Письма в ЖЭТФ, том 89, вып. 8, с. 449 – 453 © 2009 г. 25 апреля

О неполноте фермионных мод Унру в пространстве Минковского

А. М. Федотов, Н. Б. Нарожный[1]*, В. Д. Мур, Е. Г. Гельфер*

Московский инженерно-физический институт (государственный университет), 115409 Москва, Россия

Поступила в редакцию 11 марта 2009 г.

Показано, что на световом конусе бустовы моды двумерных фермионов выражаются через дельта-функцию комплексного аргумента. Поэтому разбиение на части интегралов по всей области изменения бустового параметра недопустимо, и квантование Унру справедливо лишь в двойном риндлеровском клине, а не во всем пространстве Минковского. Это означает, что, независимо от статистики частиц, "эффект" Унру отсутствует. Таким образом, как теоретические предсказания, так и многочисленные предложения по постановке экспериментов, основанные на предположении о существовании такого эффекта, несостоятельны.

PACS: 03.70.+k, 04.70.Dy

1. Согласно работам [1, 2], риндлеровский, то есть равноускоренный, наблюдатель воспринимает обычное вакуумное состояние $|0_M\rangle$ любого квантованного поля так, как если бы он находился в термостате частиц Фуллинга-Унру [2, 3] с температурой $T_{DU} = \hbar g/2\pi c$, где g – собственное ускорение детектора. Эту температуру называют обычно температурой Дэвиса-Унру, а эффект "термолизации" вакуума Минковского, рассматриваемого с точки зрения риндлеровской системы отсчета, – "эффектом" Унру[2].

Схема квантвания Унру была детально исследована в работах [7, 8] на примере скалярного поля в двумерном пространстве-времени, и было показано, что она приводит к квантовой теории поля в двойном риндлеровском клине, то есть объединении правого и левого секторов в разбиении пространства Минковского световым конусом, см. рис. 1 в [7]. Это означает, что квантование Унру приводит лишь к независимым правым и левым частицам Фуллинга-Унру, так что о "термолизации" вакуума говорить не приходится.

Однако в последнее время в связи с бурным развитием лазерной техники появляются предложения по экспериментальной проверке [9 – 13] "эффекта" Унру при взаимодействии электронов с интенсивными ультракороткими электромагнитными импульсами, а также о реализации на его основе запутанных состояний как бозонов, так и фермионов [14 – 18]. Поэтому рассмотрение задачи Унру в контексте фермионных полей не только принципиально важно, но и своевременно.

Мы обсудим ее на примере двумерного фермионного поля, когда все значительно упрощается, в особенности для безмассовых частиц. Хотя фермионный случай кардинально отличается от скалярного в математическом отношении, результат, естественно, такой же – "эффект" Унру не существует при любой статистике частиц.

2. Рассмотрим свободное двухкомпонентное поле $\psi(x)$, удовлетворяющее уравнению

$$\left(i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^1\frac{\partial}{\partial z} + m\right)\psi(x) = 0,$$
$$[\gamma^\mu,\gamma^\nu]_+ = g^{\mu\nu}, \quad \psi(x) = \psi_+(x)e_+ + \psi_-(x)e_-, \tag{1}$$

где $\hbar = c = 1$, $g = \mathrm{diag}\,\{1,-1\}$, $x = (t,z)$, а e_σ – нормированные собственные векторы матрицы Паули σ_3, $\sigma_3 e_\sigma = \sigma e_\sigma$, $\sigma = \pm$. Поле $\psi(x)$ мы будем называть фермионным полем, а уравнение (1) уравнением Дирака [19].

В простейшем случае безмассового поля, $m = 0$, в специальном представлении двумерных матриц Дирака $\gamma^0 = \sigma_1$, $\gamma^1 = i\sigma_2$ (так что $\gamma^1\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^1 = \sigma_3$), уравнения для верхней (сигнатура $\sigma = +$) и нижней ($\sigma = -$) компонент поля расцепляются, и существует два набора плоских волн:

---

[1]e-mail: narozhny@theor.mephi.ru

[2]См., например, обзоры [4, 5] и указанные там дальнейшие литературные ссылки. Заметим, что авторы работы [6] под универсальностью понимают очевидный факт возможного возбуждения детектора, движущегося под действием внешнего поля с постоянным линейным или круговым ускорением, и отождествляют это обстоятельство с "эффектом" Унру. Такое расширительное толкование этого термина неконструктивно и не имеет никакого отношения к обычно рассматриваемой проблеме.

$$\varphi_{p\sigma}(x_\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipx_\sigma}, \qquad (2)$$

$$0 < p < \infty, \quad \sigma = \pm, \quad x_\pm = t \pm z,$$

распространяющихся влево и вправо вдоль оси z.

Поскольку мировая линия риндлеровского наблюдателя совпадает с одной из орбит группы Лоренца, для квантования поля в рассматриваемой задаче удобно использовать не плоские волны, а бустовы моды $\chi_{\kappa\sigma}$, то есть нормированные собственные функции генератора буста:

$$\mathcal{B}\chi_{\kappa\sigma}(x)e_\sigma = \kappa\chi_{\kappa\sigma}(x)e_\sigma, \quad -\infty < \kappa < \infty,$$

$$\mathcal{B} = i\left(x_+\frac{\partial}{\partial x_+} - x_-\frac{\partial}{\partial x_-} + \frac{1}{2}\sigma_3\right), \qquad (3)$$

удовлетворяющие уравнению (1). Бустовы моды связаны с плоскими волнами (2) преобразованием Меллина [20]:

$$\chi_{\kappa\sigma}(x_\sigma) = \int\limits_0^\infty \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} p^{\lambda-1}\varphi_{p\sigma}(x_\sigma) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}\lambda}\Gamma(\lambda)}{2\pi(x_\sigma - i\epsilon)^\lambda}, \qquad (4)$$

$$\lambda = s + i\sigma\kappa, \quad s = \frac{1}{2}.$$

Здесь $\Gamma(\lambda)$ – гамма-функция Эйлера, $\epsilon \to 0$, а обобщенные функции

$$(x + i\sigma\epsilon)^{-\lambda} = x^{-\lambda}\theta(x) + e^{-i\pi\sigma\lambda}(-x)^{-\lambda}\theta(-x) \qquad (5)$$

($\theta(x)$ – ступенчатая функция Хевисайда), определенные в [21], являются целыми аналитическими функциями λ.

Нетрудно видеть, что бустовы моды (4) имеют особенность на световом конусе $x_\sigma = 0$, причем гораздо более сильную, чем в скалярном случае [7]. Они являются сингулярными обобщенными функциями комплексной переменной κ. Соответствующий им функционал

$$\mathcal{F}(h) = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi}\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}\lambda}\Gamma(\lambda)}{(x_\sigma - i\epsilon)^\lambda}h(\kappa) \qquad (6)$$

определен на классе функций $h(\kappa)$, аналитических и быстро убывающих при $|\kappa| \to \infty$ в полосе

$$-s - \varepsilon \le \operatorname{Im}\kappa \le s + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \qquad (7)$$

Можно показать, что при $x_\sigma = 0$ для аналитической в полосе (7) функции $h(\kappa)$ справедливо равенство

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi}\frac{\Gamma(s \pm i\kappa)}{\epsilon^{s\pm i\kappa}}h(\kappa) = h(\pm is). \qquad (8)$$

Поэтому на световом конусе бустовы моды (4) спинорного поля

$$\chi_{\kappa\pm}(x_\pm = 0) = \delta(\kappa \mp is), \quad s = \frac{1}{2}, \qquad (9)$$

то есть в отличие от бустовых мод скалярного поля [7], для которых $s = 0$, выражаются не через обычную дельта-функцию Дирака, а через дельта-функцию комплексного аргумента [21]:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(\kappa \mp is)h(\kappa)d\kappa = h(\pm is). \qquad (10)$$

Подчеркнем, что для того, чтобы равенство

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\frac{\Gamma(s \pm i\kappa)}{\epsilon^{s\pm i\kappa}} = \delta(\kappa \mp is) \qquad (11)$$

было справедливым, необходимо, чтобы интегрирование в (8) проводилось по всей вещественной оси, а не по какой-либо ее части. Это является следствием того обстоятельства, что, согласно [21], функционал (8), или (10), определяется с помощью теоремы Коши об интеграле по замкнутому контуру, который в нашем случае деформировался во всю вещественную ось комплексной переменной κ.

3. Набор бустовых мод, так же как и плоских волн, полон и ортонормирован. Поэтому он тоже может служить базисом для квантования свободного поля

$$\Psi(x) = \sum_{\sigma=\pm}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\kappa\left\{b_{\kappa\sigma}\chi_{\kappa\sigma}(x_\sigma) + \tilde{b}^+_{\kappa\sigma}\chi^*_{\kappa\sigma}(x_\sigma)\right\}e_\sigma. \qquad (12)$$

Операторы $b_{\kappa\sigma}$ и $\tilde{b}_{\kappa\sigma}$ подчиняются стандартным антикоммутационным соотношениям, являются операторами уничтожения безмассовых фермионов и антифермионов с бустовым параметром κ, сигнатурой σ и определяют вакуум Минковского

$$b_{\kappa\sigma}|0_M\rangle = \tilde{b}_{\kappa\sigma}|0_M\rangle = 0, \quad -\infty < \kappa < \infty, \quad \sigma = \pm. \qquad (13)$$

Отметим, что рассматриваемый класс основных функций $h(\kappa)$ гарантирует конечность энергии нормированного одночастичного состояния.

С учетом трансляционной инвариантности и равенств (9) как положительно частотная

$$S^{(+)}(x) = i\langle 0_M|\Psi(x')\Psi^+(x'')|0_M\rangle =$$

$$= i\sum_{\sigma=\pm}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\kappa\chi_{\kappa\sigma}(x'_\sigma)\chi^*_{\kappa\sigma}(x''_\sigma)e_\sigma e^+_\sigma, \quad x = x' - x'', \qquad (14)$$

так и отрицательно частотная $S^{(-)}(x)$ функции Вайтмана [22, 23] вычисляются элементарно:

$$S^{(\pm)}(x) = i\,\mathrm{diag}\left\{\pm\chi_{-\frac{i}{2}+}(\pm x_+),\ \pm\chi_{\frac{i}{2}-}(\pm x_-)\right\} = \\ = \frac{1}{2\pi}\mathrm{diag}\left\{\frac{1}{x_+\mp i\epsilon},\ \frac{1}{x_-\mp i\epsilon}\right\},\quad \epsilon\to 0. \tag{15}$$

Отсюда для перестановочной функции безмассового фермионного поля имеем

$$S_{\alpha\beta}(x) = S^{(+)}_{\alpha\beta}(x) + S^{(-)}_{\alpha\beta}(x) = i[\Psi_\alpha(x')\Psi^+_\beta(x'')]_+ = \\ = i\begin{pmatrix}\delta(x_+) & 0\\ 0 & \delta(x_-)\end{pmatrix}_{\alpha\beta},\quad \alpha,\beta = +,-, \tag{16}$$

так что $S(x)|_{t=0} = i\delta(z)\mathrm{diag}\{1,1\}$, и для операторов поля выполняются одновременные канонические перестановочные соотношения.

4. Следуя рецепту Унру [2], вместо оператора свободного поля Дирака (12) приходим к оператору поля Унру:

$$^{U}\Psi(x) = \sum_{\sigma=\pm}\int\limits_0^\infty d\mu\{r_{\mu\sigma}R_{\mu\sigma}(x_\sigma) + \tilde{r}^+_{\mu\sigma}R^*_{\mu\sigma}(x_\sigma) + \\ + l_{\mu\sigma}L^*_{\mu\sigma}(x_\sigma) + \tilde{l}^+_{\mu\sigma}L_{\mu\sigma}(x_\sigma)\}e_\sigma. \tag{17}$$

Здесь правые (левые) моды Унру равны

$$R_{\mu\sigma}(L_{\mu\sigma}) = \frac{e^{\mp i\frac{\pi}{2}\nu}\chi_{\mu\sigma}(x_\sigma) - e^{\pm i\frac{\pi}{2}\nu}\chi^*_{-\mu\sigma}(x_\sigma)}{\sqrt{2\cosh\pi\mu}} = \\ = \pm\frac{e^{i\arg\Gamma(\nu)}}{i\sqrt{2\pi}}(\pm x_\sigma)^{-\nu}\theta(\pm x_\sigma) \tag{18}$$

($\nu = 1/2 + i\sigma\mu$, верхний знак для правых, нижний – для левых мод), а $r_{\mu\sigma}$ и $\tilde{r}_{\mu\sigma}$ ($l_{\mu\sigma}$ и $\tilde{l}_{\mu\sigma}$) – операторы уничтожения правых (левых) фермионов и антифермионов Фуллинга-Унру, например,

$$r_{\mu\sigma} = \frac{i}{\sqrt{2\cosh\pi\mu}}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}\nu}b_{\mu\sigma} + e^{i\frac{\pi}{2}\nu}\tilde{b}^+_{-\mu\sigma}\right\}. \tag{19}$$

Они подчиняются стандартным перестановочным соотношениям и определяют “вектор состояния” $|0_U\rangle$:

$$r_{\mu\sigma}|0_U\rangle = \tilde{r}_{\mu\sigma}|0_U\rangle = l_{\mu\sigma}|0_U\rangle = \tilde{l}_{\mu\sigma}|0_U\rangle = 0. \tag{20}$$

Аналогичный результат для скалярного поля интерпретировался Унру [2] как существование в пространстве Минковского двух различных вакуумов $|0_M\rangle$ и $|0_U\rangle$, отвечающих различным фоковским представлениям пространства состояний. Однако такое заключение ошибочно. Действительно, при переходе от оператора свободного поля (12) к оператору (17) был использован прием Унру

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\kappa f(\kappa) = \int\limits_{-\infty}^{-\delta} d\kappa f(\kappa) + \int\limits_{\delta}^{\infty} d\kappa f(\kappa) = \\ = \int\limits_{\delta}^{\infty} d\mu\{f(\mu) + f(-\mu)\},\quad \delta\to 0, \tag{21}$$

Такая процедура безболезненна только для полей вне светового конуса, $x_\pm \neq 0$. Действительно, как было показано выше, бустовы моды на световом конусе (9) являются дельта-функциями комплексного переменного. Причем, это свойство имеет место только если интегрирование по переменной κ в (12) ведется по всей вещественной оси. При разбиении (21) характер сингулярности обобщенной функции $\chi_{\kappa\sigma}(0)$ существенно меняется. Равенство (9) перестает быть справедливым, то есть $\chi_{\kappa\sigma}(0)$ не является больше дельта-функцией комплексного аргумента. В результате, так же, как и в скалярном случае [7], прием Унру ведет к исчезновению из полного набора бустовых мод сингулярной δ-функционной моды, что делает его неполным. Более того, в фермионном случае прием Унру приводит к тому, что, по крайней мере, некоторые характеристики квантованного поля вообще теряют смысл. Мы продемонстрируем это на примере положительно частотной функции Вайтмана (14) с помощью прямого вычисления.

В результате процедуры Унру матричный элемент $S^{(+)}_{++}(x)$ (мы предварительно воспользовались в представлении (14) свойством трансляционной инвариантности) приобретает вид

$$^{U}S^{(+)}_{++}(x) = i\int\limits_{-\infty}^{-\delta} d\kappa\chi_{\kappa+}(x_+)\chi^*_{\kappa+}(0) + \\ + i\int\limits_{\delta}^{\infty} d\kappa\chi_{\kappa+}(x_+)\chi^*_{\kappa+}(0) \equiv {}^{U}I_{-\delta} + {}^{U}I_{+\delta},\quad \delta\to 0. \tag{22}$$

Используя (4) нетрудно получить

$$^{U}I_{\pm\delta} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{e^{i\pi/4}}{8\pi^2\sqrt{\epsilon x_+}}\frac{e^{\pm\pi\delta/2}}{\cosh\pi\delta}\frac{e^{\mp i\delta\ln\frac{x_+}{\epsilon}}}{v_\pm}\times \\ \times {}_2F_1\left(1,1;1+v_\pm;\frac{e^{-\pi\delta}}{2\cosh\pi\delta}\right), \tag{23}$$

где $v_\pm = 1/2 \mp 1/4 \pm (i/2\pi)\ln x_+/\epsilon$. При $\epsilon\to 0$, $|v_\pm|\to \to\infty$. Тогда

$$^{U}S^{(+)}_{++}(x) = -\lim_{\epsilon\to 0}\frac{e^{i\pi/4}}{2\pi\sqrt{\epsilon x_+}}\frac{\sin(\delta\ln\frac{x_+}{\epsilon})}{\ln\frac{x_+}{\epsilon}}. \tag{24}$$

Предел в правой части этого равенства очевидно не существует и, следовательно, прием Унру является некорректным.

Для устранения этой некорректности необходимо сделать набор бустовых мод несингулярным. Поскольку их особенности сосредоточены на световом конусе, это возможно только за счет выбрасывания из пространства Минковского светового конуса, а вместе с ним, прошлого и будущего секторов, ср. с [7]. Следовательно, так же, как и в скалярном случае, квантование Унру является содержательным только в двойном риндлеровском клине. В полном пространстве Минковского совокупность правых и левых мод Унру не полна, а значит квантование Унру не может привести к последовательной квантовой теории.

Отметим, что авторы обзора [5] придерживаются противоположной точки зрения. Рассматривая случай скалярного поля, они правильно замечают, что двухточечная функция Вайтмана, ср. с (14), вычисленная в соответствии с рецептом Унру, становится неопределенной, когда одна из точек находится на световом конусе, ср. с (24). Тем не менее, это обстоятельство авторы обзора считают несущественным, ссылаясь на то, что функция Вайтмана является обобщенной, определенной на основных функциях с компактным носителем. Это значит, что смысл имеет лишь интеграл от нее с функциями, принадлежащими к множеству бесконечно гладких финитных функций. Согласно авторам обзора [5], при таком сглаживании нефизические особенности функции ${}^U S^{(+)}(x', x'')$ на световом конусе должны устраниться. Если бы этот аргумент был правильным, то он с равным успехом был бы применим и к рассматриваемому в настоящей работе случаю фермионного поля. В действительности, даже если предположить, что получаемая в результате процедуры Унру (21) функция ${}^U S^{(+)}(x', x'')$ совпадет со стандартной функцией Вайтмана $S^{(+)}(x' - x'')$ в пространстве Минковского в смысле обобщенных функций, то тогда, благодаря трансляционной инвариантности последней, можно было бы утверждать, что сглаженная функция ${}^U S^{(+)}[f_1, f_2] = \int dx' dx'' {}^U S^{(+)}(x', x'') f_1(x') f_2(-x'')$ имеет вид $\int dx\, {}^U S^{(+)}(x, 0) F(x)$, где $F = f_1 * f_2$ – свертка [22, 23] используемых для сглаживания основных функций. Однако нетрудно убедиться в том, что такое сглаживание не устраняет особенности (24), ср. с [8]. Поэтому утверждение авторов работы [5] является ошибочным.

5. Мы видели, что причина несостоятельности процедуры Унру одинакова для случаев бозонного и фермионного полей. Она состоит в сингулярности бустовых мод на световом конусе. Однако между этими двумя случаями существуют и важные различия. Поскольку двумерные безмассовые бозоны не существуют даже как математический объект [19], то проследить эти отличия можно только на примере массивных частиц.

Положительно частотные бустовы моды для массивных фермионов равны

$$\psi_\kappa^{(+)}(x) = \frac{\sqrt{m}}{2^{3/2}\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dq e^{-im(t\cosh q - z\sinh q)} \begin{pmatrix} e^{-i\kappa q - sq} \\ -e^{-i\kappa q + sq} \end{pmatrix}, \tag{25}$$

$s = 1/2$, а интегральное представление для скалярных бустовых мод [7] имеет вид

$$\phi_\kappa(x) = \frac{1}{2^{3/2}\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dq e^{-im(t\cosh q - z\sinh q) - i\kappa q}. \tag{26}$$

Легко видеть, что в вершине светового конуса $x = (0,0)$ степень расходимости интегралов, представляющих фермионную моду (25), существенно выше, чем в (26). По этой причине обобщенные функции $\psi_\kappa^{(+)}(x)$ и $\phi_\kappa(x)$ определены в разных функциональных пространствах, $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{S}$, соответственно. Пространство $\mathcal{Z}$ состоит из функций, аналитических в полосе (7), а $\mathcal{S}$ – из быстроубывающих функций вещественного переменного.

Интересно отметить, что если рассматривать величину s в (25) как непрерывный параметр, то интеграл в скалярном случае получается из интегралов (25) предельным переходом $s \to 0$. При этом полоса (7) вырождается в вещественную ось комплексной плоскости κ, а пространство функций $\mathcal{Z}$ превращается в $\mathcal{S}$. На вещественную ось, а именно в точку $\kappa = 0$, садятся и особенности бустовых мод, ранее расположенных на мнимой оси в точках $\kappa = \pm is$. Это и объясняет, почему процедура Унру в скалярном и фермионном случаях приводит к различным последствиям, например, при вычислении функции Вайтмана. В скалярном случае $\phi_\kappa(0) \sim \delta(\kappa)$, и выкалывание из спектра всего одной точки $\kappa = 0$ зануляет функцию Вайтмана. У бустовых мод в фермионном случае нет особенностей при вещественных κ, и, казалось бы, выкалывание одной точки спектра не должно изменить значение интеграла. Однако, как мы видели раньше, разрыв контура интегрирования в формулах типа (6) приводит к бессмысленным расходящимся выражениям. Разумеется, несмотря на это различие, результат один и тот же: прием Унру делает набор бустовых мод неполным. То же самое утверждение справедливо и для любого другого набора, состоящего из их произвольных комбинаций, в том числе и для набора мод Унру.

6. Итак, как в случае скалярного, так и в случае фермионного полей набор мод Унру неполон в пространстве Минковского. Для того чтобы придать смысл соотношению полноты для набора бустовых мод с выброшенной спектральной точкой $\kappa = 0$, из которых строятся моды Унру, необходимо исключить из пространства Минковского световой конус, ограничиваясь рассмотрением полей в двойном риндлеровском клине. Поскольку левое и правое пространства Риндлера при этом становятся абсолютно независимыми, то на основе "эффекта" Унру невозможно конструировать перепутанные состояния и рассматривать вопросы квантовых сообщений между риндлеровским и инерциальным наблюдателями. Такие задачи следует формулировать и решать в рамках стандартной квантовой теории поля в пространстве Минковского.

То же самое касается и эффектов взаимодействия релятивистских электронов с интенсивными лазерными пучками. В частности, предложенное в работах [11] в качестве "подписи" эффекта Унру излучение электроном в сильном лазерном поле пар скоррелированных друг с другом фотонов был ранее предсказан и изучен стандартными методами, например, в работе [24], и в действительности не имеет к эффекту Унру никакого отношения.

Авторы выражают глубокую благодарность А.А. Белавину и участникам руководимого им семинара, а также В.А. Белинскому, Б.М. Карнакову и В.С. Попову за плодотворные обсуждения вопросов, рассмотренных в этой статье. Эта работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований и грантом Минобрнауки РФ РНП 2.1.1/1871.

1. P. C. W. Davies, J. Phys. A **8**, 609 (1975).
2. W. G. Unruh, Phys. Rev. D **14**, 870 (1976).
3. S. A. Fulling, Phys. Rev. D **7**, 2850 (1973).
4. D. W. Sciama, P. Candelas, and D. Deutsch, Adv. Phys. **30**, 327 (1981).
5. L. C. B. Crispino, A. Higuchi, and G. E. A. Matsas, Rev. of Mod. Phys. **80**, 788 (2008).
6. E. T. Akhmedov and D. Singleton, Письма в ЖЭТФ **86**, 702 (2007).
7. N. B. Narozhny, A. M. Fedotov, B. M. Karnakov et al., Phys. Rev. D **65**, 025004 (2002).
8. N. B. Narozhny, A. M. Fedotov, B. M. Karnakov et al., Phys. Rev. D **70**, 048702 (2004).
9. P. Chen and T. Tajima, Phys. Rev. Lett. **83**, 256 (1999).
10. A. Ringwald, arXiv:hep-ph/0112254v1.
11. R. Schützhold, G. Schaller, and D. Habs, Phys. Rev. Lett. **97**, 121302 (2006); *ibid.* **100**, 091301 (2008).
12. N. Obadia, Phys. Rev. D **76**, 045013 (2007).
13. F. Bell, arXiv:0809.1505.
14. I. Fuentes-Schuller and R. B. Mann, Phys. Rev. Lett. **95**, 120404 (2005).
15. P. M. Alsing, I. Fuentes-Schuller, R. B. Mann, and T. E. Tessier, Phys. Rev. A **74**, 032326 (2006).
16. G. Adesso, I. Fuentes-Schuller, and M. Ericsson, Phys. Rev. A **76**, 062112 (2007).
17. K. Bradler, Phys. Rev. A **75**, 022311 (2007).
18. M. Han, S. J. Olson, and J. P. Dowling, Phys. Rev. A **78**, 022302 (2008).
19. А. С. Вайтман, *Проблемы релятивистской динамики квантованных полей*, М.: Наука, 1968.
20. И. Снеддон, *Преобразования Фурье*, М.: ИЛ, 1955.
21. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, вып. 1, М.: ФМ, 1955.
22. Р. Йост, *Общая теория квантованных полей*, М.: Мир, 1967.
23. Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, И. Т. Тодоров, *Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля*, М.: Наука, 1969.
24. D. A. Morozov and V. I. Ritus, Nuclear Physics B **86**, 309 (1975).