

Флуктуации квантовой запутанности

Э. Б. Фельдман¹⁾, М. А. Юрицев¹⁾

Институт проблем химической физики РАН, 142432 Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 30 апреля 2009 г.

Обращаем внимание на то, что квантовая запутанность (сцепленность), определяемая с помощью оператора энтропии фон Неймана, является стохастической величиной и вследствие этого может флуктуировать. Найдены среднеквадратичные флуктуации энтропии запутанности двухкубитных систем как в чистом, так и в смешанном состояниях. Установлено, что в максимально запутанных состояниях флуктуации запутанности отсутствуют. Обнаружено, что существуют области, в которых флуктуации запутанности превосходят значение самой запутанности (области сильных флуктуаций). Обнаружено также, что при подходе к точкам перехода систем из запутанного в сепарабельное (разделимое) состояние величина относительных флуктуаций запутанности расходится. Наконец показано, что в сепарабельных состояниях флуктуации запутанности обращаются в нуль.

PACS: 03.65.Ud, 03.67.Mn, 05.30.-d, 05.40.-a

В последнее время квантовомеханическая запутанность (E) стала объектом интенсивных теоретических и экспериментальных исследований [1–4]. При этом одной из наиболее плодотворных и глубоких по смыслу мер степени запутанности оказалась энтропия состояния с редуцированной (частичной) матрицей плотности. Такая энтропия была рассмотрена в 1986 г. (в проблеме черных дыр) [5]. Сейчас энтропия редуцированного состояния широко используется в различных областях, включая квантовую теорию поля, физику твердого тела и, конечно, квантовую информатику (см., например, [6] и имеющиеся там ссылки).

Физический (информационный) смысл запутанности, определяемой через энтропию, трактуется как относительное число максимально запутанных пар m , которые можно извлечь из большого числа n копий исходных систем с помощью протокола очищения, включающего только локальные операции и классическую коммуникацию (ЛОКК): $E \rightarrow m/n$, $n \rightarrow \infty$ [7, 8]. Однако это лишь средняя величина (математическое ожидание) запутанности.

Связывая квантовую запутанность с энтропией, которая, как известно (см. [9], п.112), может флуктуировать, мы должны учитывать возможность флуктуаций и для запутанности. Разумеется, для большой совокупности статистически независимых подсистем усредненные по объему относительные флуктуации физических характеристик пренебрежимо малы, поскольку убывают по закону “ $1/\sqrt{n}$ ” ([9], п.2). Но для одиночных составных систем флуктуа-

ции запутанности, как увидим, могут быть существенны и даже достигать сколь угодно больших значений. Наша работа посвящена расчету и обсуждению особенностей поведения таких флуктуаций энтропии запутанности.

Чистые состояния. Согласно [8], мерой запутанности системы, находящейся в чистом состоянии $|\psi\rangle$ и состоящей из двух подсистем A и B , может служить энтропия фон Неймана любой из подсистем:

$$E = \bar{S}(\rho_A) = \bar{S}(\rho_B). \quad (1)$$

В этих равенствах $\rho_A = \text{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi|$ и $\rho_B = \text{Tr}_A |\psi\rangle\langle\psi|$ являются редуцированными матрицами плотности, $\bar{S} = \text{Tr} \rho S$, где $S = -\log_2 \rho$ есть оператор энтропии; $\rho \in \{\rho_A, \rho_B\}$.

В квантовой механике физическим величинам соответствуют операторы. Оператор квантовой запутанности \hat{E} мы отождествляем с оператором энтропии: $\hat{E} = S$. Оператор \hat{E} эквивалентен “гамильтониану запутанности” [10, 11].

Энтропия подсистем, как сказано, подвержена флуктуациям, поэтому а priori они не должны исключаться и для запутанности. В соответствии с общим определением среднеквадратичных флуктуаций случайной переменной ([9], п.2), их величина равна

$$\Delta E = [\bar{S}^2 - (\bar{S})^2]^{1/2}, \quad (2)$$

где моменты \bar{S} и \bar{S}^2 взяты для одной из подсистем, A или B .

Рассмотрим поведение квантовых флуктуаций запутанности в двухкубитной модели. Для нее волно-

¹⁾e-mail: efeldman@icp.ac.ru; yur@itp.ac.ru

вая функция наиболее общего вида в стандартном базисе имеет форму

$$|\psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle, \quad (3)$$

где $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$. Отсюда

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* & ac^* & ad^* \\ a^*b & |b|^2 & bc^* & bd^* \\ a^*c & b^*c & |c|^2 & cd^* \\ a^*d & b^*d & c^*d & |d|^2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Одно собственное значение этой матрицы равно $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 (= 1)$, ему отвечает собственный вектор $|\psi\rangle$. Три других собственных значения равны нулю. Из (4) для редуцированных матриц плотности следует

$$\rho_A = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & ac^* + bd^* \\ a^*c + b^*d & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\rho_B = \begin{pmatrix} |a|^2 + |c|^2 & ab^* + cd^* \\ a^*b + c^*d & |b|^2 + |d|^2 \end{pmatrix}.$$

С учетом нормировки $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, собственные значения каждой из этих матриц равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - C^2}), \quad (6)$$

где

$$C = 2|ad - bc|. \quad (7)$$

Для момента k -го порядка оператора энтропии подсистемы (кубита A или B) простые вычисления дают

$$\bar{S}^k = (-1)^k \left[\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2} \log_2^k \left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2} \right) + \frac{1 - \sqrt{1 - C^2}}{2} \log_2^k \left(\frac{1 - \sqrt{1 - C^2}}{2} \right) \right]. \quad (8)$$

Таким образом, все характеристики запутанности двухкубитной системы сконцентрированы всего только в одной величине — согласованности C .

Для запутанности (момента первого порядка энтропии) из (8) получаем

$$E = H((1 + \sqrt{1 - C^2})/2), \quad (9)$$

где $H(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2 (1 - x)$ есть функция Шеннона. В окрестностях граничных точек имеем

$$E(C) = \begin{cases} -\frac{1}{2} C^2 \log_2 [C/(2\sqrt{e})], & C \rightarrow 0 \\ 1 - (1 - C)/\ln 2, & C \rightarrow 1. \end{cases} \quad (10)$$

Используя равенства (2) и (8), находим интересующую нас величину флуктуаций квантовой запутанности двухкубитной системы:

$$\Delta E = C \log_2 \left[\frac{1}{C} (1 + \sqrt{1 - C^2}) \right]. \quad (11)$$

Из этого выражения следует

$$\Delta E(C) = \begin{cases} -C \log_2 (C/2), & C \rightarrow 0 \\ (\sqrt{2}/\ln 2)(1 - C)^{1/2}, & C \rightarrow 1. \end{cases} \quad (12)$$

Соотношения (9) и (11) в параметрическом виде дают зависимость $\Delta E(E)$, которая может служить для косвенных измерений ΔE по E .

На рис.1 показано изменение квантовой запутанности и величины ее флуктуаций при изменении C

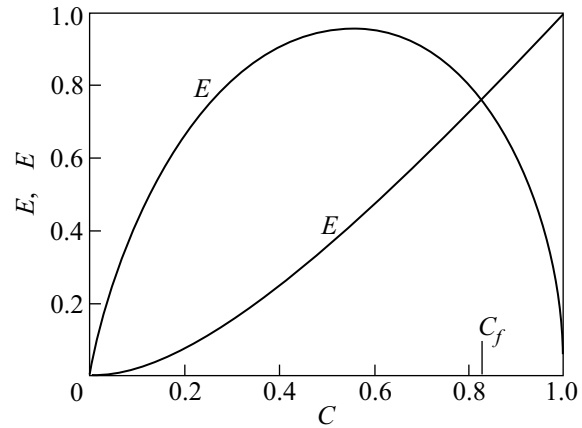


Рис.1. Поведение E и ΔE в двухкубитной системе в чистом состоянии. Удлиненная риска по оси абсцисс соответствует значению $C_f = 0.82724 \dots$

в обсуждаемой системе. В точке исчезновения запутанности ($C = 0$) величина абсолютных флуктуаций равна нулю: $\Delta E = 0$. Вблизи этой точки функция (11) содержит логарифмическую особенность (см. (12)). Когда $C = 1$ (максимально запутанное состояние), флуктуации запутанности тоже отсутствуют. Однако по мере отклонения согласованности от 1 в системе происходит нарастание этих флуктуаций (см. рис.1). Флуктуации достигают величины запутанности ($\Delta E = E$) при $C = C_f$, где C_f является корнем трансцендентного уравнения

$$(C_f + \sqrt{1 - C_f^2}) \ln \left[\frac{1}{C_f} (1 + \sqrt{1 - C_f^2}) \right] = \ln \frac{2}{C_f}. \quad (13)$$

Численное значение корня равно $C_f \approx 0.82724$. При $0 < C < C_f$ система находится в области сильных флуктуаций, в которой $\Delta E > E$.

С уменьшением C от единицы до нуля величины относительных флуктуаций квантовой запутанности, $\delta E = \Delta E/E$, монотонно возрастает от нуля до бесконечности (см. рис.2). Вблизи границ обла-

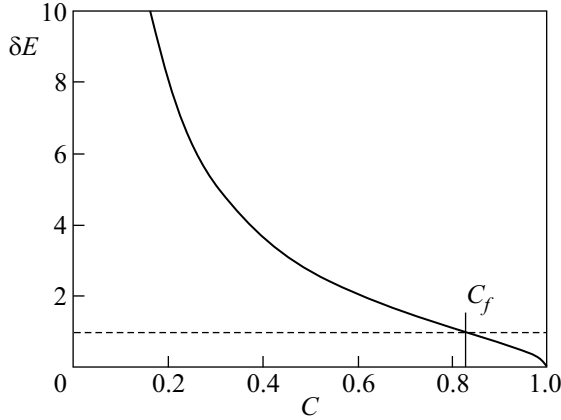


Рис.2. Относительная флуктуация в зависимости от C для двухкубитной системы в чистом состоянии (сплошная кривая). Пунктирная линия отвечает уровню $\delta E = 1$

ти изменения C относительные флуктуации запутанности ведут себя как

$$\delta E(C \rightarrow 1) \simeq \frac{\sqrt{2}}{\ln 2} (1 - C)^{1/2}, \quad (14)$$

$$\delta E(C \rightarrow 0) \simeq \frac{2}{C} \left(1 - \frac{1}{2 \ln(C/2)}\right)^{-1} \simeq 2C^{-1}. \quad (15)$$

Таким образом, в граничной точке $C = 1$ функция $\delta E(C)$ имеет бесконечную крутизну. Здесь флуктуации запутанности очень чувствительны к вариациям параметров системы. В то же время, при приближении к точке $C = 0$, в которой система из запутанного состояния переходит в сепарабельное состояние, относительные флуктуации запутанности стремятся к бесконечности. Это хорошо видно из рис.2.

Смешанные состояния. Запутанность формирования (создания) в системе, находящейся в состоянии с матрицей плотности

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (16)$$

(веса $p_i \geq 0$, $\sum_i p_i = 1$), по определению равна [12]

$$E = \min_{\mathcal{E}} \sum_i p_i \bar{S}(\psi_i). \quad (17)$$

Здесь $\bar{S}(\psi_i)$ означает запутанность чистого состояния $|\psi_i\rangle$ (способ ее расчета в случае двухсоставной

системы изложен выше). Минимум в (17) должен быть найден среди всех ансамблей $\mathcal{E} = \{p_i, \psi_i\}$ при условии сохранения состояния ρ .

Для набора из одинаковых пар 1/2-спиновых систем запутанность формирования определяется минимальным числом максимально запутанных пар, которые необходимы для создания с помощью ЛОКК заданного состояния ρ [12].

Обозначив через $\mathcal{E}_o = \{p_i^o, \psi_i^o\}$ минимизирующий (оптимальный) ансамбль, можно переписать выражение для запутанности (17) в виде

$$E = \langle \bar{S}(\psi_i) \rangle_{\mathcal{E}_o} = \sum_i p_i^o \bar{S}(\psi_i^o). \quad (18)$$

В качестве меры флуктуаций запутанности смешанного состояния мы будем брать среднеквадратичное отклонение запутанности в ансамбле \mathcal{E}_o :

$$\Delta E = [\langle \bar{S}^2(\psi_i) \rangle_{\mathcal{E}_o} - \langle \bar{S}(\psi_i) \rangle_{\mathcal{E}_o}^2]^{1/2}. \quad (19)$$

Обратимся к двухкубитным системам. В работах [12–14] было показано, что в ансамбле \mathcal{E}_o все состояния $|\psi_i^o\rangle$ имеют равные между собой согласованности (запутанности). Благодаря такому свойству оптимального ансамбля, равными между собой будут и все моменты (8). В частности, вместо (19) здесь мы в действительности имеем

$$\Delta E = [\bar{S}^2(\psi_i^o) - \bar{S}(\psi_i^o)^2]^{1/2}, \quad \forall i. \quad (20)$$

В результате приходим к выводу, что величина флуктуаций запутанности в смешанном состоянии двухкубитной системы по-прежнему определяется выражением (11). Задача расчета флуктуаций запутанности в двухкубитной модели сводится, таким образом, к нахождению согласованности.

Согласованность для произвольной двухкубитной системы можно рассчитать по формуле Хилла-Вуттерса [13, 14] (см. также [15, 16]):

$$C = \max\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\}. \quad (21)$$

Здесь λ_i – собственные значения ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4 \geq 0$) матрицы

$$R = \rho(\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (22)$$

где σ_y — матрица Паули. Поскольку произведение двух некоммутирующих эрмитовых матриц дает неэрмитову матрицу ([17], п.4), то матрица R , вообще говоря, неэрмитова. Однако при $\det \rho \neq 0$ с помощью преобразования подобия R -матрицу можно привести к эрмитовому виду

$$R' = \rho^{-1/2} R \rho^{1/2} = \sqrt{\rho}(\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y) \sqrt{\rho}. \quad (23)$$

Нетрудно убедиться, что для чистого состояния с матрицей плотности (4) соответствующая R -матрица имеет только одно ненулевое собственное значение. Оно равно $4|ad - bc|^2$, и формула Хилла-Вуттерса (21) дает (7).

Другой случай соответствует состоянию, матрица плотности которого является произвольной смесью состояний Белла:

$$\rho = p_1|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + p_2|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + p_3|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + p_4|\Phi^-\rangle\langle\Phi^-|, \quad (24)$$

где $|\Psi^\pm\rangle$ и $|\Phi^\pm\rangle$ представляют собой функции Белла

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle), \quad |\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle). \quad (25)$$

Матрица плотности (24) имеет структуру

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_3 + p_4 & & & p_3 - p_4 \\ & p_1 + p_2 & p_1 - p_2 & \\ & p_1 - p_2 & p_1 + p_2 & \\ p_3 - p_4 & & & p_3 + p_4 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Для такой системы $R = \rho^2$, причем собственные значения матрицы R равны p_i^2 . Поэтому формула Хилла-Вуттерса приводит к согласованности

$$C = \begin{cases} 2p_{\max} - 1, & p_{\max} > 1/2 \\ 0, & p_{\max} \leq 1/2 \end{cases}, \quad (27)$$

где $p_{\max} = \max\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. Соотношения (27) и (9) возвращают нас к результатам работы [12].

Рассмотрим в качестве примера гейзенберговский димер с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} J \sigma_1 \sigma_2, \quad (28)$$

где J – константа взаимодействия, а $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ – вектор матриц Паули (в узлах 1 или 2). Матрица плотности димера, находящегося в равновесии с термостатом при температуре T , равна (см. [18])

$$\rho(T) \equiv \frac{1}{Z} \exp(-\mathcal{H}/k_B T) = \frac{1}{Z} e^{-3K} |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + \frac{1}{Z} e^K (|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + |\Phi^-\rangle\langle\Phi^-|), \quad (29)$$

где статсумма

$$Z = 3e^K + e^{-3K}, \quad (30)$$

а $K = J/2k_B T$ и k_B – постоянная Больцмана.

Матрица плотности (29) является частным случаем выражения (24) и соответствует матрице плотности Вернера [12]. Руководствуясь (27), находим, что согласованность такой системы может быть отлична от нуля лишь в антиферромагнитном случае ($J < 0$). Ее величина при этом равна [19, 20] (см. также [16, 18])

$$C(T) = \begin{cases} -1 + 2/[1 + 3 \exp(-2|J|/k_B T)] & T < T_e \\ 0, & T \geq T_e \end{cases}, \quad (31)$$

где температура

$$T_e = \frac{2}{\ln 3} |J|/k_B. \quad (32)$$

Эти выражения и соотношение (11) дают интересующую нас зависимость флуктуаций термальной запутанности $\Delta E(T)$ в димере Гейзенберга.

На рис.3 показан температурный ход запутанности и ее флуктуаций в гейзенберговском димере. Ве-

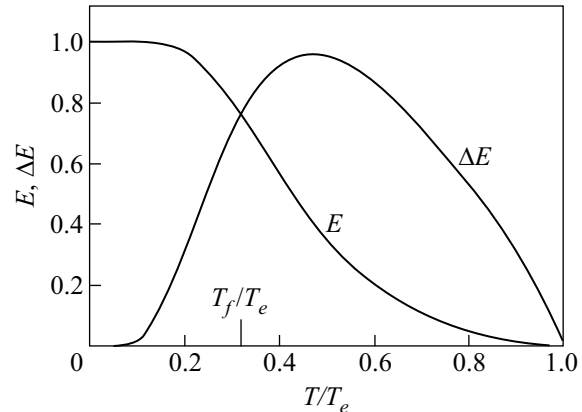


Рис.3. Запутанность E и ее флуктуация ΔE в димере Гейзенберга как функции относительной температуры T/T_e . Удлиненная риска по оси абсцисс отмечает $T_f/T_e = 0.31776 \dots$

личины $E(T)$ и $\Delta E(T)$ становятся равными друг другу при температуре T_f :

$$\frac{k_B T_f}{|J|} = 2 / \ln \left[\frac{3(1 + C_f)}{1 - C_f} \right] = 0.57849 \dots \quad (33)$$

Как видно из рис.3, выше температуры T_f флуктуации запутанности превосходят саму запутанность. При подходе к точке исчезновения запутанности ($T = T_e$) величина относительных флуктуаций расходуется по закону $\delta E \sim 1/(1 - T/T_e)$. Рис.4 иллюстрирует поведение δE в димере Гейзенберга.

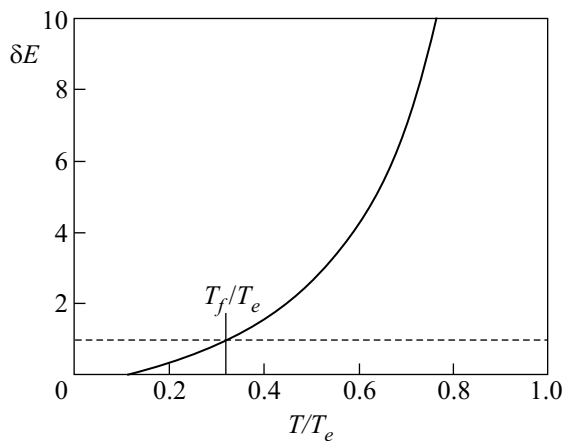


Рис.4. Зависимость δE от T/T_e для димера Гейзенберга (сплошная кривая). Пунктир показывает уровень $\delta E = 1$

При температурах, равной или выше T_e (то есть в сепарабельном состоянии), согласованность (31), а вместе с ней запутанность и ее флуктуации равны нулю.

Итак, для энтропии запутанности следует принимать во внимание ее флуктуации. Такими флуктуациями нельзя пренебрегать в районе точек, где система испытывает переход из запутанного состояния в сепарабельное. Развитые в Письме представления о флуктуациях запутанности могут оказаться полезными и в других областях, где используется концепция “энтропии редуцированной матрицы плотности”.

Авторы благодарят за обсуждение работы участников семинара “Квантовые компьютеры”, руководимого акад. К.А. Валиевым. При этом мы особенно признательны А.С. Холево, сделавшему ряд полезных замечаний. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 07-07-00048) и программы Президиума РАН “Разработка методов получения химических веществ и создания новых материалов”.

1. W. K. Wootters, *Quant. Inf. Comp.* **1**, 27 (2001).
2. M. B. Plenio and S. Virmani, *Quant. Inf. Comp.* **7**, 1 (2007).
3. L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh, and V. Vedral, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 517 (2008).
4. R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, *Rev. Mod. Phys.* (в печати); arXiv: quant-ph/0702225.
5. L. Bombelli, R. K. Koul, J. Lee, and R. D. Sorkin, *Phys. Rev. D* **34**, 373 (1986).
6. I. Klich and L. Levitov, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 100502 (2009).
7. C. H. Bennett, G. Brassard, S. Popescu et al., *Phys. Rev. Lett.* **76**, 722 (1996).
8. C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu, and B. Schumacher, *Phys. Rev. A* **53**, 2046 (1996).
9. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*. Ч. 1, Физматлит, Москва (2008).
10. H. Li and F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 010504 (2008).
11. B. Nienhuis, M. Campostrini, and P. Calabrese, *J. Stat. Mech.: Theory Exp.*, P02063 (2009).
12. C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, and W. K. Wootters, *Phys. Rev. A* **54**, 3824 (1996).
13. S. Hill and W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 5022 (1997).
14. W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245 (1998).
15. K. Audenaert, F. Verstraete, and B. De Moor, *Phys. Rev. A* **64**, 052304 (2001).
16. А. А. Кокин, *Твердотельные квантовые компьютеры на ядерных спинах*. Институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск (2004).
17. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*. Физматлит, Москва (2008).
18. С. М. Алдошин, Э. Б. Фельдман, М. А. Юрищев, *ЖЭТФ* **134**, 940 (2008).
19. M. A. Nielsen, *Quantum Information Theory*, Dissertation, New Mexico (1998); arXiv: quant-ph/0011036.
20. M. C. Arnesen, S. Bose, and V. Vedral, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 017901 (2001).