Письма в ЖЭТФ, том 89, вып. 6, с. 317 – 321 © 2009 г. 25 марта

Нелинейные волны на поверхности диэлектрической жидкости в горизонтальном электрическом поле в 3D геометрии; точные решения

Н. М. Зубарев[1)]

Институт электрофизики Уральского отделения РАН, 620016 Екатеринбург, Россия

Поступила в редакцию 10 февраля 2009 г.

После переработки 18 февраля 2009 г.

Для 3D геометрии показано, что волны произвольной конфигурации могут распространяться без искажений по поверхности диэлектрической жидкости вдоль направления горизонтального электрического поля. Подобная ситуация реализуется для жидкостей с большими значениями диэлектрической проницаемости в случае достаточно сильного внешнего поля, когда влияние электростатических сил будет доминирующим. Для волн малой, но конечной амплитуды получено общее решение уравнений движения, описывающее взаимодействие встречных волн.

PACS: 47.35.+i, 47.65.–d

Как было показано в работе [1], нелинейные плоские волны могут распространяться без искажений по поверхности жидкого диэлектрика в сильном горизонтальном электрическом поле. Подобная ситуация возникает для идеальных жидкостей со значительной диэлектрической проницаемостью.

В настоящей работе будет продемонстрировано, что это необычное свойство допускает обобщение на 3D случай. Волны произвольной геометрии (в том числе не обладающие плоской симметрией) могут распространяться без искажений по направлению либо против направления электрического поля; при этом амплитуда волн не влияет на их скорость. Это означает, что 3D уравнения движения допускают точные решения, которые содержат произвольную функцию двух переменных, задающую начальную форму волны. Следует отметить, что для классической задачи о потенциальном течении жидкости со свободной поверхностью в поле тяжести не известно настолько широкого класса точных решений. Возможность построения решений при наличии электрического поля связана с тем обстоятельством, что потенциалы поля и скорости описываются сходными уравнениями, и введение в уравнения движения электростатического давления приводит их к более симметричному виду. Для случая вертикального электрического поля этот вопрос обсуждался в работах [2 – 4].

Влияние нелинейности на распространение волн по поверхности диэлектрических жидкостей в тангенциальном электрическом поле (либо по поверхности магнитных жидкостей в магнитном поле, что эквивалентно с математической точки зрения [5, 6]) обычно исследовалось для спектрально-узких волновых пакетов в приближении малости углов наклона поверхности – см., например, работы [7 – 9] и ссылки там. Подобное рассмотрение приводит к нелинейному уравнению Шредингера для комплексной амплитуды волны. Как будет показано ниже, для жидкости со значительной диэлектрической проницаемостью в пределе сильного внешнего поля эволюцию поверхности можно эффективно исследовать без перехода к огибающим. Это позволит, в частности, описать взаимодействие встречных уединенных волн. При анализе волн, распространяющихся в одном направлении (вдоль либо против направления поля), удается снять ограничения на их амплитуду – она может быть сравнимой с характерной длиной волны. Отметим, что профиль стационарных электрокапиллярных волн произвольной амплитуды изучался численными методами в работе [10].

Итак, рассмотрим потенциальное течение идеальной диэлектрической жидкости бесконечной глубины со свободной поверхностью, помещенной во внешнее однородное электрическое поле. В невозмущенном состоянии граница жидкости представляет собой плоскую горизонтальную поверхность $z = 0$ (ось z прямоугольной системы координат направлена по нормали к поверхности жидкости; оси x и y расположены в ее плоскости). Будем считать, что вектор напряженности электрического поля направлен по оси x, а функция $\eta(x,y,t)$ задает отклонение гра-

[1)]e-mail: nick@ami.uran.ru

ницы от плоской, то есть занимаемая жидкостью область ограничена свободной поверхностью $z=\eta$.

Дисперсионное соотношение для электрокапиллярных волн в горизонтальном электрическом поле имеет вид [5, 6, 11]

$$\omega^2 = gk + \frac{E^2(\varepsilon-1)^2}{4\pi\rho(\varepsilon+1)}\,k_x^2 + \frac{\alpha}{\rho}\,k^3, \quad k=\sqrt{k_x^2+k_y^2},$$

где ω – частота, k_x и k_y – проекции волнового вектора на оси x и y, E – напряженность внешнего электрического поля, α – коэффициент поверхностного натяжения, g – ускорение свободного падения, ε – диэлектрическая проницаемость среды, ρ – ее плотность. Мы будем рассматривать случай сильного поля,

$$E^2 \gg (\varepsilon+1)(\varepsilon-1)^{-2}\sqrt{\rho g\alpha},$$

когда появляется диапазон волновых чисел, в котором влияние электростатических сил будет доминирующим. В ситуации, когда $k_y=O(k_x)$, этот диапазон задается неравенством

$$\rho g(\varepsilon+1)(\varepsilon-1)^{-2}E^{-2} \ll k \ll \alpha^{-1}(\varepsilon+1)^{-1}(\varepsilon-1)^2E^2.$$

При этих условиях распространение волн будет бездисперсионным:

$$\omega^2 \approx c^2\,k_x^2, \qquad c=E(\varepsilon-1)/\sqrt{4\pi\rho(\varepsilon+1)}.$$

Выпишем уравнения движения для этой ситуации. Потенциал скорости ϕ для несжимаемой жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа,

$$\nabla^2\phi=0,$$

со следующими граничными условиями:

$$\phi_t+(\nabla\phi)^2/2=(P_E-P_0)/\rho, \qquad z=\eta(x,y,t), \qquad (1)$$

$$\phi\to 0, \qquad z\to-\infty,$$

где P_E – электростатическое давление, а $P_0=(\varepsilon-1)E^2/8\pi$ – константа. Эволюция свободной поверхности задается кинематическим соотношением

$$\eta_t=\phi_z-\nabla_\perp\eta\cdot\nabla_\perp\phi, \quad z=\eta(x,y,t).$$

Входящая в нестационарное уравнение Бернулли (1) величина P_E определяется выражением

$$P_E=\frac{(\varepsilon-1)\,(\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi')}{8\pi}, \quad z=\eta(x,y,t),$$

где потенциалы электрического поля в жидкости и над ней, соответственно φ и φ', удовлетворяют уравнениям Лапласа:

$$\nabla^2\varphi=0, \qquad \nabla^2\varphi'=0.$$

Их следует решать совместно с условиями непрерывности потенциала и нормальной компоненты вектора электрической индукции на границе диэлектрика, а также с условиями однородности поля на бесконечности:

$$\varphi=\varphi', \qquad z=\eta(x,y,t),$$

$$\varepsilon(\varphi_z-\nabla_\perp\eta\cdot\nabla_\perp\varphi)=\varphi'_z-\nabla_\perp\eta\cdot\nabla_\perp\varphi', \quad z=\eta(x,y,t),$$

$$\varphi\to-Ex, \quad z\to-\infty,$$

$$\varphi'\to-Ex, \quad z\to\infty.$$

Как следует из этих условий, для жидкости со значительной проницаемостью (к примеру, для этилового спирта $\varepsilon\approx 26$, для нитробензола $\varepsilon\approx 36$, для воды $\varepsilon\approx 81$) нормальная компонента электрического поля в жидкости оказывается много меньше по абсолютному значению тангенциальной компоненты. Это означает, что для случая $\varepsilon\gg 1$ силовые линии поля внутри жидкости будут направлены по касательной к ее поверхности, а тогда задача о распределении потенциала φ может быть решена без учета распределения поля над жидкостью. Получим в этом пределе для электростатического давления P_E и для постоянной P_0:

$$P_E\approx\frac{\varepsilon(\nabla\varphi)^2}{8\pi}, \quad P_0\approx\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}, \qquad z=\eta(x,y,t),$$

где функция φ находится из уравнения Лапласа со следующим условием на границе:

$$\varphi_z-\nabla_\perp\eta\cdot\nabla_\perp\varphi\approx 0, \quad z=\eta(x,y,t).$$

Перейдем к безразмерным обозначениям при помощи замен

$$\phi\to\lambda E\varepsilon^{1/2}(4\pi\rho)^{-1/2}\,\phi, \quad t\to\lambda E^{-1}\varepsilon^{-1/2}(4\pi\rho)^{1/2}\,t,$$

$$\varphi\to\lambda E\,\varphi, \quad x\to\lambda\,x, \quad y\to\lambda\,y, \quad z\to\lambda\,z,$$

где $\lambda=2\pi/k$ – характерная длина волны. Уравнения движения примут вид

$$\nabla^2\phi=0, \quad \nabla^2\tilde\varphi=0, \qquad (2)$$

$$\phi_t=-\tilde\varphi_x+(\nabla\tilde\varphi)^2/2-(\nabla\phi)^2/2, \quad z=\eta(x,y,t), \quad (3)$$

$$\eta_t=\phi_z-\nabla_\perp\eta\cdot\nabla_\perp\phi, \quad z=\eta(x,y,t), \qquad (4)$$

$$-\eta_x=\tilde\varphi_z-\nabla_\perp\eta\cdot\nabla_\perp\tilde\varphi, \quad z=\eta(x,y,t), \qquad (5)$$

$$\phi\to 0, \quad \tilde\varphi\to 0, \quad z\to-\infty, \qquad (6)$$

где для представления уравнений в симметричной форме введен вспомогательный потенциал $\tilde{\varphi} \equiv \varphi + x$. Он задает отклонение потенциала электрического поля от невозмущенного значения ($\varphi = -x$ для плоской границы).

Будем искать точные решения этих 3D уравнений в виде

$$\eta = f(x \mp t, y), \qquad (7)$$

$$\phi = \pm F(x \mp t, y, z), \qquad (8)$$

$$\tilde{\varphi} = F(x \mp t, y, z), \qquad (9)$$

где f и F – некоторые функции двух и, соответственно, трех переменных. Подобное представление соответствует рассмотрению стационарных волн на поверхности диэлектрической жидкости, распространяющихся по направлению (верхние знаки) либо против направления (нижние знаки) внешнего электрического поля. Важно, что потенциалы электрического поля и скорости для этого представления оказываются связанными соотношениями $\varphi + x = \pm\phi$.

Подставляя (7)–(9) в уравнения движения, обнаруживаем, что уравнения Лапласа (2), условия на бесконечности (6), а также условия (4) и (5) попарно совпадут, а нестационарное уравнение Бернулли (3) превратится в тождество. В итоге оказывается, что f – произвольная функция, а потенциал F определяется из краевой задачи:

$$\nabla^2 F = 0,$$

$$-f_x = F_z - \nabla_\perp f \cdot \nabla_\perp F, \quad z = f,$$

$$F \to 0, \quad z \to -\infty.$$

Это означает, что уравнения движения допускают пару точных частных решений:

$$\eta = f(x - t, y), \quad \eta = g(x + t, y), \qquad (10)$$

где f и g – произвольные функции. Нелинейные волны произвольной формы распространяются (по отдельности) вдоль оси x без искажений, как если бы они описывались простейшими линейными уравнениями

$$\eta_t = \mp \eta_x. \qquad (11)$$

Таким образом, нелинейность в рассматриваемой нами задаче не влияет на скорость распространения волны и не приводит к ее опрокидыванию. Отсюда, впрочем, не следует, что влиянием нелинейности можно пренебречь вовсе. Нелинейность будет определять взаимодействие противоположно направленных волн.

Рассмотрим взаимодействие встречных волн в приближении малости углов наклона поверхности, $|\nabla_\perp \eta| \sim \alpha \ll 1$. Как известно [12–14], уравнения движения жидкости со свободной поверхностью обладают гамильтоновой структурой, причем функции $\eta(x,y,t)$ и $\psi(x,y,t) \equiv \phi|_{z=\eta}$, задающие возмущение поверхности и, соответственно, величину потенциала скорости на границе жидкости, являются канонически сопряженным величинами:

$$\psi_t = -\frac{\delta H}{\delta \eta}, \quad \eta_t = \frac{\delta H}{\delta \psi}.$$

Гамильтониан H совпадает с полной энергией системы, что применительно к рассматриваемой нами задаче соответствует выражению

$$H = \int\limits_{z \le \eta} \frac{(\nabla\phi)^2}{2}\, d^3r - \int\limits_{z \le \eta} \frac{(\nabla\varphi)^2 - 1}{2}\, d^3r.$$

Применяя первую теорему Грина, гамильтониан можно представить в виде поверхностного интеграла:

$$H = \frac{1}{2}\iint \left[\psi(\phi_z - \nabla_\perp \eta \cdot \nabla_\perp \phi) - \tilde{\varphi}\eta_x\right]\big|_{z=\eta}\, dx\, dy.$$

Разложим подынтегральное выражение по степеням канонических переменных. Ограничиваясь членами второго и третьего порядков малости, получим для гамильтониана:

$$H = \frac{1}{2}\iint \left[\psi\hat{k}\psi + \eta(\nabla_\perp\psi)^2 - \eta(\hat{k}\psi)^2\right] dx\, dy + \\ + \frac{1}{2}\iint [\eta_x \hat{k}^{-1}\eta_x - \eta_x \hat{k}^{-1}\eta\hat{k}\eta_x + \eta\eta_x^2 + \\ + \eta_x(\nabla_\perp\eta \cdot \nabla_\perp \hat{k}^{-1}\eta_x)] dx\, dy, \qquad (12)$$

где $\hat{k}$ – двумерный интегральный оператор с ядром, фурье-образ которого равен модулю волнового вектора, то есть

$$\hat{k}\, e^{ik_x x + ik_y y} = k\, e^{ik_x x + ik_y y}.$$

При выводе выражения для гамильтониана учитывалось, что для гармонических функций, затухающих при $z \to -\infty$, справедливо

$$f_z|_{z=0} = \hat{k} f|_{z=0}, \quad f|_{z=\eta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n \hat{k}^n}{n!} f|_{z=0}.$$

Уравнения движения, соответствующие гамильтониану (12), имеют вид

$$\psi_t - \hat{k}^{-1}\eta_{xx} = \frac{1}{2}(\hat{k}\psi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla_\perp\psi)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\eta_x^2+\eta\eta_{xx}+\frac{1}{2}(\nabla_\perp\hat{k}^{-1}\eta_x)^2-$$

$$-\hat{k}^{-1}\partial_x(\eta\hat{k}\eta_x-\nabla_\perp\eta\cdot\nabla_\perp\hat{k}^{-1}\eta_x)+O(\alpha^3), \qquad (13)$$

$$\eta_t-\hat{k}\psi=-\hat{k}(\eta\hat{k}\psi)-\nabla_\perp(\eta\nabla_\perp\psi)+O(\alpha^3). \qquad (14)$$

Действуя оператором $\hat{k}$ на уравнение (13), дифференцируя (14) по t, а затем вычитая получившиеся выражения друг из друга, мы получим следующее уравнение на эволюцию поверхности:

$$\eta_{tt}-\eta_{xx}=\frac{1}{2}\hat{k}\left(\eta_x^2-\eta_t^2+(\nabla_\perp\hat{k}^{-1}\eta_x)^2-(\nabla_\perp\hat{k}^{-1}\eta_t)^2\right)+$$

$$+\nabla_\perp(\eta_x\nabla_\perp\hat{k}^{-1}\eta_x-\eta_t\nabla_\perp\hat{k}^{-1}\eta_t)+O(\alpha^3). \qquad (15)$$

Функция ψ была исключена из правой части этого уравнения при помощи выражения $\psi=\hat{k}^{-1}\eta_t+O(\alpha)$, следующего из (14).

Как и следовало ожидать, выражения (10) будут точными частными решениями нелинейного волнового уравнения (15), а при выполнении (11) оно превратится в тождество. Из (15) видно, что в линейном приближении эволюция поверхности задается волновым уравнением

$$\eta_{tt}=\eta_{xx}.$$

Поскольку переменная y не входит в это уравнение в явном виде, функция η будет зависеть от нее как от параметра. Общее решение волнового уравнения имеет вид

$$\eta(x,y,t)=f(x-t,y)+g(x+t,y), \qquad (16)$$

то есть представляет собой сумму частных решений (10) нелинейного уравнения (15), соответствующих распространяющимся в противоположном направлении волнам.

При рассмотрении волн малой, но конечной амплитуды естественно выбрать выражение (16) в качестве первого приближения. К нему требуется найти поправку, описывающую нелинейное взаимодействие встречных волн. Будем искать форму поверхности в виде

$$\eta=f(\xi,y)+g(\zeta,y)+h(\xi,\zeta,y),$$

где $\xi=x-t$, $\zeta=x+t$, а h – величина порядка α^2. Подстановкой в (15) получим уравнение, связывающее поправку h и функции f и g:

$$2h_{\xi\zeta}=-\hat{k}\left(f_\xi g_\zeta+\nabla_\perp\hat{k}^{-1}f_\xi\cdot\nabla_\perp\hat{k}^{-1}g_\zeta\right)-$$

$$-\nabla_\perp\left(f_\xi\nabla_\perp\hat{k}^{-1}g_\zeta+g_\zeta\nabla_\perp\hat{k}^{-1}f_\xi\right). \qquad (17)$$

Интегрируя его поочередно по ξ и по ζ, найдем

$$2h=-\hat{k}\,(fg+\nabla_\perp\hat{k}^{-1}f\cdot\nabla_\perp\hat{k}^{-1}g)-$$

$$-\nabla_\perp(f\nabla_\perp\hat{k}^{-1}g+g\nabla_\perp\hat{k}^{-1}f).$$

Важной особенностью подобной схемы построения решения является то, что в правой части выражения (17) присутствуют лишь перекрестные члены (это – прямое следствие того, что основной порядок в разложении представляет собой сумму точных частных решений). В противном случае интегрирование правой части привело бы к появлению секулярных членов, нарастающих пропорционально x и t, что нарушило бы условия применимости теории возмущений.

Возвращаясь к переменным x и t, находим, что в случае малых, но конечных α эволюция поверхности определяется следующим выражением:

$$\eta(x,y,t)=f(x-t,y)+g(x+t,y)-$$

$$-\frac{1}{2}\,\hat{k}\,(fg+\nabla_\perp\hat{k}^{-1}f\cdot\nabla_\perp\hat{k}^{-1}g)-$$

$$-\frac{1}{2}\,\nabla_\perp(f\nabla_\perp\hat{k}^{-1}g+g\nabla_\perp\hat{k}^{-1}f)+O(\alpha^3). \qquad (18)$$

Как видно из его структуры, оно описывает нелинейную суперпозицию встречных волн (10). Применительно к уединенным волнам подобное выражение означает, что при взаимодействии они сохраняют форму и фазу. Данное выражение представляет собой общее решение уравнений движения, полученное в малоугловом приближении. Оно содержит пару произвольных функций двух переменных, однозначно задающих форму поверхности и поле скоростей в начальный момент времени. Результаты этой части работы обобщают решения, полученные в [15] для плоских волн малой амплитуды, на трехмерный случай.

Отметим, что для 2D геометрии устойчивость волн произвольной амплитуды по отношению к мелкомасштабным возмущениям была продемонстрирована в работе [16]. Для 3D геометрии устойчивость волн малой амплитуды является прямым следствием решения (18).

Возможность построения точных решений для рассмотренного нами специального случая $\varepsilon\gg1$ и $\varepsilon E^2\gg\sqrt{\rho g\alpha}$ может оказаться полезной для анализа нелинейных волн при других значениях параметров задачи. Введение в рассмотрение капиллярных и гравитационных сил приведет к дисперсии волн, а при учете конечности диэлектрической проницаемости ε

будет наблюдаться тенденция к формированию особенностей за конечное время. Полученные решения могут служить нулевым приближением при анализе этих процессов.

Результаты настоящего исследования применимы для описания распространения волн по поверхности жидкости в горизонтальном магнитном поле с точностью до замены электрического поля E на магнитное поле H и диэлектрической проницаемости ε на магнитную проницаемость μ.

Данная работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты # 09-08-00198 и # 07-02-96035) и Фонда "Династия" в рамках Целевой программы поддержки интеграционных проектов УрО РАН и СО РАН и Программы Президиума РАН "Фундаментальные проблемы нелинейной динамики".

1. Н. М. Зубарев, О. В. Зубарева, Письма в ЖТФ **32**(20), 40 (2006).
2. Н. М. Зубарев, Письма в ЖЭТФ **71**, 534 (2000).
3. Н. М. Зубарев, ЖЭТФ **121**, 624 (2002).
4. N. M. Zubarev, Phys. Fluids **18**, 028103 (2006).
5. J. R. Melcher, *Field-Coupled Surface Waves*, MIT Press, Cambridge, MA, 1963.
6. М. И. Шлиомис, УФН **112**, 427 (1974).
7. M. F. El-Sayed and D. K. Callebaut, Physica A **269**, 235 (1999).
8. D. K. Rollins and B. K. Shivamoggi, Phys. Plasmas **8**, 2930 (2001).
9. M. F. El-Sayed, Eur. Phys. J. B **37**, 241 (2004).
10. D. T. Papageorgiou and J.-M. Vanden-Broeck, J. Fluid. Mech. **508**, 71 (2004).
11. J. R. Melcher, Phys. Fluids **4**, 1348 (1961).
12. В. Е. Захаров, ПМТФ 2, 86 (1968).
13. Е. А. Кузнецов, М. Д. Спектор, ЖЭТФ **71**, 262 (1976).
14. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, УФН **167**, 1137 (1997).
15. N. M. Zubarev, Phys. Lett. A **333**, 284 (2004).
16. Н. М. Зубарев, О. В. Зубарева, Письма в ЖТФ **34**(12), 82 (2008).