

Серфотронное ускорение в электромагнитных волнах с малой фазовой скоростью

А. И. Нейштадт^{+,*}, А. В. Артемьев^{+,1)}, Л. М. Зеленый⁺, Д. Л. Вайнштейн^{+,∇}

⁺Институт космических исследований РАН, 117997 Москва, Россия

^{*}Dept. of Math. Sciences, Loughborough University, LE11 3TU Loughborough, UK

[∇]Dept. of Mechanical Engineering, Temple University, PA 19122 Philadelphia, USA

Поступила в редакцию 10 марта 2009 г.

Обнаружена возможность неограниченного серфотронного ускорения нерелятивистских заряженных частиц медленными электромагнитными волнами и описан захват в режим такого ускорения. Рассмотрена область параметров, в которой существует эффект захвата и ускорения. Проведены оценки вклада данного механизма в рост энергии заряженных частиц в земной магнитосфере.

PACS: 05.45.—a, 94.05.Pt

Серфотронным ускорением заряженных частиц называется их ускорение плазменной волной в направлении вдоль фронта волны, обеспечиваемое присутствием стационарного магнитного поля (см., например, [1], гл. 8, § 4). На возможность такого ускорения ударной волной указано в [2]. В работах [3–6] рассматривалось ускорение электростатической волной, распространяющейся перпендикулярно магнитному полю. Волна предполагалась синусоидальной высокочастотной (частота волны много больше ларморовской частоты вращения частицы). Предполагалось, что частица изначально находится на дне потенциального рва, созданного совместным влиянием волны и магнитного поля. Было показано, что энергия нерелятивистской частицы при ускорении растет лишь до определенного предела [3, 4]. Затем потенциальный ров исчезает и ускорение прекращается. Ультрарелятивистская частица при некоторых соотношениях между параметрами задачи ускоряется неограниченно: ее скорость все больше приближается к скорости света, а энергия неограниченно растет [5] (термин “серфотронное ускорение” был первоначально предложен при описании именно этого явления). Исследовался также и случай, когда изначально частица не находилась в потенциальном рве. В этом случае основное воздействие на частицу волна оказывает вблизи черенковского резонанса, когда проекция скорости частицы на направление распространения волны близка к фазовой скорости волны. Вдали от резонанса воздействием волны на частицу можно пренебречь и считать, что частица в главном приближении движется по ларморовской окружност-

ти. Однако в ходе этого движения проекция скорости частицы на направление распространения волны изменяется, и, если абсолютная величина скорости частицы больше фазовой скорости волны, то неизбежно должен возникнуть резонанс. Анализ происходящих при этом явлений приводит к известной общей задаче о резонансах в системах с быстрыми и медленными движениями ([7], гл. 6, § 1.7). При этом возможен захват в резонанс: частица захватывается в потенциальный ров и начинает двигаться так, чтобы поддерживалось состояние резонанса. Это и есть захват в режим серфотронного ускорения, который возможен и для нерелятивистской [8, 9], и для релятивистской частиц [10]. В [11, 12] результаты [10] распространены на случай электростатической волной, распространяющейся не перпендикулярно магнитному полю. Случай ультрарелятивистской частицы и электромагнитной волны был рассмотрен в [11, 13].

В настоящей работе рассматривается возможность серфотронного ускорения нерелятивистской частицы плазменной электромагнитной волной, распространяющейся перпендикулярно стационарному постоянному магнитному полю. Основным результатом состоит в том, что в данной конфигурации полей частица, захватившись в режим серфотронного ускорения, уже не покидает потенциальный ров и неограниченно ускоряется. Если же параметры задачи таковы, что серфотронное ускорение невозможно (нет потенциального рва), то энергия частицы испытывает изменения при каждом переходе через резонанс, но накопление этих изменений ведет к ограниченному росту энергии (энергия частицы ε не может превысить некоторого значения ε^*).

¹⁾e-mail: artemyev@iki.rssi.ru

Структурно работа разделена на три части. В первой части обсуждается возможность захвата частицы волной и изучается дальнейшее ускорение этой частицы. Во второй части речь идет о движении частицы в отсутствие захвата в резонанс и разобран диффузионный механизм набора энергии. И, наконец, третья часть посвящена рассмотрению тех диапазонов параметров, в которых наблюдаются эффекты захвата и ускорения. При этом, если большинство работ по серфотронному ускорению посвящено релятивистским пределам и, таким образом, изучаемые эффекты характерны для межзвездного пространства [14–16], то в этой работе мы рассматриваем спектр параметров, характерных для геофизики.

Рассматриваемая задача имеет плоскую геометрию: частицы движутся в плоскости (x, y) , перпендикулярно которой действует магнитное поле $B_z(x, y, t)$. Это поле представляет собой сумму постоянной компоненты B_0 и поля электромагнитной волны $B_1 = \tilde{B}_1 \sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$. Электрическое поле определяется из уравнений Максвелла ($\text{rot } \mathbf{E} = -c^{-1} \mathbf{e}_z \partial B_z / \partial t$) и параллельно плоскости (x, y) ; его компоненты: $E_x(x, y, t)$ и $E_y(x, y, t)$.

Уравнения движения заряженной частицы с массой m и зарядом e в такой конфигурации полей выглядят следующим образом: $m d\mathbf{v}/dt = e\mathbf{E} + eB_z(\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z)/c$ и $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$.

Захват частицы волной. Будем считать, что волна распространяется вдоль оси y : $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_y$, и обозначим ее фазовую скорость через $v_\phi = \omega/k$ (случай волны с $kv_\phi \gg b_n$, $b_n = eB_0/mc$ рассматривается аналитически, но численные результаты будут представлены для более широкого набора параметров). Тогда уравнения движения частицы примут вид

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \delta v_\phi \sin(\phi) + (b_n - \delta \sin(\phi)) v_y, \\ \dot{v}_y &= -(b_n - \delta \sin(\phi)) v_x. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\phi = k(y - v_\phi t) + \phi_0$ – фаза волны и $\delta = -e\tilde{B}_1/mc$ – ее амплитуда. Система (1) приводится к безразмерным переменным введением временного масштаба t_0 ($\delta \rightarrow t_0 \delta$, $b_n \rightarrow t_0 b_n$), пространственного масштаба l_0 ($\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}/l_0$, $k \rightarrow kl_0$) и связанного с ними масштаба по скоростям $u = l_0/t_0$ ($\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}/u$, $v_\phi \rightarrow v_\phi/u$). Добавим к системе уравнений (1) уравнение $\dot{\phi} = k(v_y - v_\phi)$. В полученной системе уравнений при $kv_\phi \gg b_n$ переменные v_x, v_y медленные, а переменная ϕ вдали от резонанса, где $v_y \approx v_\phi$, может рассматриваться как быстрая. Для приближенного описания динамики вдали от резонанса усредним правую часть полученной системы уравнений по быстрой пе-

ременной ϕ . Получим уравнения, описывающие ларморовское движение: $\dot{v}_x = b_n v_y$, $\dot{v}_y = -b_n v_x$. Ларморовская окружность $v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 = \text{const}$ на плоскости v_x, v_y пересекает резонансную прямую $v_y = v_\phi$ в двух точках (считаем, что $v_0 > v_\phi > 0$). Для описания динамики вблизи резонанса учтем, что $\dot{\phi} \approx 0$, и будем использовать $\phi, \dot{\phi}$ вместо y, v_y :

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= b_n v_\phi, \\ \ddot{\phi} &= -k(b_n - \delta \sin(\phi)) v_x. \end{aligned} \quad (2)$$

В этой системе переменная v_x меняется медленнее, чем пара $\phi, \dot{\phi}$. Поэтому сначала рассмотрим второе уравнение системы (2) при замороженном значении v_x . Это уравнение нелинейного маятника с постоянным крутящим моментом. Фазовый портрет такого маятника для случая $\delta > b_n$ представлен на рис.1. Толстой черной линией на рисунке пока-

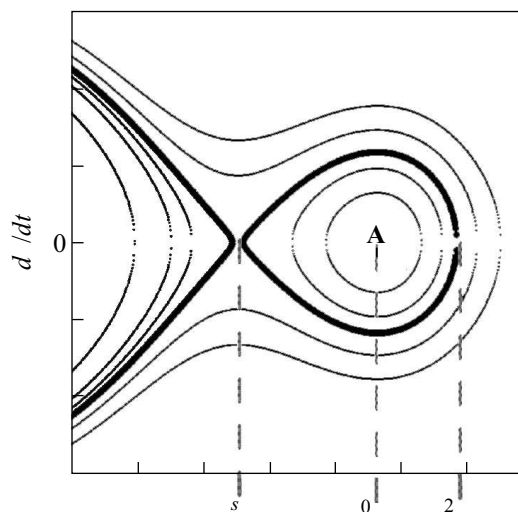


Рис.1. Фазовый портрет маятника с крутящим моментом для случая $v_x > 0$

зана сепаратриса, разделяющая два типа движения. Чтобы получить важную для дальнейшего формулу для площади S под сепаратрисой, напишем гамильтониан для второго уравнения системы (2): $H = \dot{\phi}^2/2 + kv_x(b_n \phi + \delta \cos(\phi))$. Энергия на сепаратрисе может быть найдена как $H_s = kv_x(b_n \phi_s + \delta \cos(\phi_s))$. Здесь ϕ_s – значение фазы в седле. Сепаратриса пересекает ось $\dot{\phi} = 0$ в точках ϕ_s и ϕ_2 , и ϕ_2 можно определить из уравнения $H_s = kv_x(b_n \phi_2 + \delta \cos(\phi_2))$. Тогда

$$S = 2^{3/2} \sqrt{k|v_x| \delta} \times \int_{\phi_s}^{\phi_2} \sqrt{|(\phi_s - \phi) b_n / \delta + (\cos(\phi_s) - \cos(\phi))|} d\phi. \quad (3)$$

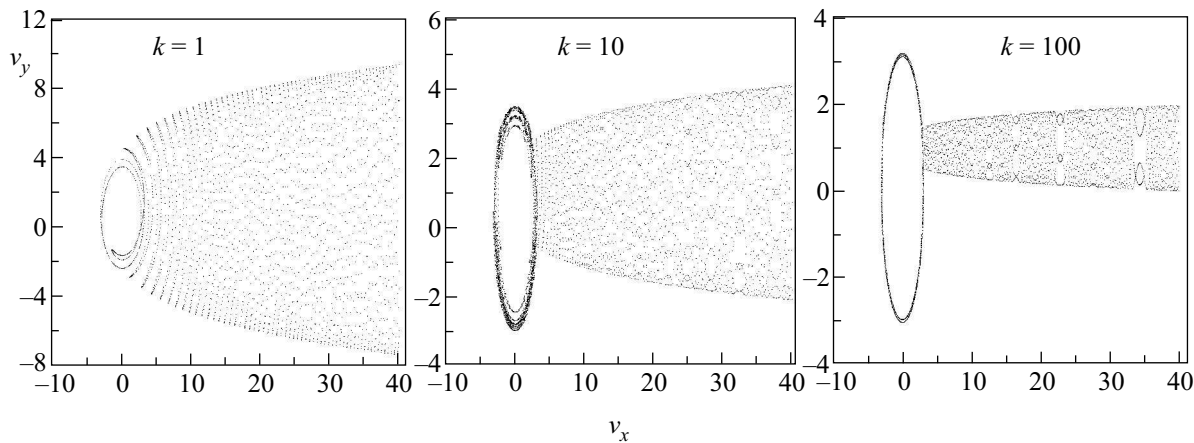


Рис.2. Захват частицы в одну волну для трех различных значений волнового числа. Параметры системы (1): $b_n = \pi/4$, $\delta = \pi$, $v_\phi = 1$

Учтем теперь медленный линейный рост v_x со временем в соответствии с первым уравнением (2): $v_x \sim b_n v_\phi t$. Движение частиц, находящихся внутри области, ограниченной сепаратрисой (области колебаний, рис.1, литера А), можно представить как суперпозицию движения по замкнутым фазовым кривым гамильтониана H и эволюции этих кривых. При этом из-за наличия быстрых и медленных переменных система имеет адиабатический инвариант: эволюция происходит так, что площадь I , ограниченная замкнутой фазовой кривой, в главном приближении остается постоянной [17]. Площадь, ограниченная сепаратрисой, в ходе этого движения при $v_x > 0$ растет, так как эта площадь пропорциональна $\sqrt{|v_x|}$, а $|v_x|$ растет. Поэтому частицы, находящиеся при $v_x > 0$ в области колебаний, не могут из нее выйти и неограниченно ускоряются по закону $v_x \sim b_n v_\phi t$. По этой же причине в область колебаний могут захватываться новые частицы из числа совершающих ларморовское движение и подошедших к резонансу при $v_x > 0$. Таким образом, на ларморовской окружности из двух точек, в которых частица находится в резонансе с волной, остается только одна, с $v_x > 0$, в которой частица может захватиться в резонанс. В ансамбле частиц, подошедших к резонансу при некотором $v_x > 0$, относительная доля тех, которые захватятся в область колебаний, в главном приближении по малому параметру $1/k$ составляет $(\partial S / \partial v_x) \dot{v}_x / (2\pi k b_n v_x) = S v_\phi / 4\pi k v_x^2$. Эта формула вытекает из общей формулы для вероятности захвата в резонанс (поскольку начальные данные для траекторий с захватом и без захвата перемешаны, то приходится говорить о вероятности захвата) [7]. Вероятность захвата вычисляется через отношение втекающего в область колебаний фазового объема к сумме втекающего в область колебаний и протекающего че-

рез резонанс без захвата фазовых объемов, и является величиной порядка $1/\sqrt{k}$.

Численные расчеты для системы (1) представлены на рис.2: показаны траектории частиц в пространстве скоростей (захват в резонанс происходит при $v_x > 0$, как это и следует из теории). До этого момента рассматривался случай волны с $\omega \gg b_n$ (и, соответственно, $k \gg 1$). Но стоит отметить, что, как видно из рис.2, аналогичные эффекты имеют место и для случая умеренных длин волн и низких частот ($\omega \approx b_n$ и $k \approx 1$). При этом скорость v_x после захвата растет линейно со временем с одинаковым коэффициентом $b_n v_\phi$ для всех значений k и ω , рис.3. Также на рис.3 показана фазовая траектория на плоскости $(\dot{\phi}, \phi)$ для частицы после момента захвата.

Таким образом, для захваченных частиц компонента скорости v_x растет линейно, $v_x \sim b_n v_\phi t$, а координата x квадратично, $x \sim b_n v_\phi t^2 / 2$. Поскольку в процессе движения внутри колебательной области $I = \text{const}$, со временем, из-за роста v_x , амплитуда колебаний ϕ убывает. С каждым оборотом частица приближается ко дну потенциальной ямы $\phi = \phi_0$ и амплитуда колебаний $\dot{\phi}$ растет (это хорошо видно на рис.3, правая панель). Соответственно, убывает амплитуда колебаний y и растет амплитуда колебаний v_y . Найдем скорость, с которой развиваются эти процессы. Когда амплитуда колебаний ϕ стала уже достаточно малой, для гамильтониана H в разложении потенциальной энергии вблизи дна потенциальной ямы можно ограничиться квадратичным приближением: потенциальная энергия $\sim k v_x \delta q^2 / 2$, где $q = \phi - \phi_0$ – отклонение ϕ от координаты дна ямы. Тогда колебания ϕ происходят с частотой $\Omega \sim \sqrt{k v_x \delta}$. В рассматриваемом приближении адиабатический инвариант I определяется соотношением $2\pi I = H / \Omega$. В момент захвата в резонанс $I \sim \sqrt{k}$. Поэтому для ам-

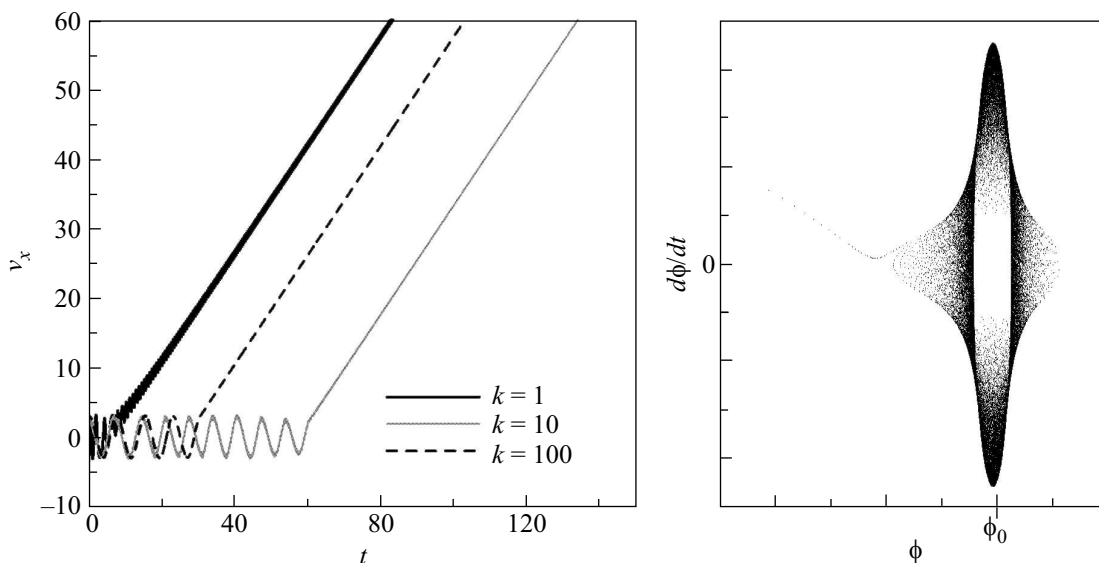


Рис.3. Зависимость скорости v_x от времени для решений из рис.2 (слева) и траектория частицы на плоскости $(\phi, \dot{\phi})$ вблизи от резонанса для случая $k = 100$ (справа)

плитуды колебаний ϕ получаем $\sqrt{k} \sim kv_x q^2 / \sqrt{kv_x \delta}$. Таким образом, колебания ϕ происходят с амплитудой $q \sim v_x^{-1/4}$, что соответствует колебаниям по координате y с амплитудой $\sim v_x^{-1/4}/k$. Пользуясь опять сохранением адиабатического инварианта, получаем, что для $\dot{\phi}$ амплитуда колебаний $\sim v_x^{1/4}$, а для v_y , соответственно, $\sim v_x^{1/4}/k$.

Диффузионный механизм набора энергии.

При $\delta < b_n$ захвата произойти не может, так как у потенциальной энергии гамильтониана H отсутствует минимум. Однако и в этом случае при прохождении через область резонанса имеет место скачок энергии. Первый момент от статистического распределения скачков энергии равен нулю (то есть нет направленного роста энергии). Второй момент отличен от нуля, и поэтому возможна диффузия энергии (рост среднеквадратичного отклонения энергии от ее начального значения). Можно получить зависимость величины скачка энергии за однократное пересечение резонанса от параметров системы. Для этого воспользуемся уравнением для изменения энергии частицы: $\dot{\epsilon} = \delta v_\phi v_x \sin(\phi)$. Интегрируя по времени и переходя от времени к фазе ϕ (изменение энергии происходит только в окрестности резонанса, где $\dot{\phi} = \pm \sqrt{|v_x| k \delta} f(\phi, \phi^*)$ и $f(\phi, \phi^*) = \sqrt{2|(\phi^* - \phi)b_n/\delta + \cos(\phi^*) - \cos(\phi)|}$, ϕ^* - значение фазы в момент пересечения резонанса), получаем для скачка энергии следующее выражение:

$$\Delta\epsilon \sim v_\phi \sqrt{|v_x| \delta/k} \int_{-\infty}^{\phi^*} \sin(\phi) d\phi / f(\phi, \phi^*). \quad (4)$$

Множитель $\int_{-\infty}^{\phi^*} \sin(\phi) d\phi / f(\phi, \phi^*)$ зависит от значения фазы волны в момент пересечения частицей резонанса ϕ^* и может считаться случайной величиной. То есть малое изменение фазы волны перед пересечением резонанса приводит к изменению величины скачка энергии.

Для того чтобы проанализировать рост энергии со временем для ансамбля частиц, рассмотрим геометрию движения частицы при заданных значениях полей. На плоскости (v_x, v_y) фазовая точка в главном приближении движется по ларморовской окружности радиуса $\sqrt{2\epsilon}$, см. рис.4. Время движения между двумя пересечениями резонансной прямой $v_y = v_\phi$ (для определенности рассматриваем движение с $v_y \geq v_\phi$) есть α/b_n , где $\alpha = 2\arccos(v_\phi/\sqrt{2\epsilon})$. Набег фазы волны за это время дается формулой $\Delta\phi = (2k/b_n)(2\epsilon - v_\phi^2)^{1/2} - \omega\alpha/b_n$, получаемой интегрированием скорости изменения фазы. Пока энергия не слишком велика, данный набег фазы можно считать случайной величиной из-за скачков энергии частицы (так как k и ω большие величины, то малое изменение энергии приводит к большому изменению набег фазы, поэтому значения фазы волны при последовательных пересечениях резонанса можно считать независимыми случайными величинами). Учитывая, что $v_x = (2\epsilon - v_\phi^2)^{1/2}$, получаем уравнение $\Delta\epsilon / (2\epsilon - v_\phi^2)^{1/4} \sim v_\phi \sqrt{\delta/k} \Delta\phi$. Тогда, суммируя изменения энергии при прохождении через резонанс как случайные величины ($\sum \Delta\phi \sim t^{1/2}$), получаем выражение для изменения энергии с течением времени: $\epsilon \sim (\text{const} + v_\phi \sqrt{t\delta/k})^{4/3}$.

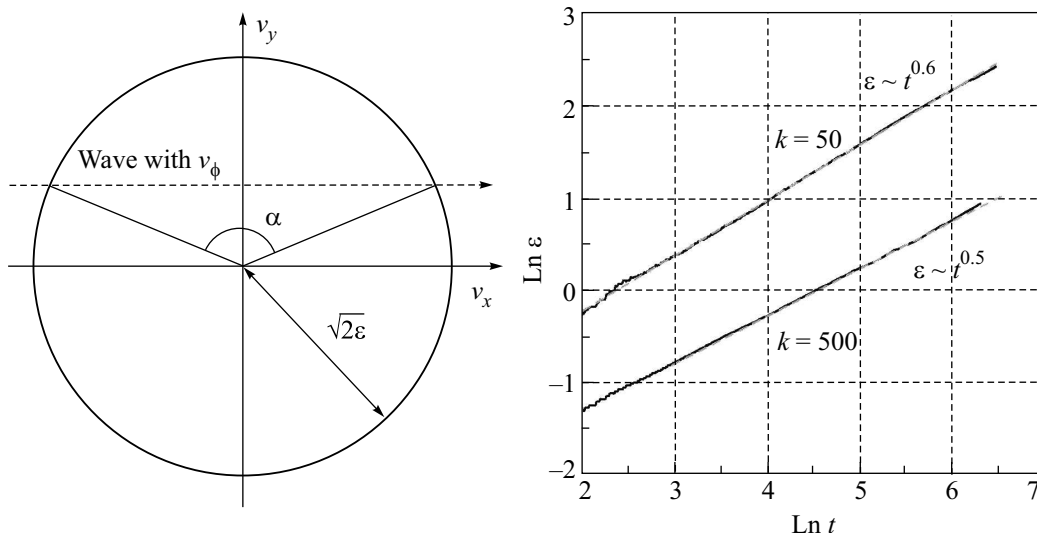


Рис.4. Схема движения частицы на плоскости (v_x, v_y) и зависимость энергии ансамбля частиц от времени для системы (1) с $b_n = 2\pi$, $\delta = \pi/2$, $v_\phi = 1$

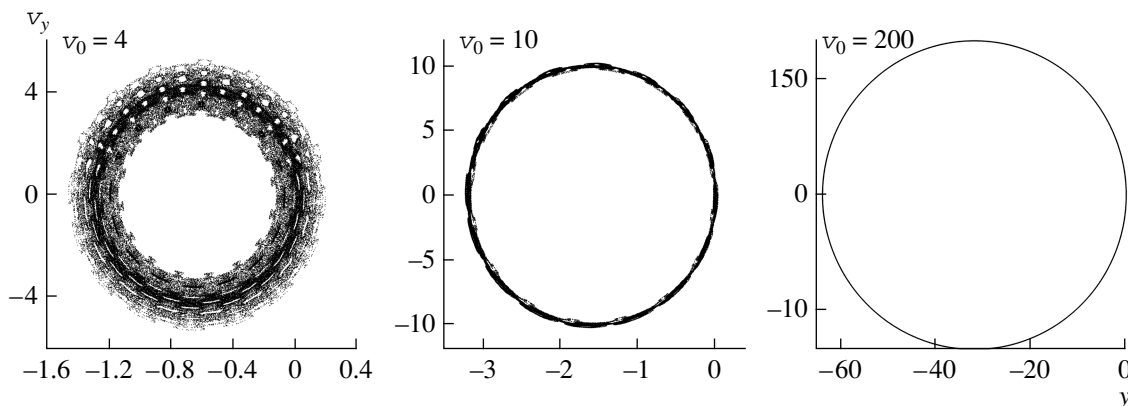


Рис.5. Сечение Пуанкаре (100 тысяч точек). Параметры системы: $\delta = \pi/2$, $b_n = 2\pi$, $k = 100$, $v_\phi = 1$

Таким образом, на начальном этапе (пока связь скачка энергии с величиной самой энергии $\Delta\epsilon \sim (2\epsilon - v_\phi^2)^{1/4}$ не столь существенна) энергия растет со временем как $\epsilon \sim t^{1/2}$. В дальнейшем показатель зависимости от времени растет и в асимптотике должен достигать $\epsilon \sim t^{2/3}$. Однако с ростом энергии частицы набег фазы волны между последовательными пересечениями резонанса становится все более детерминированным ($\alpha \rightarrow \pi$, $\Delta\epsilon \partial\Delta\phi/\partial\epsilon \sim \epsilon^{-1/4} \rightarrow 0$). По этой причине асимптотика $\epsilon \sim t^{2/3}$ может оказаться недостижимой. Однако как этап $\epsilon \sim t^{1/2}$, так и некоторые последующие этапы, для которых $\epsilon \sim t^\gamma$ ($1/2 < \gamma < 2/3$), могут быть получены численно. Для этого надо выбирать различный масштаб по времени (из формулы для $\Delta\epsilon$ видно, что чем больше k , тем медленней набирается энергия), рис.4.

Используя теорию КАМ [7], можно показать, что существует такая энергия ϵ^* , когда при $\epsilon \gtrsim \epsilon^*$ диффузии энергии нет. Чтобы подтвердить это численно, для ансамбля частиц построим сечение Пуанкаре на плоскости (y, v_y) , отмечая точки, отстоящие во времени на $2\pi/\omega$ (рис.5). При $v_0 \sim v_\phi$ происходит набор энергии за счет диффузии, но при $v_0 \gg v_\phi$ этот механизм прекращает работать: точки формируют замкнутую кривую. Таким образом, частица, начинающая с некоторой энергии $\epsilon > v_\phi^2/2$, в системе с $\delta < b_n$ будет набирать энергию со временем, пока не достигнет предела, $\epsilon \sim \epsilon^* \gg v_\phi^2/2$.

Приложения и выводы. Теперь можно рассмотреть вклад данного механизма в ускорение частиц в земной магнитосфере. Рассмотрим область на расстоянии около 20–30 R_E (R_E – радиус Земли) от

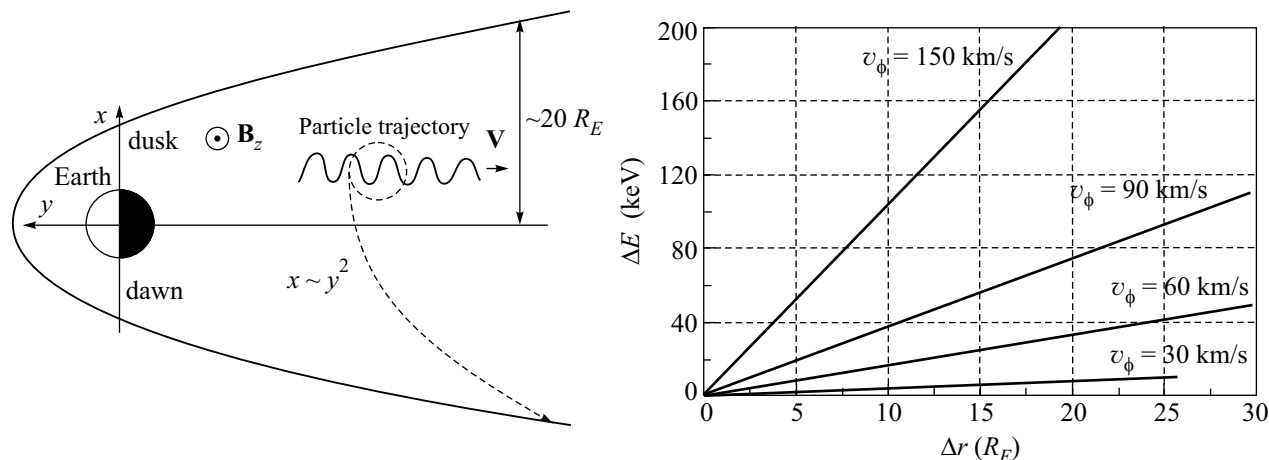


Рис.6. Схема взаимодействия иона с магнитозвуковой волной и зависимость энергии ионов от их смещения

планеты вблизи нейтральной линии (в этой области значения магнитного поля $B_0 < 5 \text{ нТл}$). Будем считать, что роль электромагнитной волны выполняет сильная поперечная магнитозвуковая волна, бегущая вдоль оси хвоста к Земле или от Земли (в наших координатах это соответствует оси y). Частота данной волны $\lesssim \sqrt{\omega_i \omega_e}$ ($\omega_j = eB_0/m_j c$, m_j – масса иона (при $j = i$) и электрона (при $j = e$)) много больше ионной циклотронной частоты ω_i (то есть выполнено условие $\omega \gg b_n$). Учитывая, что плотность плазмы в этой области $\approx 0.5 \text{ см}^{-3}$, для скорости магнитозвуковых волн получаем $v_\phi < 150 \text{ км/с}$ [18]. Поскольку температура ионов $\approx 1 - 5 \text{ кэВ}$, то есть $v_0 > 300 \text{ км/с}$, то условие $v_0 > v_\phi$ также выполнено. Теперь можно получить зависимость максимальной энергии, которую могут набрать ионы, от расстояния, на которое они при этом будут отнесены волнами (рис.6). Учитывая пространственные ограничения рассматриваемой области ($\Delta x < 40 R_E$), приходим к выводу, что данный механизм, в применении к магнитозвуковым волнам в хвосте земной магнитосферы, позволяет объяснить ускорение отдельных групп ионов вплоть до значений энергии в $0.1 - 0.3 \text{ МэВ}$. Такие группы частиц регулярно наблюдаются в этой области и ответственны за формирование характерных немаксвелловских распределений по энергиям [19].

Итак, в этой работе мы исследовали возможность захвата и эффект серфотронного ускорения для системы частица – медленная электромагнитная волна. Полученные результаты свидетельствуют, что частица может ускоряться в такой системе и со временем ее энергия будет расти как $(b_n v_\phi t)^2$, а удаление от начальной точки $\Delta r \approx 0.5 b_n v_\phi t^2$, если амплитуда волны превышает внешнее магнитное поле. Также показано, что данный механизм может быть ответ-

ственным за появления групп ускоренных частиц в земной магнитосфере.

Авторы благодарят А.А. Васильева за полезное обсуждение и Х.В. Малову за помощь в подготовке работы. Работа выполнена при поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований # 09-01-00333, # 08-02-00407, # 07-02-00319 и # НШ-691.2008.1.

1. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса*, М.: Наука, 1988.
2. Р. З. Сагдеев, *Вопросы теории плазмы* 4, 23 (1966).
3. Р. З. Сагдеев, В. Д. Шапиро, *Письма в ЖЭТФ* 17, 389 (1973).
4. J. M. Dawson, V. K. Decyk, R. W. Huff et al., *Phys. Rev. Lett.* 50, 1455 (1983).
5. T. Katsouleas and J. M. Dawson, *Phys. Rev. Lett.* 51, 392 (1983).
6. R. Sugihara, S. Takeuchi, K. Sakai et al., *Phys. Rev. Lett.* 52, 1500 (1984).
7. В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, *Математические аспекты классической и небесной механики*, М.: Эдиториал УРСС, 2002.
8. D. L. Vainchtein, E. V. Rovinsky, L. M. Zelenyi, and A. I. Neishtadt, *J. Nonlinear Sci.* 14, 173 (2004).
9. Г. М. Заславский, А. И. Нейштадт, Б. А. Петровичев, Р. З. Сагдеев, *Физика плазмы* 15, 368 (1989).
10. А. И. Нейштадт, Б. А. Петровичев, А. А. Черников, *Физика плазмы* 15, 593 (1989).
11. A. A. Chernikov, G. Schmidt, and A. I. Neishtadt, *Phys. Rev. Lett.* 68, 1507 (1992).
12. A. P. Itin, A. I. Neishtadt, and A. A. Vasiliev, *Physica D* 141, 281 (2000).

13. А. П. Игин, *Физика плазмы* **28**, 639 (2002).
14. Н. Karimabadi, К. Akimoto, N. Omid et al., *Phys. of Fluids B* **2**, 606 (1990).
15. Н. С. Ерохин, С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев, *Письма в АЖ* **15**, 3 (1989).
16. Г. Н. Кичигин, *ЖЭТФ* **119**, 1038 (2001).
17. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Курс теоретической физики*, том 1: *Механика*, М.: Наука, 1988.
18. Д. А. Франк-Каменецкий, *Лекции по физике плазмы*, М.: Атомиздат, 1968.
19. S. P. Christon, D. J. Williams, D. G. Mitchell et al., *J. Geophys. Res.* **94**, 13409 (1990).