

Термодинамические измерения в дробном квантовом эффекте Холла и модель композитных фермионов

М. Г. Прокудина^{+,*}, В. С. Храпай⁺

⁺ Учреждение Академии Наук институт физики твердого тела РАН, 142432 Черноголовка, Московская обл., Россия

^{*} Московский физико-технический институт (государственный университет), 141700 Долгопрудный, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 29 апреля 2009 г.

Проведено количественное сравнение данных магнетомкостных измерений на высококачественных образцах в дробном квантовом эффекте Холла с моделью композитных фермионов. Для этих целей выведена связь между химпотенциалом электронов μ_e и спектром квазичастиц. Влияние температуры T вычислено в двухуровневом приближении. Расчет количественно описывает падение измеренного скачка химпотенциала при факторах заполнения $\nu = 1/3, 2/5$ с ростом T . В сжимаемой области $1/3 < \nu < 2/5$ наклон температурной зависимости $d\mu_e/d\nu(T)$ также хорошо согласуется с расчетом. Расхождение теории композитных фермионов с экспериментом упирается в неверно предсказанные величины щелей и их зависимость от знаменателя дроби.

PACS: 73.21.-b, 73.43.-f

Дробный квантовый эффект Холла (ДКЭХ) состоит в квантовании холловской проводимости двумерной системы при определенных рациональных факторах заполнения уровней Ландау $\nu = hc n_s / eB$ [1], где n_s и B – электронная плотность и магнитное поле; h, c, e – постоянная Планка, скорость света, заряд электрона. Общепринятые теории объясняют ДКЭХ как многочастичное явление, обусловленное кулоновским взаимодействием между двумерными электронами. Один из подходов состоит в построении вариационной волновой функции основного состояния [2], в другом – задача сводится к одночастичной путем введения новых квазичастиц – композитных фермионов [3], подверженных квантованию Ландау в эффективном магнитном поле, отличном от внешнего.

Прямой проверкой адекватности теорий [2, 3] является сравнение предсказываемых ими величин энергетических щелей с экспериментом. Однако основанные на теории [2] численные расчеты [4] не дают удовлетворительного согласия с экспериментально измеренными значениями щели подвижности [5–7] и скачка химического потенциала (далее – химпотенциала) [8–11], что обычно приписывают недостаточному качеству образцов. Тем не менее, теориями качественно объясняется ряд экспериментальных наблюдений при дробных ν , в частности, спиновые переходы [12] и иерархия состояний ДКЭХ [3]. Одночастичная модель композитных фермионов обладает тем преимуществом, что может быть использована и при отходе от точных дробных факторов заполнения, где, например, верно предсказывает геометри-

ческие резонансы, вызванные поверхностными акустическими волнами в окрестности $\nu = 1/2$ [13].

Метод емкостной спектроскопии позволяет проводить прямые термодинамические измерения химпотенциала двумерной системы [14]. При исследовании ДКЭХ обнаружена сильная температурная зависимость скачков химпотенциала $\Delta\mu_e$ при дробных ν [8–11]. При этом с ростом температуры приращение химпотенциала между значениями при $\nu = 1/4$ и $\nu = 1/2$ не меняется, в качественном согласии с тепловым размытием функции распределения [11]. Целью настоящей работы является количественное сравнение эксперимента с моделью композитных фермионов [15]. Для описания температурных зависимостей химпотенциал электронов выражен через спектр квазичастиц. Влияние температуры описано в двухуровневом приближении [16], модифицированном для случая ДКЭХ с использованием эмпирической зависимости $\mu_e(\nu)$ [11]. Подробно анализируется роль беспорядка, присутствующего в реальных образцах. Рассчитанное падение с ростом температуры скачка $\Delta\mu_e(T)$ и производной $d\mu_e/d\nu(T)$ в сжимаемой области между дробными ν в разы сильнее, чем в целочисленном квантовом эффекте Холла (ЦКЭХ), и хорошо согласуется с экспериментом. Результаты показывают, что модель [15] могла бы количественно соответствовать эксперименту при условии правильно предсказанных величин для энергетических щелей. Последнее, в частности, подразумевает отказ от эквидистантности уровней Ландау композитного фермиона.

1. Методика измерения и образцы. Экспериментальные данные, использованные в этой работе, были получены нами ранее совместно с другими соавторами [11]. Для емкостных измерений использовался образец из гетероструктуры GaAs/AlGaAs с низкотемпературной подвижностью $\approx 4 \cdot 10^6 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ при электронной плотности $n_s = 9 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$ с напыленным на поверхность металлическим затвором. Подробности эксперимента опубликованы ранее в [11].

Емкость между затвором и двумерным газом связана с термодинамической плотностью состояний $D \equiv dn_s/d\mu_e$ электронной системы [14]: $C^{-1} = C_0^{-1} + 1/(e^2 D)$, где C_0 – геометрическая емкость на единицу площади между двумерным газом и затвором. Типичная зависимость магнетоемкости $C(\nu)$ приведена на рис.1а. В узкой области около дробных факторов заполнения $\nu = 1/3, 2/5$ система переходит в одно из несжимаемых состояний ДКЭХ, и наблюдается провал в емкости, соответствующий провалу в термодинамической плотности состояний. Провалы в емкости разделены максимумами, в которых $C > C_0$, то есть $D < 0$. В окрестности $\nu = 1/2$ емкость во всем интервале исследованных полей с экспериментальной точностью совпадает с величиной C_0 , вычисленной из $C(B=0)$ и D невзаимодействующих электронов в нулевом магнитном поле $D_0 = m/\pi\hbar^2$ (где $m = 0.067m_e$ и m_e – масса свободного электрона).

Зависимость $\mu_e(n_s)$ получается интегрированием емкости: $\mu_e = e^2/C_0 \int (C_0 - C) \cdot C^{-1} dn_s$. На рис.1б приведена зависимость $\mu_e(\nu)$, полученная из кривых рис.1а, с постоянной интегрирования, выбранной из условия $\mu_e(1/3) = 0$. Химпотенциал сильно осциллирует: резко растет с фактором заполнения в окрестности дробных ν и падает в сжимаемых областях. Скачок химпотенциала (амплитуда осцилляции μ_e) получается интегрированием минимума $C < C_0$:

$$\Delta\mu_e = \frac{e^2}{C_0} \int_{\min} \frac{C_0 - C}{C} dn_s = \frac{e}{C_0} \int_{\min} (C_0 - C) dV_g$$

В пределе $T \rightarrow 0$ скачок химпотенциала напрямую связан с изломом энергии \mathcal{E}_0 основного состояния двумерной электронной системы при дробном ν : $\Delta\mu_e = d\mathcal{E}_0/dn_s|_{\nu+0} - d\mathcal{E}_0/dn_s|_{\nu-0}$.

2. Модель композитных фермионов. В модели композитных фермионов межэлектронное взаимодействие в приближении среднего поля представлено как добавочный векторный потенциал. В результате, система взаимодействующих электронов на нижнем уровне Ландау может быть сведена к системе невзаимодействующих композитных фермионов, движущихся в эффективном магнитном поле

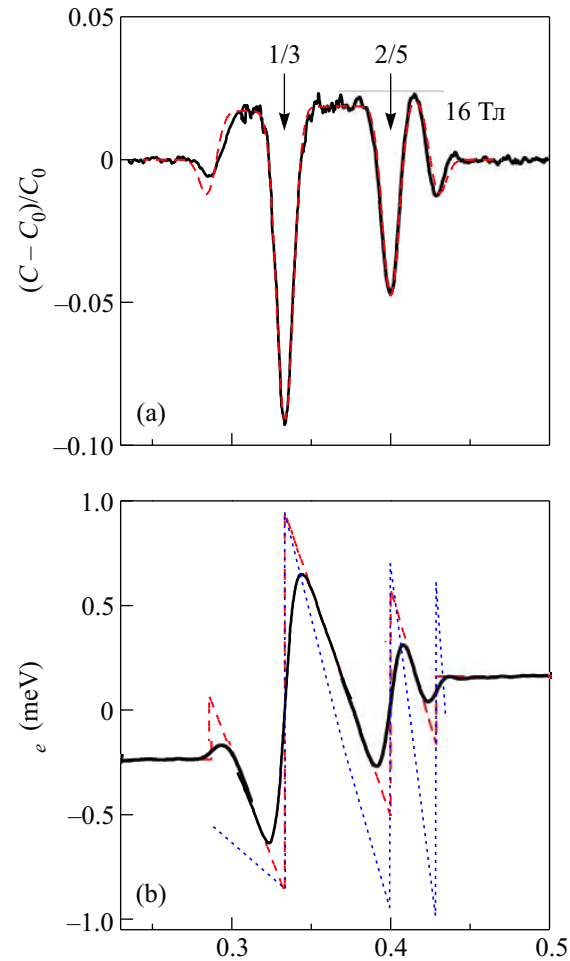


Рис.1. Экспериментальные зависимости относительного отклонения емкости от геометрической (а) и химпотенциала (б) от фактора заполнения в поле 16 Тл в низкотемпературном пределе (сплошные линии). Предполагаемое поведение химпотенциала в идеальном образце (б) и осуществленная с его помощью подгонка (см. текст) экспериментальной кривой емкости (а) показаны штриховыми линиями. Пунктиром построена зависимость $\mu_e(\nu)$ в модели композитных фермионов [15], отнормированная по скачку для $\nu = 1/3$

$B^* = B - \phi hcn_s/e$, где ϕ – количество квантов добавочного магнитного потока в расчете на один электрон. Для разных последовательностей дробей факторы заполнения электронов и композитных фермионов ($\nu^* = hcn_s/eB^*$) связаны как $\nu = \nu^*/(\phi\nu^* \pm 1)$, то есть ДКЭХ электронов сводится к целочисленному эффекту Холла композитных фермионов. Рассматриваемым здесь дробям $1/3, 2/5$ отвечает случай $\phi = 2$ и знака '+', так что эффективное поле $B^* = B/q$ (где обозначено $q = 2\nu^* + 1$) зануляется при $\nu = 1/2$ (при целых ν^* q есть знаменатель дроби).

Энергия основного ($k=0$) и возбужденных состояний всей системы выражается через уровни энер-

гии композитных фермионов E_n и числа их заполнения $N_{n,k}$: $\mathcal{E}_k(\nu^*, B^*) = \sum_n E_n N_{n,k}$. Дифференцируя свободную энергию $F = -T \ln \sum_k e^{-\mathcal{E}_k/T}$ при постоянных площади A и температуре, можно найти химпотенциал двумерной электронной системы $\mu_e = \partial F / \partial N_e|_{A,T}$. Изменение числа электронов N_e приводит не только к изменению ν^* , но и меняет поле B^* , а также, возможно [15], и эффективную массу m^* . Формально рассматривая ν^* , B^* и m^* как независимые переменные, имеем:

$$\mu_e = \frac{\partial F}{\partial \nu^*} \frac{d\nu^*}{dN_e} + \frac{\partial F}{\partial B^*} \frac{dB^*}{dN_e} + \frac{\partial F}{\partial m^*} \frac{dm^*}{dN_e}.$$

Поскольку B^* , m^* входят в \mathcal{E}_k только через уровни энергии $E_n = (n + 1/2)\hbar e B^* / m^* c$ и вырождение уровня $eB^* / \hbar c$, легко показать, что последние два члена в этом выражении пропорциональны средней полной энергии системы $\bar{\mathcal{E}} \equiv \sum_k \mathcal{E}_k e^{-\mathcal{E}_k/T} / \sum_k e^{-\mathcal{E}_k/T}$. При взятии производных в первом слагаемом следует учесть, что $d\nu^* / dN_e = q / (AeB / \hbar c)$. Кроме того, при постоянном B^* можно написать $\delta\nu^* = \delta N_{CF} / (AeB^* / \hbar c)$, где N_{CF} – число композитных фермионов ($N_{CF} = N_e$). Окончательно, вводя химпотенциал композитных фермионов как производную от свободной энергии по числу квазичастиц при условии неизменности их спектра $\mu_{CF} = \partial F / \partial N_{CF}|_{A,T,B^*,m^*}$, получим

$$\mu_e = q\mu_{CF} + \left(\frac{2}{B^*} \frac{dB^*}{dN_e} - \frac{1}{m^*} \frac{dm^*}{dN_e} \right) \bar{\mathcal{E}}. \quad (1)$$

Это соотношение выражает химпотенциал электронной системы при произвольной температуре через спектр невзаимодействующих композитных фермионов. Первый член в (1) дает скачки химпотенциала в ДКЭХ $\Delta\mu_e = q\Delta\mu_{CF}$, а второй ответствен за монотонную зависимость и $D < 0$ в сжимаемых областях. В оригинальной работе [15] предполагается $m^* \propto n_s^{1/2}$, так что скачок химпотенциала через дробную щель практически не зависит от q : $\Delta\mu_e \approx 0.3e^2 / kl$, где $k, l = (\hbar c / eB)^{1/2}$ – диэлектрическая проницаемость и магнитная длина.

На рис.1b приведена зависимость $\mu_e(\nu)$, полученная экспериментально в низкотемпературном пределе в поле 16 Тл (сплошная линия). Здесь неоднородность электронной плотности мала по сравнению с расстоянием по n_s между соседними дробями, так что двумерная система близка к идеальной. С ростом q амплитуда осцилляций химпотенциала падает, а наклон $d\mu_e / d\nu$ в сжимаемых областях с экспериментальной точностью не зависит от ν . Пилообразная эмпирическая зависимость $\mu_e(\nu)$ в идеаль-

ном образце получена линейной экстраполяцией экспериментальных данных к дробным ν (штрих) [11]. Модель композитных фермионов также предсказывает пилообразную зависимость $\mu_e(\nu)$, которая, однако, функционально далека от эксперимента (пунктир на рис.1b). Кроме того, отсутствует количественное согласие: экстраполированные щели минимум втрое меньше предсказанных теорией [15]: $\Delta\mu_e \approx 5.6$ мэВ ($\nu = 1/3$, $B = 16$ Тл).

Хотя эксперимент и не описывается моделью с эквидистантными уровнями композитных фермионов, ниже мы воспользуемся основным достоинством этой модели – одночастичной систематикой уровней энергии квазичастиц. Прежде чем перейти к описанию температурных зависимостей, заметим, что при низких температурах $\bar{\mathcal{E}}$ системы с дискретным спектром не зависит от T с точностью до экспоненциально малых поправок [17]. Поэтому температурная зависимость μ_e в уравнении (1) при не слишком высоких T определяется зависимостью $\mu_{CF}(T)$, которая для невзаимодействующих композитных фермионов может быть найдена из двухуровневой модели.

3. Температурная зависимость скачка химпотенциала в двухуровневой модели. Рассмотрим идеальную двумерную систему в окрестности состояния ДКЭХ, когда вблизи уровня Ферми находятся два уровня энергии композитных фермионов, разделенных щелью Δ_q . При заданной температуре $T \ll \Delta_q$ связь между химпотенциалом и плотностью квазичастиц определяется функцией распределения Ферми-Дирака. В двухуровневой модели эта связь выражается как [16]

$$\mu_{CF} = -T \ln \left[\left(\sqrt{1 + x^2 \sinh^2 \frac{\Delta_q}{2T}} - x \cosh \frac{\Delta_q}{2T} \right) / (1 + x) \right],$$

где x – отклонение ν^* от целого. При вычислении μ_e нужно учесть и монотонную зависимость от ν . В согласии с экспериментом (рис.1b), мы добавили в правую часть уравнения член, соответствующий эмпирической зависимости $\mu_e(\nu)$ в сжимаемых областях:

$$q^{-1} \mu_e = -T \ln \left[\left(\sqrt{1 + x^2 \sinh^2 \frac{\Delta_q}{2T}} - x \cosh \frac{\Delta_q}{2T} \right) (1 + x)^{-1} \right] - s_q \cdot x, \quad (2)$$

где $x \equiv \delta\nu^* \approx q^2 \delta\nu$ – отклонение фактора заполнения композитных фермионов от целого. Коэффициент наклона $s_q = q^{-3} \cdot d\mu_e / d\nu$ определяется из эксперимента в низкотемпературном пределе (рис.1b) [19].

Эмпирически [11] $\Delta_q \propto q^{-2}$, так что в окрестности заданного целого ν^* решение (2) представляет

собой универсальную функцию $\tilde{\mu}_e(x, \tilde{T})$, где $\tilde{\mu}_e, \tilde{T}$ – химпотенциал и температура в единицах Δ_q . Именно эта универсальность позволяет нам сравнивать измеренные температурные зависимости с моделью композитных фермионов, не обращая внимания на проблему неверно предсказанных теорией щелей. Результат численного расчета функции $\tilde{\mu}_e(x, \tilde{T})$ приведен на рис.2а для нескольких значений температуры.

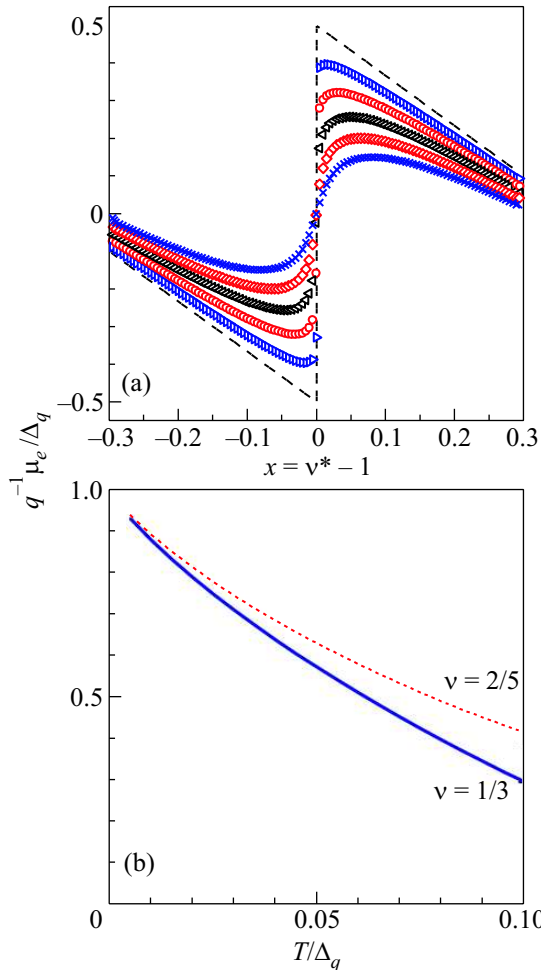


Рис.2. (а) Универсальная зависимость нормированного химпотенциала электронов от фактора заполнения композитного фермиона в окрестности $\nu^* = 1$ в идеальном образце. Приведена кривая при $T = 0$ (штриховая) и результат численного расчета для пяти значений температуры $T = 2(\triangleright), 4(\circ), 6(\triangleleft), 8(\diamond), 10(\times) \cdot 10^{-2} \Delta_q$. (б) Рассчитанная температурная зависимость нормированного скачка химпотенциала электронов в идеальном образце для двух дробных ν

При $T = 0$ нормированный химпотенциал линейно падает, $q^{-1} d\tilde{\mu}_e/dx = -s_q/\Delta_q$, испытывая бесконечно резкий скачок при $x = 0$. С ростом T амплитуда скачка уменьшается, а ширина w становится конечной и растет. Полученная температурная зависи-

мость нормированного скачка $q^{-1} \Delta\tilde{\mu}_e$ построена на рис.2б для двух дробных ν . Быстрое падение скачка $q^{-1} \delta\Delta\tilde{\mu}_e \sim -10\tilde{T}$, наблюдаемое при самых низких T , замедляется при повышении температуры. Это связано с особенностью теплового размывтия осциллирующей зависимости $\mu_e(x)$. Увеличение T приводит к уменьшению амплитуды осцилляции на величину порядка $-ws$, где $s = q^{-1} d\tilde{\mu}_e/dx$. С ростом q и T наклон s уменьшается и температурная зависимость ослабляется (рис.2).

2. Сравнение с экспериментом. В идеальном образце температурная зависимость $\Delta\mu_e(T)$ для заданного q универсальна и получается растяжением зависимостей рис.2б в q раз по оси абсцисс. Однако универсальность исчезает при наличии беспорядка в реальном образце. В отличие от кривых рис.2а, построенных для идеального образца, в эксперименте ширина скачка химпотенциала в низкотемпературном пределе конечна (рис.1б). В принципе, это может быть вызвано как уширением уровней короткопериодным беспорядком, так и их неоднородным уширением. В наших образцах при низкой температуре ширина провалов в емкости, выраженная в единицах n_s , с экспериментальной точностью не зависит от B и ν . Такое поведение однозначно указывает на преобладание макроскопической неоднородности электронной плотности в образце. В этих условиях эксперимент дает средние по образцу значения \bar{D} и $\bar{\mu}_e$ как функции среднего значения плотности \bar{n}_s . Таким образом, с экспериментом следует сравнивать скачок среднего химпотенциала, полученного сверткой зависимости в идеальном образце с функцией распределения электронной плотности:

$$\bar{\mu}_e(\bar{n}_s, T) = \int \mu_e(n_s, T) f(n_s, \bar{n}_s) dn_s.$$

Принято считать, что электронная плотность в образце распределена по Гауссу [8, 16]: $f(n_s, \bar{n}_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-(n_s - \bar{n}_s)^2/2\sigma^2)$. Дисперсию концентрации $\sigma = 2 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$ мы нашли путем подгонки кривых в большом поле и низкотемпературном пределе [11] (штриховая кривая на рис.1а).

На рис.3 приведено сравнение измеренных температурных зависимостей скачка $\Delta\bar{\mu}_e$ и расчета при двух значениях B и ν . Экспериментальные зависимости демонстрируют выход на насыщение в низкотемпературном режиме и быстрое падение скачка с повышением температуры до ~ 1 К. В этом интервале температур расчет дает близкое к линейному падение $\Delta\bar{\mu}_e$ с температурой, с наклоном, зависящим от B и ν . Отсутствие универсальности наклона вызвано учетом неоднородности [20], что ослаб-

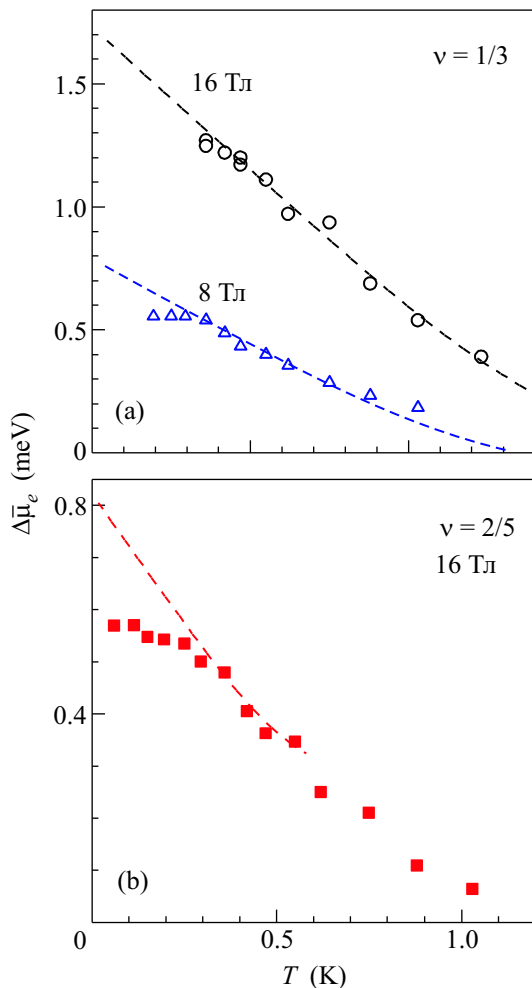


Рис.3. Температурная зависимость скачка химпотенциала в эксперименте (символы) и в двухуровневой модели ДКЭХ (линии). Значения поля и фактора заполнения указаны на рисунке

ляет температурную зависимость. Качественно это связано с шириной скачка w , которая в неоднородном образце при $T \rightarrow 0$ определяется дисперсией $\sigma(\nu^*) = q^2 \cdot \sigma \hbar c / eB$ и зависит от T слабее, чем в идеальном образце. Соответственно, ослабляется и температурная зависимость обсуждавшейся выше поправки к скачку $-ws$.

При $T \gtrsim 0.3$ К наклоны расчетных зависимостей хорошо согласуются с экспериментом для $\nu = 1/3$. Неплохое согласие также наблюдается для $\nu = 2/5$, хотя область применимости двухуровневого приближения сильно ограничена в этом случае со стороны высоких T , где $w \sim 1$. При более низких T расчетные зависимости сохраняют линейный ход, а экспериментальный скачок $\Delta\bar{\mu}_e$ выходит на насыщение. В рамках двухуровневой модели такое поведение можно связать с короткопериодным беспорядком в реальном образце, который приводит к уширению уровней

Γ и ослабляет температурные зависимости [16]. Таким образом, скачок $\Delta\bar{\mu}_e$ в реальном образце может быть меньше, чем в идеальном, не только за счет $\sigma \neq 0$ [11], но и благодаря $\Gamma \neq 0$. В последнем случае вклад от беспорядка нельзя учесть экстраполяцией зависимости $\bar{\mu}_e(\nu)$ к дробным ν , как это было сделано для случая макроскопической неоднородности (рис.1b), поскольку короткопериодный беспорядок приводит к изменению наклона $d\mu_e(\nu)/d\nu$ в сжимаемой области (см. ниже). Характерная величина соответствующей поправки в $\Delta\bar{\mu}_e$ дается расхождением между расчетной и экспериментальной температурными зависимостями при $T \rightarrow 0$, то есть для данных рис.3 составляет 30–40%. Полученные экстраполяцией кривых $\bar{\mu}_e(\nu)$ значения скачка $\Delta\mu_e$ в однородной системе [11] следует откорректировать на ту же относительную величину [21]. По нашим данным, $\Delta\mu_e^{id}(1/3) \approx 2.5$ мэВ и $\Delta\mu_e^{id}(2/5) \approx 1.5$ мэВ в образце без беспорядка в поле 16 Тл, так что, несмотря на все поправки эмпирическая зависимость $\Delta\mu_e^{id}(B) \propto q^{-1}\sqrt{B}$, предложенная в [11], остается в силе.

Интересно сравнить модель и эксперимент в условиях, когда роль беспорядка минимальна. Последнее выполнено в сжимаемой области между дробными ν , где усреднение макроскопической неоднородностью не сказывается по причине слабой зависимости D от ν . При полуцелом ν^* температурное размытие приводит к уменьшению производной $|d\mu_{CF}/d\nu^*|$. Здесь, точно как в обычном ЦКЭХ, без учета экспоненциально малого вклада от соседних уровней, дифференцируя распределение Ферми–Дирака, получаем $\delta|d\mu_{CF}/d\nu^*| = -4T$. Отметим универсальность этого выражения, не требующего никаких предположений о спектре композитных фермионов, кроме самой возможности представить его некоторым набором дискретных уровней Ландау. Учитывая соотношение между ν^*, μ_{CF} и ν, μ_e в окрестности $\nu^* = 3/2$, имеем $\delta|d\mu_e/d\nu| = -4q^3T = -256T$.

На рис.4 представлена температурная зависимость производной $-d\mu_e/d\nu$, измеренная в максимуме емкости между $\nu = 1/3$ и $2/5$ в поле 16 Тл (символы). Наклон экспериментальной зависимости гораздо сильнее, чем в ЦКЭХ, и близок к предсказанному в модели (штрих). Здесь мы специально сравниваем только наклон температурных зависимостей, который, в отличие от абсолютной величины $|d\mu_e/d\nu|$ (уравнение (1)) нечувствителен к спектру композитных фермионов. Тенденцию к насыщению экспериментального наклона $d\mu_e/d\nu$ при $T \rightarrow 0$ в рамках модели следует связать с уширением уровней квази-частиц короткопериодным беспорядком $\Gamma \neq 0$.

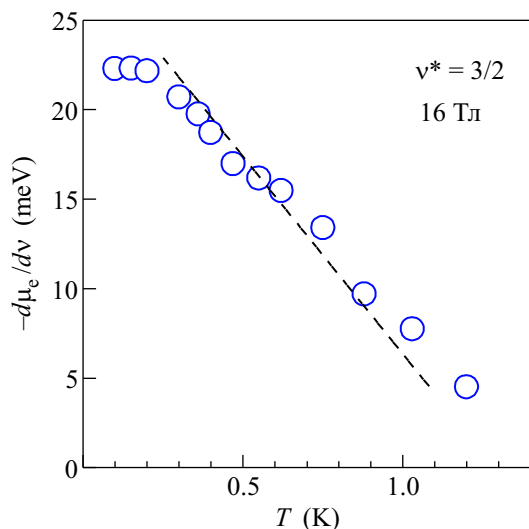


Рис.4. Сравнение температурной зависимости производной $-d\mu_e/d\nu$ измеренной в максимуме емкости между $\nu = 1/3$ и $2/5$ (символы) и наклона, предсказываемого в модели композитных фермионов (штриховая линия)

5. Заключение. Термодинамические измерения в режиме ДКЭХ, проведенные на образцах высокого качества, обнаруживают температурные зависимости $\Delta\mu_e$ (рис.3) и $|d\mu_e/d\nu|$ (рис.4), которые заметно сильнее, чем в ЦКЭХ. Как показано выше, влияние температуры адекватно описывается в двухуровневой модели, основанной на модели невзаимодействующих композитных фермионов [15]. Расхождение между моделью и экспериментом при $T \rightarrow 0$, остающееся после учета неоднородности распределения n_s в образце, дает характерную величину поправки в щель за счет уширения уровней квазичастиц короткопериодным беспорядком. Хорошее согласие модели и эксперимента в температурных зависимостях не отменяет проблему с количественным описанием щелей ДКЭХ. Даже с учетом всех поправок экстраполированные к идеальному образцу величины щелей и их зависимость от знаменателя дроби далеки от предсказанных теорией. Для полного согласия с экспериментом, как минимум, необходимо отказаться от эквидистантного спектра композитных фермионов в магнитном поле.

Мы благодарны Д.В.Шовкуну, В.Т.Долгополову и А.А.Шашкину за полезные обсуждения, а двум последним также за возможность использовать совместно полученные экспериментальные данные. Работа была поддержана проектами Российского фонда фундаментальных исследований и РАН, и частично (ВСХ) Российским фондом поддержки науки.

1. D. C. Tsui, H. L. Stormer, and A. C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559 (1982).
2. R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50**, 1395 (1983).
3. J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **63**, 199 (1989).
4. N. d'Ambrumenil and R. H. Morf, Phys. Rev. B **40**, 6108 (1989).
5. G. S. Boebinger, A. M. Chang, H. L. Stormer et al., Phys. Rev. Lett. **55**, 1606 (1985).
6. R. R. Du, H. L. Stormer, D. C. Tsui et al., Phys. Rev. Lett. **70**, 2944 (1993).
7. F. Schulze-Wischeler, E. Mariani, F. Hohls et al., Phys. Rev. Lett. **92**, 156401 (2004).
8. J. P. Eisenstein, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, Phys. Rev. B **50**, 1760 (1994).
9. С. И. Дорожкин, Г. В. Кравченко, Р. Хауг и др., Письма в ЖЭТФ **58**, 893 (1993).
10. V. S. Khrapai, A. A. Shashkin, M. G. Trokina et al., Phys. Rev. Lett. **99**, 086802 (2007).
11. V. S. Khrapai, A. A. Shashkin, M. G. Trokina et al., Phys. Rev. Lett. **100**, 196805 (2008).
12. T. Chakraborty, Adv. Phys. **49**, 959 (2000).
13. R. L. Willett, R. R. Ruel, K. W. West, and L. N. Pfeiffer, Phys. Rev. Lett. **71**, 3846 (1993).
14. T. P. Smith, B. B. Goldberg, P. J. Stiles, and M. Heiblum, Phys. Rev. B **32**, 2696 (1985); T. P. Smith III, W. I. Wang, and P. J. Stiles, Phys. Rev. B **34**, 2995 (1986).
15. B. I. Halperin, P. A. Lee, and N. Read, Phys. Rev. B **47**, 7312(1993).
16. М. О. Дорохова, С. И. Дорожкин ЖЭТФ **125**, 1393 (2004).
17. Изломы в энергии $\bar{\epsilon}$ при дробных ν не зависят от температуры вплоть до $T/\Delta \sim 0.1 \div 0.2$, где Δ – спектральная щель, после чего начинают сильно замыкаться. По-видимому, именно этим следует объяснять пороговую температурную зависимость щелей, определенных по скачку производной $d(\bar{\epsilon}/N_e)/dB$ в оптических измерениях [18].
18. I. V. Kukushkin, N. J. Pulsford, K. von Klitzing et al., Europhys. Lett. **22**, 287 (1993); I. V. Kukushkin and V. B. Timofeev, Adv. Phys. **45**, 147 (1996).
19. В численных расчетах мы заменяем точные значения Δ_q и коэффициента пропорциональности между $\delta\nu$ и $\delta\nu^*$ их значениями при $x = 0$, что оправдано в силу малой относительной ширины скачка хипотенциала $\delta B^*/B^* \ll 1$.
20. Такое поведение не наблюдается в двухуровневой модели ЦКЭХ, где от величины неоднородности зависит скорость падения с температурой обратной плотности состояний [16], но не скачка хипотенциала.
21. В принципе, ширина уровня Γ может немного осциллировать между максимальным значением в щели и минимальным в сжимаемой области [22]. Поэтому приведенные ниже числа следует воспринимать как оценку сверху.
22. T. Ando, A. B. Fowler, and F. Stern, Rev. Mod. Phys. **54**, 437 (1982).