o,c}|$ . Это проявляется в том, что логарифмические ветви функции отклонения справа и слева от  $b = \hat{b}_s$  не симметричны для рассматриваемого потенциала, рис.3, кривые 2 и 3.

Отметим важную особенность ширины области спирального рассеяния. Пусть параметры потенциала ( $R$ ,  $U_0$ ,  $d$ ) неизменны, а энергия релятивистских частиц уменьшается так, что  $|\phi_o|$  возрастает от критического значения (12) до нескольких десятков  $|\phi_{o,c}|$ , оставаясь в пределах условия  $|\phi_o| \ll 1$ . Тогда ширина области спирального рассеяния,  $\Delta \hat{b}_s$ , быстро возрастает, достигая максимума при  $|\phi_o| \approx 3|\phi_{o,c}|$ , а затем падает до нуля. Нормированное значение в максимуме,  $\Delta \hat{b}_{s,max} / (\hat{d}/2)$ , в данном конкретном случае составляет  $\approx 19\%$  от ширины  $\hat{d}/2$  (см. рис.2) и в масштабе  $|\phi_o|/|\phi_{o,c}|$  отстоит от критической энергии на расстоянии  $\approx 3$ . Таким образом, положение мак-

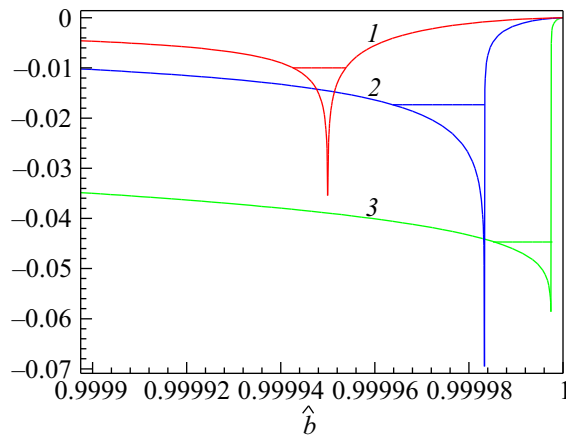


Рис.3. Функция отклонения  $\alpha(\hat{b})$  для потенциала (1): 1 –  $\hat{d} = 2 \cdot 10^{-4}$ ,  $|\phi_o| = 10^{-4}$ , 2 –  $\hat{d} = 2 \cdot 10^{-4}$ ,  $|\phi_o| = 3 \cdot 10^{-4}$ , 3 –  $\hat{d} = 2 \cdot 10^{-4}$ ,  $|\phi_o| = 2 \cdot 10^{-3}$ . Горизонтальные линии для каждой кривой соответствуют преломлению на угол  $\theta_L = \sqrt{|\phi_o|}$ , а их ширина – границам спирального рассеяния и преломления.

симум в данном масштабе от энергии частицы не зависит. Более того, нормированная ширина

$$\Delta \hat{b}_s / (\hat{d}/2) = f(|\phi_o|/|\phi_{o,c}|) \quad (24)$$

является универсальной функцией, зависящей только от геометрии потенциала. В то же время, значение параметра  $|\phi_o|$ , при котором достигается максимум, зависит, разумеется, от энергии частицы, но при этом выполняется указанная масштабная инвариантность. Это свойство проиллюстрировано на рис.4, где приведена ширина спирального рассеяния

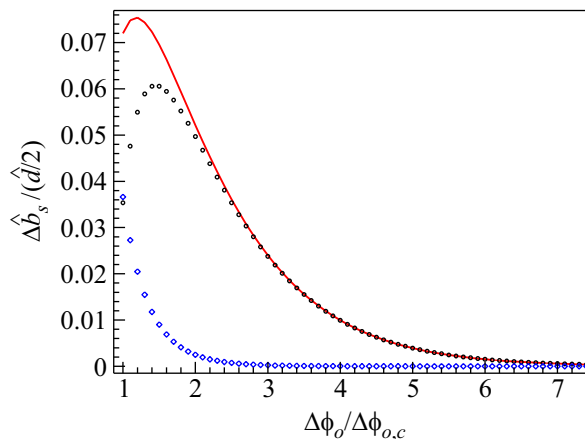


Рис.4. Численный расчет по формуле (18) нормированной ширины спирального рассеяния  $\Delta \hat{b}_s / (\hat{d}/2)$  для потенциала кольца с полупараболой (сплошная кривая). Кривая кружками – вклад в  $\Delta \hat{b}_s$  от  $\Delta \hat{b}_{sl}$ . Кривая ромбами – вклад в  $\Delta \hat{b}_s$  от  $\Delta \hat{b}_{sr}$

на кольцевом потенциале, который представляет собой потенциал (1) с пустой сердцевинной ( $U(r) = 0$

области  $r < R - d/2$ ). Этот потенциал имеет максимальную величину объемного отражения по сравнению с другими кольцевыми потенциалами глубины  $-U_0$  и ширины  $d$ , сконструированными из двух перевернутых парабол. Поэтому этот потенциал дает минимальную оценку возможной ширины спирального рассеяния в реальном потенциале кристалла. Величина  $\Delta \hat{b}_{s, \max} / (\hat{d}/2) \approx 7\%$  и положение максимума  $|\phi_o| / |\phi_{o,c}| \approx 1.3$  ширины спирального рассеяния здесь иные, но масштабная инвариантность сохраняется.

Подчеркнем, что, в силу отмеченной выше масштабной инвариантности, такой же характер имеют кривые  $\alpha(\hat{b})$  для других значений  $\hat{d}$ , и  $|\phi_o|$  кроме тех, что указаны на рис.3, если  $\alpha$  и  $\hat{b}$  отнормировать, соответственно, на  $\theta_L$  и  $\hat{d}/2$ . Видно, что для больших  $|\phi_o|$  ( $|\phi_o| = 20 \cdot |\phi_{o,c}|$ , кривая 3 для относительно низких энергий) ширина области спирального рассеяния сужается и в пределе стремится к нулю. Функция отклонения в этом случае стремится к виду (13) рассеяния на прямоугольной яме, где сглаженность края несущественна и углы преломления  $\alpha(\hat{b})$  не превышают  $\theta_L$  (угол  $\chi(\hat{b})$  не превышает  $2\theta_L$ ). С увеличением энергии (уменьшением  $|\phi_o|$ ) ширина области спирального рассеяния  $\Delta \hat{b}_s$  возрастает. На кривой 2 при  $|\phi_o| = 3|\phi_{o,c}|$  она достигает максимума. Затем ширина  $\Delta \hat{b}_s$  уменьшается. Кривая 1 соответствует критической энергии  $|\phi_o| = |\phi_{o,c}| = \hat{d}/2$ , при которой уже не возможно каналирование, так как эффективная яма отсутствует, тем не менее, спиральное рассеяние имеет место и при данном значении энергии.

Последнее свойство связано с тем, что при точном выполнении критических условий (знак равенства в (11), (12)) в любом периодическом гладком потенциале, типа изображенного на рис.5, по-прежнему имеет место сингулярность функции отклонения. Однако в отличие от логарифмической сингулярности, рассматриваемой Фордом и Уиллером [1] и определяемой разложением (6), характер сингулярности меняется. В данном случае имеет место не локальный минимум, а точка перегиба ( $P_c$  на рис.5), в которой обращается в нуль также и вторая производная  $u''(r_{\min})$ , а разложение  $u(r)$  в ряд в окрестности минимума  $r = r_{\min}$  приобретает форму

$$u(r) \approx u(r_{\min}) + \frac{u^{(4)}(r_{\min})}{6} (r - r_{\min})^3. \quad (25)$$

Легко видеть, что интеграл (4) в случае  $b = u(r_{\min})$  будет давать отрицательную сингулярность корневого типа:

$$\chi(b) \approx -\frac{1}{\sqrt{|u(r_{\min}) - b|}}, \quad (26)$$

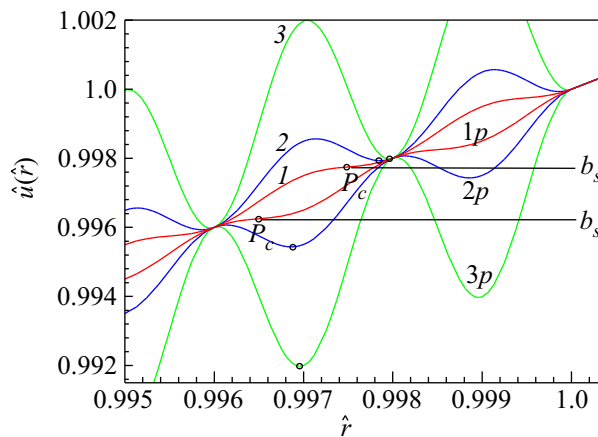


Рис.5. Функция  $\hat{u}(\hat{r}) = \hat{r} \sqrt{1 \pm \frac{\phi_o(1 - \cos(2\pi(1-\hat{r})/\hat{d}))}{2}}$  для кристаллического потенциала при изменении энергии частиц и фиксированных параметрах  $R, U_0, d$ . 1, 2, 3 – отрицательно заряженные частицы ( $\hat{d} = 0.002, \phi_o = 0.001, 0.003, 0.01$ ); 1p, 2p, 3p – положительно заряженные частицы (минус под корнем в  $\hat{u}(\hat{r})$ );  $P_c$  являются точками перегиба на 1 и 1p для критических энергий, соответствующих условию Цыганова

а значит, спиральное рассеяние и преломление должны присутствовать при  $|\phi_o| = |\phi_{o,c}|$ . Следует заметить, что, несмотря на то, что в точках локального минимума и точках перегиба эффективная сила равна нулю, спиральное рассеяние и преломление на потенциале, не деформированном центробежным членом, всегда возникает на внутреннем склоне потенциала, который обеспечивает притяжение (см. локальные минимумы на рис.5).

Эти свойства справедливы и для реального кристаллического потенциала, который при условиях (11), (12) имеет одну точку локального минимума или одну точку перегиба на каждый период. Разумеется, для реального кристалла положение и максимальная ширина будут другие, кроме того, нормировку ширины необходимо делать на период кристалла  $\hat{d}$ . Это даст нижнюю оценку максимальной ширины  $\Delta \hat{b}_s / \hat{d} \approx 3.5\%$  (кольцо) и верхнюю оценку  $\Delta \hat{b}_s / \hat{d} \approx 9.5\%$  (потенциал с краем). Однако для них также должно выполняться условие масштабной инвариантности. Для эксперимента это означает, что если, например, радиус кривизны  $R$  кристалла изменен, то для данного вида кристаллического потенциала всегда можно подобрать такую энергию частицы  $E$ , чтобы параметр  $|\phi_o|$  удовлетворял условию, при котором наблюдается максимальная ширина спирального рассеяния. В то же время, если имеется заданная энергия релятивистских частиц  $E$ , то всегда можно подобрать радиус изгиба  $R$ , при котором ширина спирального рассеяния максимальна.

Следует отметить, что в реальном кристалле многократное рассеяние и процессы диссипации не уничтожают сингулярности, связанной со спиральным рассеянием. Это было продемонстрировано в ядерных реакциях, например таких, как  $^{40}\text{Ar} + ^{232}\text{Th}$ , где глубокие неупругие процессы интерпретировались отрицательными углами спирального рассеяния с учетом сил трения [9]. Это объясняется тем, что силы трения деформируют траектории частиц, но сама зона спирального рассеяния  $\Delta\hat{b}_s$  остается неизменной.

Из-за отсутствия тепловых колебаний и низкой электронной плотности в зоне локальных минимумов, объемный захват отрицательно заряженных частиц существенно меньше, а ширина спирального рассеяния существенно больше, чем для положительных частиц. Поэтому отрицательно заряженные частицы, отклоняющиеся вдоль изгиба кристалла на угол  $> 2\theta_L$ , двигаются в состоянии спирального рассеяния. Из вышеприведенных оценок видим, что можно оценить долю отрицательно заряженных частиц при условии максимальной ширины спирального рассеяния от 3 до 9%. Предварительные эксперименты [10, 11] по рассеянию 180 ГэВ электронов в Si показывают довольно значительное количество частиц, двигающихся с углом  $> 2\theta_L = 32$  мкрад и не имеющих характерного для объемного захвата пика в конце углового размера кристалла.

Для положительных частиц при слабых изгибах кристаллов локальные минимумы попадают в область высоких электронных плотностей и тепловых флуктуаций потенциалов. Поэтому захват спиральных частиц в режим каналирования представляется наиболее вероятным вторичным процессом. Однако

и здесь спиральное рассеяние существенно, так как движение вдоль изгиба кристалла обеспечивает интенсивный объемный захват именно тех частиц, которые попали в зону  $\Delta\hat{b}_s$ . При изгибах кристалла, равных критическому радиусу  $R_c$ , когда каналированных состояний нет, наличие частиц с углом поворота, превышающим  $2\theta_L$ , может однозначно свидетельствовать о присутствии спирального рассеяния как в этом случае, так и в случае отрицательно заряженных частиц.

Автор признателен Andrea Mazzolari за указание на [10].

1. K. W. Ford and J. A. Wheeler, *Ann. Physics* **7**, 259 (1959).
2. M. V. Berry and K. E. Mount, *Rep. Prog. Phys.* **35**, 315 (1972).
3. N. P. Kalashnikov and G. V. Kovalev, *JETP Letters* **29**(6), 302 (1979).
4. G. V. Kovalev, *JETP Letters* **87**(2), 94 (2008).
5. G. V. Kovalev, *JETP Letters* **87**(7), 349 (2008).
6. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics, Course of Theoretical Physics, Volume 1*. Butterworth-Heinemann; 3rd edition, NY, 1976.
7. A. M. Taratin and S. A. Vorobiev, *Phys. Lett. A* **119**(8), 425 (1987).
8. J. Borwein, D. Bailey, and R. Girgensohn, *Experimentation in Mathematics. Computational Paths to Discovery*, A. K. Peters, Natick, Massachusetts, 2004.
9. J. Wilczynski, *Phys. Lett. B* **47**(6), 484 (1973).
10. W. Scandale, *Overview of H8RD22 CERN Results, Presentation, FNAL*, page 32 (06.12.2007).
11. W. Scandale, *Bent Crystals in LHC*, For UA9 collaboration, Erice, page 26 (29.10.2008).