Письма в ЖЭТФ, том 51, вып. 6, стр. 336–338 *25 марта 1990 г.*

НЕИНТЕГРИРУЕМОСТЬ И СТАЦИОНАРНЫЕ СОЛИТОНЫ СЛОЖНОГО ПРОФИЛЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАНДАУ – ЛИФШИЦА

Л.М.Лерман

Доказано, что уравнения Ландау – Лифшица с энергией анизотропии четвертого порядка являются неинтегрируемыми и среди их решений имеются стационарные солитоны сложного профиля, описываемые с помощью символической динамики.

Уравнение Ландау – Лифшица (Л.–Л.) $m_t = [m, \delta F/\delta m]$, являющееся одним из базовых в теории магнитных сред, задается плотностью функционала свободной энергии $F(m, \nabla m)$, где m – единичный 3 – вектор магнитного момента, $\delta F/\delta m$ – вариационная производная от свободной энергии. Для одноосного ферромагнетика одной из наиболее простых форм функции F является следующая [1]

$$F = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2} m\cdot J_e m - \frac{\nu}{4}(m\cdot J_0 m)^2 \ , \tag{1}$$

$J_e = -\operatorname{diag}(1+\epsilon, 1, 0)$, $\epsilon > 0$. Уравнение Ландау – Лифшица при $\nu = 0$ является интегрируемым, и его точные решения, в том числе солитонные, могут быть получены различными методами. При $\nu \neq 0$ общих методов получения точных решений не существует, поэтому важно найти некоторые классы точных решений. Одним из таких классов являются стационарные или бегущие волны. Будет доказано существование солитонных решений при $\nu \neq 0$ и неинтегрируемость уравнения для стационарных волн. Рассмотрим форму стационарных волн для уравнения Л.–Л. с F в виде (1). Обозначая $\xi = x - ut$ и $' = d/d\xi$, вводя новые переменные $M = um + [m, m']$, получим

$$M' + [m, J_e m] - \nu(m\cdot J_0 m)[m, J_0 m], \quad m' = [M, m], \qquad m^2 = 1, \quad M\cdot m = u. \tag{2}$$

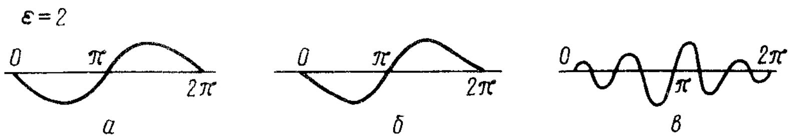
Система (2) является гамильтоновой с двумя степенями свободы, фазовым многообразием N является кокасательное расслоение над двумерной сферой T^*S^2, скобка Пуассона указана в [2]. Гамильтонианом системы является ограничение функции $H = (M^2 + m\cdot J_e m)/2 - \nu(m\cdot J_0 m)^2/4$ на N. Система (2) при $\nu = 0$ является интегрируемой, дополнительным интегралом служит интеграл Клебша $Q = (M\cdot J_e M - J_e^{(1)} J_e^{(2)} m_3^2)/2$. При всех u и достаточно малых $|\nu|$ существуют три пары особых точек, соответствующих стационарным решениям уравнения Л.–Л.:

$$C^{\pm} = (\pm u, 0{,}0;\ \pm 1{,}0{,}0),\quad R^{\pm} = (0, \pm u, 0; 0, \pm 1, 0),\quad P^{\pm} = (0, 0, \pm u;\ 0, 0, \pm 1).$$

С точки зрения существования солитонных решений следует рассматривать точки $R^{\pm}$ и $P^{\pm}$, поскольку они имеют собственные значения с ненулевой действительной частью. Стационарным топологическим солитонам соответствуют решения системы (2), которые идут из одного состояния равновесия в симметричное, нетопологическим солитонам – решения, идущие из данного состояния равновесия в него же. При $\nu = 0$ имеются следующие стационарные топологические солитоны: 1) существующие при всех u два решения, идущие из R^+ в R^-, и два решения, идущие из R^- в R^+; 2) существующие при $|u| < u_- = \sqrt{1+\epsilon} - 1$ четыре решения, идущие из P^+ в P^-, и соответствующие четыре решения, идущие из P^- в P^+ (при этих u точки $P^{\pm}$ являются седлами). Нетопологические солитоны существуют при $|u| < u_t = \sqrt{1+\epsilon} + 1$, причем при $|u| < u_-$ они образуют по 4 однопараметрических семейства, асимптотические к каждой точке $P^{\pm}$, разделенные решениями из 2), а при $u_- < |u| <$

$< u_+$ – одно однопараметрическое семейство двоякоасимптотических траекторий к каждой точке $P^{\pm}$. Численные результаты, указывающие на такую структуру стационарных солитонов, получены в [3], их теоретическое обоснование имеется в [4].

Отметим дополнительно существование при каждом h, $H(R^{\pm}) < h < H(P^{\pm})$ и $h > H(P^{\pm})$ однопараметрического семейства солитонов "ненулевого вакуума", соответствующих решениям системы (2), асимптотических при $\xi \to \infty$ к одному седловому периодическому решению, а при $\xi \to -\infty$ – к симметричному. Эти периодические решения возникают из точек $R^{\pm}$ при переходе через $h = H(R^{\pm})$.



При $\nu \neq 0$ система (2) перестает быть интегрируемой и указанные выше однопараметрические семейства нетопологических солитонов разрушаются. Численно это обнаружено в [3]. Здесь указаны аналитические результаты, гарантирующие неинтегрируемость; получаются они применением формулы, полученной в [5]. Обозначим $H_1 = (m \cdot J_0 m)^2$, а через $x(\xi, \theta)$ – решения системы (2) при $\nu = 0$, двоякоасимптотические к точке P^+, где θ – параметр этого семейства нетопологических солитонов. Тогда, если функция (типа Мельникова – Арнольда)

$$f(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \{H_1, Q\}\, d\xi , \tag{3}$$

где интегрирование ведется вдоль решения $x(\xi, \theta)$, имеет простой нуль, то ему соответствует двоякоасимптотическое к P^+ решение системы (2) при $\nu \neq 0$, вдоль которого устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются трансверсально (без касания) на уровне гамильтониана, содержащего особую точку P^+. Для вычисления интеграла (3) необходимо знать вид решений $x(\xi, \theta)$. Соответствующие формулы были предоставлены А.И.Бобенко, за что автор приносит ему благодарность. Вычисление функции f, коэффициенты которой зависят от u, при различных значениях параметра u в интервалах $|u| < u_-$ и $u_- < |u| < u_+$, были проведены на ЭВМ. Результаты для $u_- < |u| < u_+$ указаны на рис. $а$ – $в$. Они показывают, что распадение сепаратрисных поверхностей имеет место, причем число нулей меняется в зависимости от u. Отметим, что функция f всегда имеет нули при $\theta = 0, \pi$ из-за симметрии формул для $x(\xi, \theta)$ (на это автору указал Н.Е.Кулагин), однако нуль $\theta = 0$ может становиться кратным и тогда появляются новые нули. Двоякоасимптотические траектории, соответствующие нулям функции f, являются однообходными, т. е. выйдя из особой точки, траектории попадают в нее после одного обхода окрестности невозмущенной траектории. Из результатов [6] следует, что в окрестности такой траектории существует счетное множество двоякоасимптотических траекторий любой обходности. Поэтому здесь существуют стационарные солитоны с любым наперед заданным числом горбов, соответствующих обходу вокруг любого однообходного решения. Отсюда следует утверждение о неинтегрируемости системы (2) при $\nu \neq 0$ и о существовании стационарных солитонов сложного профиля для значений $u_- < |u| < u_+$. Аналогично можно показать распадение сепаратрисных поверхностей седла P^+ при $|u| < u_-$ и для солитонов "ненулевого вакуума". Неинтегрируемость тогда следует из [7].

В заключение автор благодарит В.М.Елеонского, Н.Е.Кулагина и Я.Л.Уманского за стимулирующие обсуждения.

Литература

1. *Елеонский В.М.* Нелинейные волны. Самоорганизация. М.: Наука, 1983, с. 29.
2. *Новиков С.П.* УМН, 1982, **37**, 3.
3. *Елеонский В.М. и др.* ЖЭТФ, 1979, **77**, 409.
4. *Лерман Л.М., Уманский Я.Л.* Методы кач. теории диффер. уравн., Горьковский ун-т, 1982, 3; 1984, 26.
5. *Лерман Л.М., Уманский Я.Л.* ПММ, 1983, **47**, 395.
6. *Devaney R.L.* In "Bifurcation Theory and Applications in Scientific Disciplines", New York: Acad. Sci., 1979, **316**, 108.
7. *Тураев Д.В., Шильников Л.П.* ДАН СССР, 1989, **304**, 811.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
Горьковского государственного университета

Поступила в редакцию
31 января 1990 г.