

# О фиктивной нелинейности поверхностного импеданса земной коры

А. В. Гульельми<sup>1)</sup>

Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, 123995 Москва, Россия

Поступила в редакцию 30 января 2009 г.

После переработки 24 февраля 2009 г.

Наблюдения альвеновских колебаний магнитосферы используют для изучения земной коры и верхней мантии методом магнитотеллурического зондирования. Процедура зондирования состоит в том, что измеряют горизонтальные компоненты электромагнитного поля в заданной точке на земной поверхности, вычисляют поверхностный импеданс и по нему судят об электропроводности горных пород. Показано, что ангармоничность колебаний магнитосферы в сочетании с нелокальностью граничного условия на земной поверхности приводит к амплитудной зависимости импеданса, вычисленного по классической методике магнитотеллурического зондирования. Эта кажущаяся нелинейность импеданса может проявляться при зондировании земных глубин с использованием мощных пульсаций электромагнитного поля, возникающих при погружении магнитосферы Земли в высокоскоростной поток солнечного ветра.

PACS: 91.25.Qi, 91.35.Gf, 94.30.Ms

**1. Введение.** В классической электродинамике известно граничное условие Леонтовича

$$\mathbf{E}_t = \zeta \mathbf{H}_t \times \mathbf{n}. \quad (1)$$

Оно приближенно выполняется на поверхности хорошо проводящих тел [1, 2]. Здесь  $\mathbf{E}_t$  и  $\mathbf{H}_t$  – касательные компоненты электрического и магнитного полей,  $\mathbf{n}$  – внутренняя нормаль к поверхности тела,  $\zeta$  – поверхностный импеданс. В геофизике граничное условие (1) используют при изучении земной коры и верхней мантии методом магнитотеллурического зондирования (МТЗ) [3–5].

Введем декартову систему координат  $(x, y, z)$  так, чтобы земная поверхность, которая предполагается плоской, совпала с плоскостью  $(x, y)$ , а ось  $z$  была бы направлена вниз. Тогда (1) примет вид

$$E_x = \zeta H_y, \quad E_y = -\zeta H_x. \quad (2)$$

Процедура МТЗ состоит в том, что по данным наблюдения магнитогидродинамических (МГД) колебаний магнитосферы Земли измеряют горизонтальные компоненты электромагнитного поля, вычисляют импеданс земной поверхности по формулам (2), а затем по частотной зависимости поверхностного импеданса судят о распределении электропроводности горных пород по глубине.

Все это хорошо известно и давно стало обыденной практикой при проведении геологоразведочных работ, но при внимательном рассмотрении неожиданно открывается важный момент, имеющий отношение к

вопросу о единстве электромагнитного поля в магнитосфере и в земной коре. В самом деле, на первый взгляд, казалось бы, нет никаких оснований ожидать, что импеданс земной поверхности  $\zeta$  будет зависеть от амплитуды МГД колебаний магнитосферы. Однако, с одной стороны, теория свидетельствует об ангармоничности колебаний магнитосферы [6, 7]. С другой стороны, граничное условие (1) является приближенным. В частности, оно не учитывает того факта, что связь между компонентами поля на поверхности тела, вообще говоря, не является локальной [8]. Покажем на простом примере, что ангармонизм колебаний магнитосферы в сочетании с нелокальностью граничного условия на земной поверхности приводит к мнимой (кажущейся) нелинейности поверхностного импеданса, вычисленного по формулам МТЗ.

**2. Резонансные колебания магнитосферы.** Резонансные МГД колебания магнитосферы наблюдаются на поверхности Земли и в космосе в диапазоне периодов от десятков до сотен секунд. Вдоль геомагнитных силовых линий они имеют вид стоячих волн Альвена, причем периоды колебаний определяются длиной силовых линий и количеством узлов на них между магнитосопряженными областями ионосферы. Поперечная структура волнового поля довольно своеобразна. По долготе поле имеет вид азимутальных гармоник, а по широте оно имеет характерную форму резонансной кривой с максимумом на резонирующей магнитной оболочке. В проекции на Землю резонансный профиль имеет вид

$$H_x(x) = H_x(x_R) / [1 + i(x_R - x) / \Delta]. \quad (3)$$

<sup>1)</sup>e-mail: guglielmi@mail.ru

Здесь  $H_x$  – комплексная амплитуда колебаний, ось  $x$  направлена вдоль геомагнитного меридиана на север,  $x_R(\omega)$  – проекция на Землю магнитной оболочки, резонирующей на данной частоте  $\omega$  под воздействием переменной вынуждающей силы,  $\Delta$  – полуширина альвеновского резонанса. Зависимость от времени здесь и ниже выбрана в виде  $\exp(-i\omega t)$ . (Более подробно о резонансах Альвена можно прочесть в монографии [9], содержащей обширную библиографию по данному вопросу.)

В упрощенной модели (3) резонансный профиль определяется двумя параметрами,  $x_R$  и  $\Delta$ . Амплитуда колебаний уменьшается в  $\sqrt{2}$  раза при удалении точки наблюдения  $x$  от резонанса  $x_R$  вдоль меридиана на расстояние  $\Delta$ . Параметры  $x_R$  и  $\Delta$  можно связать с  $L_R$  и  $\Delta L$ , где  $L$  – параметр МакИльвейна, который в дипольной магнитосфере равен геоцентрическому расстоянию до экватора магнитной оболочки, выраженному в радиусах Земли. Важно иметь в виду, что при данной частоте колебаний и фиксированном количестве узлов стоячей волны Альвена величины  $L_R$  и  $\Delta L$  зависят от радиального распределения плотности плазмы  $\rho(L)$  в экваториальной плоскости магнитосферы [9, 10].

**3. Ангармоничность резонансных колебаний.** Состояние исследования нелинейности МГД колебаний магнитосферы не просто описать в рамках данной короткой статьи. Поэтому может оказаться полезным, если мы заранее резюмируем результат, а затем просто поясним его в немногих общих выражениях. Результат, представляющий для нас специальный интерес, состоит в том, что с теоретической точки зрения не вызывает никакого сомнения ангармоничность резонансных колебаний магнитосферы, причем морфологически это свойство должно проявляться в зависимости параметров  $x_R$  и  $\Delta$  от амплитуды колебаний [6, 7].

Ангармоничность возникает в результате перераспределения плотности плазмы  $\rho$  вдоль геомагнитных силовых линий под влиянием усредненной по периоду колебаний и квадратичной по амплитуде пондеромоторной силы, которая действует таким образом, что плазма выталкивается из узлов и сгребается к пучностям электрического поля стоячей волны Альвена [6]. Ожидать заметных проявлений ангармонизма следует на том основании, что, по наблюдениям, плотность энергии колебаний соизмерима с плазменным давлением. В плазме достаточно низкого давления, помещенной в однородное магнитное поле, перепад плотности  $\rho$  между узлами и пучностями,

$$\rho_{\max}/\rho_{\min} = \exp[(Ec/2Hc_s)^2], \quad (4)$$

может быть экспоненциально большим. Здесь  $E$  – амплитуда колебаний электрического поля,  $c$  – скорость света,  $H$  – величина магнитного поля,  $c_s$  – скорость звука. Понятно, что в магнитосферной плазме расчет становится значительно более сложным. Рассмотрим, например, фундаментальную гармонику, имеющую пучность электрических колебаний на экваторе. Пондеромоторная сила “сгребает” плазму вдоль силовых линий геомагнитного поля по направлению к экватору. В результате даже при весьма умеренной интенсивности колебаний формируется немонокотное распределение плотности с максимумом на экваторе. Анализ баланса сил, действующих в продольном направлении по отношению к геомагнитному полю, свидетельствует о том, что максимум плотности  $\rho$  возникает при условии, что амплитуда колебаний превышает критическое значение:

$$E > E_c \approx M_E g_E^{1/2} / L^{7/2} R_E^{5/2} c. \quad (5)$$

Здесь  $M_E$  и  $R_E$  – магнитный момент и радиус Земли,  $g_E$  – ускорение силы тяжести на земной поверхности [11]. При  $L = 5$  мы имеем довольно низкий порог,  $E_c \approx 1$  мВ/м.

Если понимать критерий (5) буквально, то можно сделать вывод о гигантской ангармоничности колебаний Альвена, поскольку на опыте наблюдаются колебания с амплитудой, которая на порядок превышает пороговое значение  $E_c$ . Между тем прямые спутниковые наблюдения не дают указаний на появление большой экваториальной аномалии в распределении плотности плазмы при возбуждении фундаментальной гармоники колебаний Альвена. Что же касается наземных наблюдений, то они определенно свидетельствуют об амплитудной зависимости положения резонансной магнитной оболочки [12]. Однако на опыте не был обнаружен гигантский (экспоненциально большой) ангармонизм, которого, казалось бы, следовало ожидать на основе результатов аналитического [11] и численного [13] моделирования перераспределения плазмы в магнитосфере под воздействием стоячих волн Альвена. Это расхождение между экспериментом и теорией, по-видимому, связано с тем, что моделирование возмущения плотности производилось без учета магнитосферной конвекции. При наличии конвекции эффект пондеромоторного возмущения плотности уменьшится в результате переноса магнитосферной плазмы поперек волнового поля.

Умеренная ангармоничность обнаружена в работе [14] по наблюдениям колебаний с периодом  $T = 264$  с и средней амплитудой 60 нТл на сети магнитных обсерваторий IMAGE. В качественном соответ-

ствии с теоретическим ожиданием найдено смещение резонансного профиля по направлению к северу при уменьшении амплитуды колебаний. По величине смещения сделана ориентировочная оценка пондеромоторного возмущения плотности плазмы  $\delta g/g \sim 0.4$  на экваторе колеблющейся оболочки.

**4. Нелокальность граничного условия на земной поверхности.** Для применимости граничного условия Леонтовича необходимо, чтобы глубина проникновения поля в тело была мала по сравнению с вакуумной длиной волны, с радиусом кривизны поверхности, а также с характерными масштабами изменения поля и электропроводности среды вдоль поверхности тела. Соответствующие поправки к правой части (1) найдены в работе [8]. Нас интересуют только те поправки, которые нарушают локальность граничного условия на земной поверхности. Они возникают из-за горизонтальной неоднородности переменного магнитного поля.

Мы ограничимся простейшим случаем, когда нижнее полупространство ( $z \geq 0$ ) однородно, а поле зависит от  $x$  и  $z$ , но не зависит от  $y$ . Рассмотрим вначале электромагнитное поле, имеющее структуру поперечно-электрической волны (см., например, [2]). Его ненулевые компоненты  $E_y$ ,  $H_x$ ,  $H_z$  связаны между собой уравнениями квазистационарной электродинамики

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} \sigma E_y, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{i\omega}{c} H_z, \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{i\omega}{c} H_x. \quad (6)$$

Исключив  $H_z$  из первого уравнения с помощью второго, получим

$$E_y + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{c}{4\pi\sigma} \frac{\partial H_x}{\partial z}. \quad (7)$$

Здесь  $k = (1+i)/\delta$  – волновое число,  $\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}$  – толщина скин-слоя,  $\sigma$  – электропроводность. Приближенное выражение для производной  $\partial H_x/\partial z$  в (7) найдем методом параболического уравнения, используя уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k^2 H_x = 0, \quad (8)$$

которое следует из (6). Для этого сделаем в (8) замену

$$H_x(x, z) = H_x^{(0)}(x, z) \exp(ikz) \quad (9)$$

и учтем, что зависимость  $H_x^{(0)}(x, z)$  от маршевой переменной  $z$  значительно слабее, чем зависимость  $\exp(ikz)$ . В результате получим параболическое уравнение для комплексной амплитуды

$$2ik \frac{\partial H_x^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial^2 H_x^{(0)}}{\partial x^2} = 0. \quad (10)$$

С учетом (9), (10) уравнение (7) приобретает следующий вид:

$$E_y + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\zeta \left( H_x + \frac{1}{2k^2} \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} \right). \quad (11)$$

Здесь  $\zeta = \sqrt{\omega/8\pi\sigma}(1-i)$  и положено  $z = 0$ . Считая вторые члены в правой и в левой частях (11) малыми, запишем окончательно граничное условие с учетом горизонтальной неоднородности магнитного поля:

$$E_y = -\zeta \left( H_x + \frac{i\delta^2}{4} \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} \right). \quad (12)$$

Аналогично получаем приближенное граничное условие для поперечно-магнитной волны:

$$E_x = \zeta \left( H_y - \frac{i\delta^2}{4} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} \right). \quad (13)$$

Таким образом, связь между горизонтальными компонентами поля, вообще говоря, не является локальной. Граничное условие Леонтовича неприменимо, если поле изменяется недостаточно плавно вдоль земной поверхности. Необходимо отметить, что более общие, но и значительно более громоздкие формулы, аналогичные (12) и (13), получены другим путем в работе [8].

**5. Заключение.** В п.3 было сказано об ангармоничности МГД колебаний, которая проявляется в том, что параметры  $x_R$  и  $\Delta$  широтного профиля (3) зависят от амплитуды. Из нашего анализа следует, что с теоретической точки зрения ангармоничность колебаний в сочетании с нелокальностью граничного условия должна приводить к фиктивной нелинейности поверхностного импеданса, вычисленного по классической методике МТЗ. В самом деле, рассмотрим малую окрестность резонирующей магнитной оболочки ( $|x_R - x| \ll \Delta$ ). Подставляя (3) в (12), находим

$$E_y = -\zeta \left[ 1 - \frac{i}{2} \left( \frac{\delta}{\Delta} \right)^2 \right] H_x. \quad (14)$$

Мы видим, что нельзя игнорировать нелокальность граничного условия и возможную нелинейность поверхностного импеданса, вычисленного как отношение  $-E_y/H_x$ , если глубина проникновения электромагнитного поля в землю  $\delta$  не мала по сравнению с шириной резонанса  $\Delta$ . Если же  $\delta \ll \Delta$ , то можно производить МТЗ по стандартной методике, пренебрегая пространственной структурой и ангармонизмом колебаний Альвена.

Это качественное заключение основано на ряде убедительных, но все же косвенных аргументов. В

настоящее время его не удается подкрепить количественным расчетом. Поэтому целесообразно произвести соответствующие измерения. Особенно заметные проявления фиктивной нелинейности импеданса ожидаются от специфических колебаний в диапазоне 150–600 с, которые спорадически возбуждаются при обтекании магнитосферы Земли высокоскоростным потоком солнечной плазмы и обладают исключительно большой амплитудой [15].

Выражаю благодарность Р. Лундину и А.С. Потопову за обсуждение проблемы ангармоничности колебаний магнитосферы. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (# 07-05-00696, # 09-05-00048).

1. М. А. Леонтович, в кн. *Исследования по распространению радиоволн*, под ред. Б. А. Введенского, **2**, 5, М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1948.
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, М.: Наука, 1982.
3. М. Н. Бердичевский, *Электроразведка методом магнитотеллурического профилирования*, М.: Недра, 1968.
4. J. R. Wait, *Geoelectromagnetism*, New York: Academic Press, 1982.
5. А. В. Гульельми, УФН **158**, 605 (1989).
6. R. Lundin and A. Guglielmi, *Space Sci. Rev.* **127**, 1 (2006).
7. А. В. Гульельми, УФН **177**, 1257 (2007).
8. С. М. Рытов, ЖЭТФ **10**, 180 (1940).
9. A. V. Guglielmi and O. A. Pokhotelov, *Geoelectromagnetic waves*, Bristol and Philadelphia: IOP Publ. Ltd., 1996.
10. A. Nishida, *Geomagnetic diagnosis of the magnetosphere*, New York: Springer-Verlag, 1978.
11. A. V. Guglielmi, *J. Geophys. Res.* **102**, 209 (1997).
12. A. V. Guglielmi, B. I. Klain, and O. D. Zotov, *Proc. of the 7th Intern. Conf. "Problems of Geocosmos"*. St. Petersburg, May 26-30, 2008, Eds. V. N. Troyan, M. Hayakawa, and V. S. Semenov, SPb, 2008. ISBN 978-5-9651-0303-4, p. 91–95, 2008.
13. W. Allan, *J. Geophys. Res.* **98**, 1409 (1993).
14. A. Guglielmi and A. Potapov, *Geophys. Res. Abstracts* **11**, EGU2009-3339 (2009).
15. A. Potapov, T. Polyushkina, T. L. Zhang et al., *Chin. J. Space Sci.* **25**, 386 (2005).