

# Непланарный вклад в четырехпетлевую универсальную аномальную размерность операторов Вильсона твиста-2 в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса

В. Н. Велижанин<sup>1)</sup>

Отделение теоретической физики Петербургского института ядерной физики, 188300 Гатчина, Россия

Поступила в редакцию 22 апреля 2009

Представлен результат прямого компонентного вычисления непланарного вклада в четырехпетлевую аномальную размерность оператора Кониши в  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса. Полученный результат содержит только  $\zeta(5)$  слагаемое, пропорциональное  $\zeta(5)$  вкладу в планарном случае, идущему только из краевых поправок. Наши предыдущие вычисления лидирующего трансцендентного вклада в аномальную размерность операторов твиста-2 для первых трех четных моментов также расширены на непланарный случай и получены те же самые результаты, что и в планарном случае, с точностью до общего множителя. Два данных результата позволяют предположить, что непланарный вклад в четырехпетлевую универсальную аномальную размерность операторов Вильсона твиста-2 с произвольным лоренцевым спином  $j$  пропорционален  $S_1^2(j) \zeta(5)$ . Этот результат дает нестандартную дваждылогарифмическую асимптотику  $\ln^2 j$  для больших значений лоренцева спина  $j$  оператора.

PACS: 11.15.–q, 11.25.Tq, 11.30.Pb, 12.38.Bx

В наших предыдущих работах [1, 2] мы вычислили планарный вклад в четырехпетлевую аномальную размерность оператора Кониши и лидирующий трансцендентный вклад, пропорциональный  $\zeta(5)$  ( $\zeta(k) = \sum_{m=1}^{\infty} 1/m^k$  – функция Эйлера), в планарную универсальную аномальную размерность операторов твиста-2 в  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга–Миллса (СЯМ) с калибровочной группой  $SU(N_c)$ . Вычисления были проведены в компонентах как прямое вычисление аномальных размерностей операторов твиста-2. Преимуществами такого метода вычислений являются полная автоматизация процесса вычислений и отсутствие каких-либо предположений о специфических свойствах операторов, так что эти результаты могут служить своего рода “экспериментальной” проверкой для аналогичных результатов, полученных с использованием интегрируемости [3] в контексте АдС/КТП-соответствия [4] – соответствия между теорией суперструн в пространстве (анти)де-Ситтера и четырехмерной конформной теорией поля – максимально-расширенной  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теорией Янга–Миллса. Планарная четырехпетлевая аномальная размерность простейшего нетривиального оператора Кониши вычислена ранее двумя разными способами с обеих сторон АдС/КТП-соответствия. В  $\mathcal{N} = 4$  СЯМ теории вычисления были сделаны в суперполево-формализме

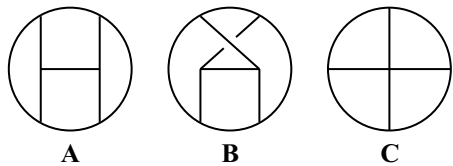
и учитывались только диаграммы, не включенные в асимптотический бете-анзатц [5], справедливый для операторов с большим значением лоренцева спина  $j$ . Со стороны теории суперструн [6] учет эффектов от конечной длины оператора Кониши был произведен с использованием формул Лущера [7] для поправок к спектру состояний от конечности рассматриваемого объема. Результаты обоих вычислений находятся в согласии друг с другом после исправлений со стороны пертурбативных вычислений. Наш результат прямого вычисления таков же и, таким образом, подтверждает правильность всех предположений, сделанных в вышеназванных вычислениях [5, 6]. Наш результат для лидирующего трансцендентного вклада в планарную четырехпетлевую аномальную размерность операторов твиста-2 с произвольным лоренцевым спином  $j$  был использован вместе с предсказаниями, следующими из уравнения Балицкого–Фадиной–Кураева–Липатова (БФКЛ) [8] для проверки соответствующей части поправок от конечной длины операторов [9] к четырехпетлевой аномальной размерности BMN-операторов [10]  $sl(2)$  сектора, полученной из асимптотического бете-анзатца [11].

Еще одним преимуществом нашего метода прямого вычисления является возможность найти полную цветовую структуру для четырехпетлевой аномальной размерности оператора Кониши. В данной работе представлен результат для непланарного (подавленного по цвету) вклада в четырехпетлевую аномаль-

<sup>1)</sup>e-mail: velizh@thd.pnpi.spb.ru

ную размерность оператора Кониши и для первых трех четных моментов для лидирующего трансцендентного вклада в четырехпетлевую универсальную аномальную размерность операторов твиста-2 с произвольным лоренцевым спином  $j$  оператора в  $\mathcal{N} = 4$  СЯМ теории.

Вычисление непланарного вклада, который появляется только в четвертом порядке теории возмущений и пропорционален оператору Казимира  $d_{44}$  (см. [12]), может быть разбито на две части в соответствии с базисными топологиями для мастер-интегралов. Для четырехпетлевых массивных головастика, используемых в качестве мастер-интегралов в применяемом нами методе вычислений, имеются две базисные топологии, представленные на рисунке: планарная топология **A** и непланарная топология **B**. Эти две топологии



Базисные четырехпетлевые планарная (**A**) и непланарная (**B**) топологии и топология (**C**), которая может быть получена сокращением одной из трех горизонтальных линий топологии **A** или любой линии топологии **B**

соответствуют мастер-интегралам PR12 и PR0 из табл.1 работы [13], а все другие топологии из этой таблицы могут быть получены сокращением одной и более линий внутри базисных топологий. Для диаграмм из первого, планарного, класса мы уже имеем хорошо отлаженную программу для четырехпетлевых вычислений, использующую метод из работы [14] и основанную на нашей собственной реализации алгоритма Лапорты [15] в виде математического пакета ВАМВА для разрешения тождеств, получаемых при интегрировании по частям фейнмановских интегралов. Для второго, непланарного, класса диаграмм мы должны были бы разрешить все наборы новых тождеств, полученных при интегрировании по частям непланарных интегралов. Однако имеется существенное упрощение, если заметить, что сокращение любой одной линии в непланарной топологии **B** дает топологию **C**, которая, в свою очередь, может быть получена сокращением одной из трех горизонтальных линий планарной топологии **A**, а для топологии **C**, как относящейся к планарному классу, мы уже имеем разрешенные рекуррентные соотношения для всех необходимых интегралов.

Таким образом, для непланарной топологии **B** необходимо продвинуться только на один шаг в разрешении тождеств интегрирования по частям, затем изменить импульсы в полученной топологии в соответствии с импульсами в топологии **C** и переразложить неприводимые числители получающихся интегралов, если это необходимо. Таким способом мы расширим нашу базу данных только интегралами с различными положительными степенями для всех девяти пропагаторов непланарной топологии **B**.

Таким образом, мы повторили наши предыдущие вычисления [1] для аномальной размерности оператора Кониши [16]

$$\mathcal{O}_K = \text{tr} [A_i A^i + B_i B^i], \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где  $A^i$  и  $B^i$  есть действительные скалярные и псевдоскалярные поля соответственно, оставляя оператор Казимира  $d_{44}$  (то есть не подставляя его лидирующее по цвету значение  $d_{44} = N_c^2/24$ , как прежде) и используя дополнительную процедуру для вычисления диаграмм с непланарной топологией **B** из рисунка с помощью используемой программы аналитических вычислений FORM [17]. Для проверки работоспособности нашей программы были воспроизведены как планарный (пропорциональный  $C_A^4$ ) так и непланарный (пропорциональный  $d_{44}$ ) вклады в аномальную размерность глюонного поля в квантовой хромодинамике (КХД) [13], идущие из чистой теории Янга-Миллса. Все диаграммы были получены с помощью программы DIANA [18], которая вызывает программу QGRAF [19] для генерации диаграмм, и полученный код был вычислен с помощью программы FORM [17] и с использованием специализированного для данной программы пакета COLOR [12] для вычисления цветовых структур.

Окончательный ответ для аномальной размерности оператора Кониши в  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга-Миллса после вычитания аномальной размерности для скалярного поля имеет вид

$$\gamma_K^{4-\text{loop}} = 12 g^2 - 48 g^4 + 336 g^6 + \left( -2496 + 576 \zeta(3) - 1440 \left( 1 + \frac{12}{N_c^2} \right) \zeta(5) \right) g^8, \quad (2)$$

c

$$g^2 = \frac{g_{YM}^2 N_c}{(4\pi)^2}, \quad d_{44} = \frac{N_c^2(N_c^2 + 36)}{24} \quad (3)$$

и следующим непланарным вкладом в четырехпетлевую аномальную размерность (псевдо)скалярного поля (см. [1] для планарного вклада):

$$\gamma_\phi^{4-\text{loop, np}} = \left( -42 - 177 \zeta(3) + 555 \zeta(5) \right) \frac{g^8}{2 N_c^2}. \quad (4)$$

Важной проверкой полученного непланарного вклада в результат (2), подавленного по цвету как  $1/N_c^2$ , может служить тот факт, что, хотя результаты, полученные при вычислении планарного и непланарного классов диаграмм, содержат старшие полюса и различные специальные числа, входящие в выражения для скалярных мастер-интегралов из работы [13] ( $\zeta(2)$ ,  $\zeta(4)$ ,  $S_2$  и другие), окончательный ответ не содержит ни старшие полюса, ни специальные числа <sup>2)</sup>.

Кроме того, мы повторили наши предыдущие вычисления для первых трех четных моментов для лидирующего трансцендентного вклада в четырехпетлевую универсальную аномальную размерность операторов твиста-2 с произвольным лоренцевым спином  $j$  оператора [2]. Такие вычисления возможны благодаря тому факту, что  $\zeta(5)$  впервые появляется только в четырехпетлевых интегралах и, следовательно, для нахождения этого вклада необходимо вычислить только четырехпетлевые диаграммы (перенормировка для этого вклада отсутствует). Как и в планарном случае, выражения для всех интегралов непланарной топологии **B** из рисунка, содержащих  $\zeta(5)$ , были получены с использованием математического пакета FIRE [20]. Оказалось, что непланарный лидирующий трансцендентный вклад в четырехпетлевую универсальную аномальную размерность модифицирует планарный вклад таким же образом, как и в случае аномальной размерности оператора Кониши (2) ( $S_1(j) = \sum_{m=1}^j 1/m$ ):

$$\hat{\gamma}_{uni}^{(3)}(j) = -640 S_1^2(j-2) \left(1 + \frac{12}{N_c^2}\right) \zeta_5. \quad (5)$$

Основываясь на том факте, что непланарный вклад в четырехпетлевую аномальную размерность оператора Кониши (2) содержит только  $\zeta(5)$  и принимая во внимание результат (5), можно предположить, что непланарный вклад в четырехпетлевую универсальную аномальную размерность операторов твиста-2 с произвольным лоренцевым спином  $j$  оператора имеет следующую вид:

$$\gamma_{uni, nr}^{(3)}(j) = -640 S_1^2(j-2) \frac{12}{N_c^2} \zeta(5), \quad (6)$$

где

$$\gamma_{uni}(j) = \sum_{n=1} \gamma_{uni}^{(n-1)}(j) g^{2n} \quad (7)$$

и  $\gamma_{uni, planar}^{(n-1)}$  могут быть найдены в работах [22–24, 11, 9] до  $n = 4$  <sup>3)</sup>.

<sup>2)</sup> Старшие полюса связаны с низшими порядками теории возмущений, в которых непланарный вклад отсутствует.

<sup>3)</sup> Аналогичный результат был получен для простейшего оператора твиста-3 до пяти петель включительно [11, 21].

Заметим, что на самом деле мы вычислили только три первых четных момента  $j = 2$ ,  $j = 4$  и  $j = 6$  для выражения (5) и оно может быть модифицировано с учетом других гармонических сумм (см. [2]). Более того, возможно, что для высших моментов  $j$  непланарный вклад в четырехпетлевую универсальную аномальную размерность будет содержать слагаемое, пропорциональное  $\zeta(3)$ , или рациональное число (как в планарном случае (2), см. [11, 9]), но таким образом, что комбинация гармонических сумм при нетривиальном значении  $j = 4$ , то есть для оператора Кониши, будет давать ноль <sup>4)</sup>.

Тем не менее, предположим, что наш результат (6) справедлив. Наиболее важным следствием данного результата является нестандартное поведение аномальной размерности в пределе большого лоренцева спина  $j$  оператора, который будет пропорционален  $\ln^2 j$  вместо ожидаемого  $\ln j$  [26]. Имеются веские аргументы в пользу того, что логарифмическое поведение  $\ln j$  должно быть правильным и в общем случае [27], так что предлагаемый простейший возможный результат (6) требует дальнейшего изучения.

В любом случае наши результаты для непланарного вклада, подавленного по цвету как  $1/N_c^2$ , в аномальную размерность оператора Кониши (2) и для первых трех четных моментов  $j = 2$ ,  $j = 4$  и  $j = 6$  для лидирующего трансцендентного вклада в четырехпетлевую универсальную аномальную размерность операторов твиста-2 с произвольным лоренцевым спином (5) являются абсолютно новыми и могут служить для проверки аналогичных результатов.

Несмотря на то, что планарная АдС/КТП система хорошо изучена с обеих сторон дуальности между калибровочной теорией и теорией суперструн и, по-видимому, близка к полному решению [28], непланарные результаты в  $\mathcal{N} = 4$  СЯМ теории получены только для амплитуд рассеяния глюонов и связаны с амплитудами рассеяния в  $\mathcal{N} = 8$  Супергравитации [29]. Наши результаты показывают, что непланарный вклад по крайней мере для аномальных размерностей операторов твиста-2 имеет достаточно простой вид и простую связь с поправками от конечной длины операторов и, возможно, может быть изучен методами, широко используемыми в планарном случае.

<sup>4)</sup> Заметим, что известные в КХД результаты для аномальных размерностей и коэффициентных функций до трех петель включительно [25], которых с учетом различных цветовых структур имеется более 300, дают ненулевое значение при  $j = 4$ , за исключением одного вклада в продольную коэффициентную функцию.

Автор выражает благодарность Л.Н. Липатову, А.И. Онищенко, А.В. Смирнову, В.А. Смирнову, М. Staudacher за полезные обсуждения и J. Maldacena за комментарий, касающийся поведения аномальных размерностей при больших значениях спина  $j$ . Данная работа выполнена в рамках проектов Российского фонда фундаментальных исследований # 07-02-00902-а и НШ-3628.2008.2.

1. В. Н. Велижанин, Письма в ЖЭТФ **89**, 8 (2009).
2. V. N. Velizhanin, Phys. Lett. B **676**, 112 (2009).
3. J. A. Minahan and K. Zarembo, JHEP **0303**, 013 (2003); N. Beisert, C. Kristjansen, and M. Staudacher, Nucl. Phys. B **664**, 131 (2003); N. Beisert and M. Staudacher, Nucl. Phys. B **670**, 439 (2003); A. V. Belitsky, S. E. Derkachov, G. P. Korchemsky, and A. N. Manashov, Phys. Lett. B **594**, 385 (2004); N. Beisert, V. Dippel, and M. Staudacher, JHEP **0407**, 075 (2004); M. Staudacher, JHEP **0505**, 054 (2005); N. Beisert and M. Staudacher, Nucl. Phys. B **727**, 1 (2005); N. Beisert, arXiv:hep-th/0511082; Z. Bern, M. Czakon, L. J. Dixon et al., Phys. Rev. D **75**, 085010 (2007); N. Beisert, T. McLoughlin, and R. Roiban, Phys. Rev. D **76**, 046002 (2007); N. Beisert, B. Eden, and M. Staudacher, J. Stat. Mech. **0701**, P021 (2007); I. Bena, J. Polchinski, and R. Roiban, Phys. Rev. D **69**, 046002 (2004); L. Dolan, C. R. Nappi, and E. Witten, JHEP **0310**, 017 (2003); V. A. Kazakov, A. Marshakov, J. A. Minahan, and K. Zarembo, JHEP **0405**, 024 (2004); N. Beisert, V. A. Kazakov, K. Sakai, and K. Zarembo, Commun. Math. Phys. **263**, 659 (2006); JHEP **0507**, 030 (2005); G. Arutyunov, S. Frolov, and M. Staudacher, JHEP **0410**, 016 (2004); N. Beisert and A. A. Tseytlin, Phys. Lett. B **629**, 102 (2005); R. A. Janik, Phys. Rev. D **73**, 086006 (2006); R. Hernandez and E. Lopez, JHEP **0607**, 004 (2006); N. Beisert, R. Hernandez, and E. Lopez, JHEP **0611**, 070 (2006).
4. J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998); S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, Phys. Lett. B **428**, 105 (1998); E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253 (1998).
5. F. Fiamberti, A. Santambrogio, C. Sieg, and D. Zanon, Phys. Lett. B **666**, 100 (2008); Nucl. Phys. B **805**, 231 (2008); C. Sieg and A. Torrielli, Nucl. Phys. B **723**, 3 (2005).
6. Z. Bajnok and R. Janik, Nucl. Phys. B **807**, 625 (2009).
7. M. Luscher, Commun. Math. Phys. **105**, 153 (1986); **104**, 177 (1986).
8. Л. Н. Липатов, ЯФ **23**, 642 (1976); Э. А. Кураев, Л. Н. Липатов, В. С. Фадин, ЖЭТФ **72**, 377 (1977); Я. Я. Балицкий, Л. Н. Липатов, ЯФ **28**, 1597 (1978); V. S. Fadin and L. N. Lipatov, Phys. Lett. B **429**, 127 (1998); M. Ciafaloni and G. Camici, Phys. Lett. B **430**, 349 (1998); A. V. Kotikov and L. N. Lipatov, Nucl. Phys. B **582**, 19 (2000); Nucl. Phys. B **661**, 19 (2003).
9. Z. Bajnok, R. A. Janik, and T. Lukowski, Nucl. Phys. B **816**, 376 (2009).
10. D. E. Berenstein, J. M. Maldacena, and H. S. Nastase, JHEP **0204**, 013 (2002).
11. A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, A. Rej et al., J. Stat. Mech. **0710**, P10003 (2007).
12. T. van Ritbergen, A. N. Schellekens, and J. A. M. Vermaseren, Int. J. Mod. Phys. A **14**, 41 (1999).
13. M. Czakon, Nucl. Phys. B **710**, 485 (2005).
14. M. Misiak and M. Munz, Phys. Lett. B **344**, 308 (1995); K. G. Chetyrkin, M. Misiak, and M. Munz, Nucl. Phys. B **518**, 473 (1998).
15. S. Laporta, Int. J. Mod. Phys. A **15**, 5087 (2000).
16. K. Konishi, Phys. Lett. B **135**, 439 (1984).
17. J. A. M. Vermaseren, arXiv:math-ph/0010025.
18. M. Tentyukov and J. Fleischer, Comput. Phys. Commun. **132**, 124 (2000).
19. P. Nogueira, J. Comput. Phys. **105**, 279 (1993).
20. A. V. Smirnov, JHEP **0810**, 107 (2008).
21. M. Beccaria, JHEP **0706**, 044 (2007); M. Beccaria, V. Forini, T. Lukowski, and S. Zieme, JHEP **0903**, 129 (2009).
22. L. N. Lipatov, *Perspectives in Hadronic Physics*, in: Proc. of the ICTP conf., World Scientific, Singapore, 1997; L. N. Lipatov, in: Proc. of the Int. Workshop on very high multiplicity physics, Dubna, 2000, p. 159; L. N. Lipatov, Nucl. Phys. Proc. Suppl. A **99**, 175 (2001).
23. A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, and V. N. Velizhanin, Phys. Lett. B **557**, 114 (2003).
24. A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, A. I. Onishchenko, and V. N. Velizhanin, Phys. Lett. B **595**, 521 (2004).
25. S. Moch, J. A. M. Vermaseren, and A. Vogt, Nucl. Phys. B **688**, 101 (2004); B **691**, 129 (2004); B **724**, 3 (2005); arXiv:0812.4168 [hep-ph].
26. G. P. Korchemsky, Mod. Phys. Lett. A **4**, 1257 (1989).
27. L. F. Alday and J. M. Maldacena, JHEP **0711**, 019 (2007).
28. N. Gromov, V. Kazakov, and P. Vieira, arXiv:0901.3753 [hep-th]; N. Gromov, V. Kazakov, A. Kozak, and P. Vieira, arXiv:0902.4458 [hep-th].
29. M. B. Green, J. H. Schwarz, and L. Brink, Nucl. Phys. B **198**, 474 (1982); Z. Bern, L. J. Dixon, D. C. Dunbar et al., Nucl. Phys. B **530**, 401 (1998); S. G. Naculich, H. Nastase, and H. J. Schnitzer, Nucl. Phys. B **805**, 40 (2008); S. G. Naculich, H. Nastase, and H. J. Schnitzer, JHEP **0811**, 018 (2008); J. M. Drummond, M. Spradlin, A. Volovich, and C. Wen, arXiv:0901.2363 [hep-th].