

О нелинейной неустойчивости решений систем гидродинамического типа

А. Д. Полянин¹⁾

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва, Россия

Поступила в редакцию 9 июня 2009 г.

Описаны новые точные решения (включая периодические решения) трехмерных нестационарных уравнений Навье–Стокса, содержащие произвольные функции. Исследованы вопросы о нелинейной устойчивости/неустойчивости полученных решений. Обнаружено, что характерной чертой широкого класса решений систем гидродинамического типа является их неустойчивость. Показано, что неустойчивость может иметь место не только при достаточно больших, но и при произвольно малых числах Рейнольдса (и может не зависеть от профиля скорости жидкости). Дана общая физическая интерпретация рассматриваемых решений. Важно отметить, что для доказательства неустойчивости решений в статье применен новый точный метод (не использующий никаких допущений и приближений), который может быть полезен для анализа других нелинейных физических моделей и явлений.

PACS: 47.20.–k

Некоторые точные решения двумерных и трехмерных уравнений Навье–Стокса приведены в [1–11]. Описание различных методов теории гидродинамической устойчивости и результатов их применения можно найти, например, в [1, 12, 13].

1. Уравнения движения жидкости. Структура точных решений. Трехмерные нестационарные движения вязкой несжимаемой жидкости описываются уравнениями Навье–Стокса и неразрывности:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V_n}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_n}{\partial x} + V_2 \frac{\partial V_n}{\partial y} + V_3 \frac{\partial V_n}{\partial z} = \\ & = -\frac{1}{\rho} \nabla_n P + \nu \left(\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2} \right), \quad n = 1, 2, 3, \\ & \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x, y, z – декартовы координаты, t – время, V_1, V_2, V_3 – компоненты скорости жидкости, P – давление, ρ и ν – плотность и кинематическая вязкость жидкости; $\nabla_1 P = \partial P / \partial x$, $\nabla_2 P = \partial P / \partial y$, $\nabla_3 P = \partial P / \partial z$. При записи уравнений (1) считалось, что массовые силы потенциальны и включены в давление.

Система уравнений (1) допускает широкий класс точных решений с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных следующего вида:

$$V_n = f_n(z, t)x + g_n(z, t)y, \quad n = 1, 2; \quad V_3 = F(z, t). \tag{2}$$

Исходная идея искать точные решения уравнений Навье–Стокса в форме (2) была высказана Линем [14]. В результате подстановки выражений (2) в уравнения (1) с последующим исключением давления возникают полиномиальные выражения первой степени по координатам x и y вида $A_m x + B_m y + C_m = 0$, коэффициенты которых A_m, B_m, C_m зависят только от переменных z и t и выражаются через функции f_n, g_n, F , и их производные. Приравняв A_m, B_m, C_m нулю, получим переопределенную систему уравнений для f_n, g_n, F . Анализ этой системы в итоге дает следующее представление для компонент скорости и давления [7, 11]:

$$\begin{aligned} V_1 &= x \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial z} + w \right) + yv, \\ V_2 &= xu - y \left(\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial z} + w \right), \quad V_3 = F, \\ \frac{P}{\rho} &= p_0 - \frac{1}{2} \alpha x^2 - \frac{1}{2} \beta y^2 - \\ & - \gamma xy - \frac{1}{2} F^2 + \nu \frac{\partial F}{\partial z} - \int \frac{\partial F}{\partial t} dz, \end{aligned} \tag{3}$$

где $p_0, \alpha, \beta, \gamma$ – произвольные функции времени t , задающие распределение давления, F, u, v, w – неизвестные функции, зависящие от координаты z и времени t .

Общая физическая интерпретация решений вида (2) (или (3)) будет дана в разд. 8.

¹⁾e-mail: polyanin@ipmnet.ru

2. Определяющая система уравнений. Выражения для составляющих скорости и давления (3) редуцируют уравнения гидродинамики (1) к нелинейной системе, состоящей из четырех уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial z} + F \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 = \\ & = \nu \frac{\partial^3 F}{\partial z^3} + 2(uv + w^2) - \alpha - \beta, \\ & \frac{\partial u}{\partial t} + F \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial F}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \gamma, \\ & \frac{\partial v}{\partial t} + F \frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial F}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \gamma, \\ & \frac{\partial w}{\partial t} + F \frac{\partial w}{\partial z} - w \frac{\partial F}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Основная идея последующего анализа состоит в том, чтобы из системы (4) выделить одно изолированное уравнение для продольной компоненты скорости $V_3 = F$, которое дополняется вторым уравнением для определения новой вспомогательной функции G .

3. Сведение системы (4) к двум уравнениям. В уравнениях (4) положим

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \sin \varphi \left(\frac{\partial F}{\partial z} + q \right) + a^2 G, \\ v &= \frac{1}{2} \sin \varphi \left(\frac{\partial F}{\partial z} + q \right) - b^2 G, \\ w &= \frac{1}{2} \cos \varphi \left(\frac{\partial F}{\partial z} + q \right) + abG, \\ \alpha &= \frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{2} p(1 - \cos \varphi) + \frac{1}{2} q'_t \cos \varphi, \\ \beta &= \frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{2} p(1 + \cos \varphi) - \frac{1}{2} q'_t \cos \varphi, \\ \gamma &= \frac{1}{2} p \sin \varphi + \frac{1}{2} q'_t \sin \varphi, \end{aligned} \quad (5)$$

где $p = p(t)$, $q = q(t)$ – произвольные функции, a , b – произвольные постоянные, $G = G(z, t)$ – искомая функция, φ – константа, определяемая из трансцендентного уравнения

$$(a^2 - b^2) \sin \varphi + 2ab \cos \varphi = 0. \quad (6)$$

В результате система (4) сводится к двум уравнениям:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial z} + F \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 = \nu \frac{\partial^3 F}{\partial z^3} + q \frac{\partial F}{\partial z} + p, \quad (7)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} + F \frac{\partial G}{\partial z} - G \frac{\partial F}{\partial z} = \nu \frac{\partial G}{\partial z^2}. \quad (8)$$

Нелинейное уравнение (7) может рассматриваться независимо, а уравнение (8) линейно относительно искомой функции G и имеет тривиальное частное решение $G = 0$.

Отметим, что уравнение (7) при различных p и q встречалось в работах [4, 6, 9, 11] (в том числе и в задачах пограничного слоя [6]), в которых можно найти его некоторые точные решения.

Общее свойство уравнения (7) [6, 11]: если $\tilde{F}(z, t)$ – некоторое его решение, то функция

$$F = \tilde{F}(z + \psi(t), t) - \psi'_t(t), \quad (9)$$

где $\psi(t)$ – произвольная функция, также будет решением уравнения (7). Кроме того, решением будет и функция $F = -\tilde{F}(-z, t)$.

4. Точные решения уравнения (7). Приведем несколько новых точных решений уравнения (7), которые выражаются в элементарных функциях.

1) Дробно-рациональное решение с обобщенным разделением переменных:

$$F = -a'_t(t) + b(t)[z + a(t)] - \frac{6\nu}{z + a(t)},$$

$$q = -4b, \quad p = b'_t + 3b^2,$$

где $a = a(t)$ и $b = b(t)$ – произвольные функции.

2) Решения с обобщенным разделением переменных экспоненциального вида по z :

$$F = a(t)e^{-\sigma z} + b(t), \quad p = 0, \quad q = \frac{a'_t}{a} - \sigma b - \sigma^2 \nu,$$

где $a = a(t)$ и $b = b(t)$ – произвольные функции, σ – произвольная постоянная. Выбрав в качестве $a(t)$ и $b(t)$ периодические функции, получим периодическое решение по времени.

3) Пространственно-периодические решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$F = a(t) \sin(\sigma z + B), \quad a(t) = C \exp \left[-\nu \sigma^2 t + \int q(t) dt \right],$$

$$p = -\sigma^2 a^2(t), \quad q = q(t) \text{ – произвольная функция,}$$

где B , C , σ – произвольные постоянные. Положив $q(t) = \nu \sigma^2 + \varphi'_t(t)$, где $\varphi(t)$ – периодическая функция, получим решение, периодическое по обоим аргументам z и t .

4) Решение с функциональным разделением переменных:

$$F = -6\nu \sigma t [\sigma(z + a(t))] - a'_t(t), \quad p = 0, \quad q = 8\nu \sigma^2,$$

где $a = a(t)$ – произвольная функция, σ – произвольная постоянная (это решение ограничено при ограниченной производной a'_t).

5. Представление решений уравнения (8) через решения уравнения (7). Пусть $F = F(z, t)$ – решение уравнения (7). Тогда уравнение (8) имеет решение

$$G = A'_t + Aq + A \frac{\partial F}{\partial z} + B \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \quad (10)$$

где функции $A = A(t)$ и $B = B(t)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$A''_{tt} + qA'_t + (p + q'_t)A = 0, \quad (11)$$

$$B'_t + qB = 0. \quad (12)$$

Доказательство данного факта проводится путем исключения функции G из (8) и (10) с последующим сопоставлением полученного выражения как с уравнением (7), так и с уравнением, возникающим в результате дифференцирования (7) по z .

Общее решение уравнения (12) имеет вид $B = C \exp\left(-\int q dt\right)$, где C – произвольная постоянная.

6. Анализ устойчивости/неустойчивости решений, основанный на уравнении (8). Для анализа устойчивости/неустойчивости решений используем формулу (10) и уравнения (11), (12), которые связывают решения уравнений (7), (8). Важно отметить, что во многих случаях нет необходимости знать явный вид функции F .

Рассмотрим сначала задачи со стационарной продольной компонентой скорости, что соответствует $F = F(z)$, $p = \text{const}$, $q = \text{const}$. В этом случае решение уравнения (11) зависит от знака дискриминанта $\Delta = q^2 - 4p$:

$$A(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{qt}{2}\right) \left[C_1 \exp\left(\frac{t\sqrt{\Delta}}{2}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{t\sqrt{\Delta}}{2}\right) \right] & \text{при } \Delta > 0, \\ \exp\left(-\frac{qt}{2}\right) \left[C_1 \sin\left(\frac{t\sqrt{|\Delta|}}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{t\sqrt{|\Delta|}}{2}\right) \right] & \text{при } \Delta < 0, \\ \exp\left(-\frac{qt}{2}\right) (C_1 t + C_2) & \text{при } \Delta = 0, \end{cases} \quad (13)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Далее, для простоты, в (10) и (12) полагаем $B = 0$. При анализе будем различать два случая.

1) *Невырожденный случай* $F_z \neq 0$. При $q < 0$ (p – любое) или $p < 0$ (q – любое) решения (10) и (13) (при $C_1 \neq 0$) экспоненциально растут при $t \rightarrow \infty$. Поэтому указанные значения параметров p и q определяют область нелинейной неустойчивости системы (7), (8) для любого ограниченного стационарного профиля продольной компоненты скорости $F(z)$ (отличного от константы). Точка $p = q = 0$ также относится к области неустойчивости системы (7), (8).

Действительно, за счет выбора постоянных C_1 и C_2 в силу (10), (13) можно сделать начальную величину $|G|_{t=0}$ (которая трактуется как начальное возмущение относительно тривиального решения $G = 0$ уравнения (8)) меньше любого наперед заданного ε . Однако при $q < 0$ (p – любое) или $p < 0$ (q – любое) имеем $|G| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Это означает, что произвольно малые начальные возмущения решений системы (7), (8) с увеличением времени неограниченно возрастают.

Замечание. Если $F \rightarrow F_1$ при $z \rightarrow -\infty$ и $F \rightarrow F_2$ при $z \rightarrow +\infty$ ($F_1, F_2 = \text{const}$), то решение (10) при $A = 0$, $B \neq 0$ стремится к нулю при $z \rightarrow \pm\infty$.

При $q = 0$, $p > 0$ решение (13), а следовательно, и решение (10) являются периодическими. Совместное выполнение неравенств $q \geq 0$, $p \geq 0$ ($|p| + |q| \neq 0$) определяют область условной устойчивости рассматриваемых решений.

Важно подчеркнуть, что здесь речь идет о *нелинейной неустойчивости*, причем все полученные выше результаты и решения являются точными (а не линеаризованными, как это имеет место в теории линейной устойчивости; здесь не использованы также различные допущения, разложения и аппроксимации, характерные для многих нелинейных теорий [1, 12, 13]).

Пример 1. Стационарное пространственно-периодическое решение,

$$F = a \sin(\sigma z + b), \quad G = 0 \quad (p = -a^2 \sigma^2, \quad q = \nu \sigma^2)$$

системы (7), (8) является неустойчивым при любых значениях a, b, σ ($a \neq 0, \sigma \neq 0$).

Пример 2. Стационарное монотонное ограниченное решение,

$$F = -6\nu \sigma \text{th}(\sigma z + b), \quad G = 0 \quad (p = 0, \quad q = 8\nu \sigma^2)$$

системы (7), (8) является устойчивым.

Все приведенные выше выводы по устойчивости и неустойчивости, а также формулы (10)–(13), остаются справедливыми для любых нестационарных решений $F = F(z, t)$, $G = G(z, t)$ (при условии ограниченности производной $F_z \neq 0$) системы (7), (8) при $p = \text{const}$, $q = \text{const}$.

Области неустойчивости и устойчивости решений системы (7)–(8)

Область изменения параметров	Продольная компонента скорости F	Устойчивость/неустойчивость
$p < 0, q$ – любое; или $q < 0, p$ – любое; или $p = q = 0$	F – любое решение, кроме $F \equiv \text{const}$	Решения уравнения (8) неустойчивы
$p \geq 0, q \geq 0$ (оба неравенства выполняются вместе, причем $ p + q \neq 0$)	F – любое решение, кроме $F \equiv \text{const}$	Решения уравнения (8) условно устойчивы
$p = 0, q > 0$	$F \equiv \text{const}$	Решения уравнения (7) неустойчивы (хотя решения уравнения (8) устойчивы)
$p = 0, q \leq 0$	$F \equiv \text{const}$	Решения обоих уравнений (7) и (8) устойчивы

В силу вышеизложенного три четверти плоскости параметров p, q соответствуют неустойчивым решениям. Важно отметить, что описанная выше абсолютная неустойчивость течений не связана с конкретным профилем скорости и реализуется за счет уравнения (8), отвечающего за поперечные компоненты скорости жидкости. Поскольку в уравнение (11) и формулы (13) не входит вязкость жидкости ν , то указанные результаты не зависят от числа Рейнольдса, то есть свойство неустойчивости решений имеет место не только при достаточно больших, но и при малых числах Рейнольдса ($0 < \text{Re} < \infty$).

2) *Вырожденный случай* $F_z \equiv 0$. Пусть

$$F = a = \text{const} \quad (p = 0). \tag{14}$$

Тогда любое решение уравнения (8), которое при переходе от z, t к новым переменным $t, \xi = z - at$ сводится к классическому уравнению теплопроводности, является устойчивым при любых значениях параметров a и q .

Замечание. Аналогичным образом с помощью уравнений (10), (11) можно исследовать на устойчивость нестационарные решения уравнений (7), (8) при переменных $p = p(t), q = q(t)$.

7. Анализ устойчивости решений $F = \text{const}$ уравнения (7) при $p = 0$.

1) Сначала исследуем на устойчивость тривиальное решение $F = 0$ уравнения (7) при $p = 0$ для различных значений параметра $q = \text{const}$. Уравнение (7) допускает точное решение

$$F = \varepsilon e^{ikz + \lambda t}, \quad \lambda = q - \nu k^2, \tag{15}$$

где ε, k, λ – действительные числа. Это решение является также решением линеаризованного уравнения (7), в котором отброшены квадратичные члены (чрезвычайно редкий случай). Модуль разности между

решением (15) и тривиальным решением в начальный момент времени равен $|\varepsilon|$ (за счет выбора ε эту разность можно сделать сколь угодно малой).

При $q - \nu k^2 > 0$ тривиальное решение будет неустойчивым, а при $q - \nu k^2 < 0$ – устойчивым. Граница устойчивости представляет собой параболу $q = \nu k^2$ в плоскости k, q . При уменьшении вязкости жидкости $\nu \rightarrow 0$ (что соответствует увеличению чисел Рейнольдса) ветви параболы стремятся к линии $q = 0$, а область неустойчивости расширяется и в пределе распространяется на всю верхнюю полуплоскость $q > 0$. Увеличение ν или k приводит к расширению области устойчивости.

Поскольку параметром k можно свободно распоряжаться, то при любом $q > 0$ за счет выбора k можно добиться неустойчивости тривиального решения.

2) Рассмотрим теперь произвольное стационарное решение уравнения (14). Вместо (15) возьмем теперь функцию

$$F = \varepsilon e^{ik(z-at) + \lambda t} + a, \quad \lambda = q - \nu k^2, \tag{16}$$

которая в силу свойства (9) при $\psi(t) = -at$ также является решением уравнения (7). Модуль разности между решениями (14) и (16) в начальный момент времени можно сделать сколь угодно малой за счет выбора ε . Все критерии устойчивости и неустойчивости решения (14) в зависимости от параметров k, q остаются теми же самыми, что и для тривиального решения.

Замечание. Из результатов пп. 6, 7 следует, что при $p = 0, q \leq 0$ устойчивым является только постоянный профиль продольной компоненты скорости $F = \text{const}$.

В таблице подведены общие итоги анализа неустойчивости и устойчивости ограниченных решений системы (7), (8) при различных значениях па-

раметров p и q . Видно, что область неустойчивости значительно шире (она занимает три квадранта из четырех в плоскости p, q), чем область устойчивости.

8. Физическая интерпретация решений. Будем рассматривать течения вязкой несжимаемой жидкости, когда вектор скорости жидкости на оси z направлен вдоль этой оси. Вблизи оси z поперечные компоненты скорости малы, и их можно разложить в ряд Тейлора по поперечным координатам x и y . Если в компонентах скорости ограничиться главными членами разложения по x и y , то можно получить представление (2), откуда следует (3).

Любые течения жидкости, имеющие две плоскости симметрии, допускают представление вида (2) в окрестности линии пересечения этих плоскостей (в используемых обозначениях линия пересечения плоскостей задает ось z). К таким течениям относятся осесимметричные течения, вращательно-симметричные течения (в частности, течения кармановского типа [1, 9, 10, 15]), плоские течения, симметричные относительно прямой линии, течения в прямолинейных непроницаемых и пористых трубах с эллиптическим и прямоугольным сечением, струи жидкости, вытекающие из отверстий эллиптической и прямоугольной формы и т.д. Указанное свойство точных решений уравнений Навье – Стокса вида (2) позволяет использовать их для приближенного описания широкого класса “осевых” течений.

9. Обсуждение результатов. Описанная выше неустойчивость решений уравнений Навье–Стокса в широком диапазоне изменения параметров p и q ($q < 0$, $p \neq 0$ – любое или $p < 0$, q – любое) происходит при любой форме профиля поперечной компоненты скорости жидкости и не зависит от числа Рейнольдса (то есть свойство неустойчивости рассматриваемого класса решений имеет место не только при достаточно больших, но и при произвольно малых числах Рейнольдса, $Re \neq 0$). Этот эффект обусловлен неустойчивостью поперечных компонент скорости жидкости, которые описываются уравнением (8).

Твердые границы, на которых выставляется условие прилипания жидкости, обычно являются стабилизирующим фактором. При увеличении числа Рейнольдса течение жидкости в ядре потока постепенно перестает “ощущать” влияние граничных условий. При достижении критического числа Рей-

нольдса механизм неустойчивости решений уравнений Навье–Стокса становится доминирующим и реализуется турбулентный режим течения (при течении жидкостей в гладких трубах критическое число Рейнольдса достигает нескольких тысяч [15]).

При отсутствии твердых границ неустойчивость решений уравнений Навье–Стокса проявляется значительно быстрее. Например, ламинарные струи теряют устойчивость уже при небольших числах Рейнольдса, $Re \approx 5$ [15].

Автор благодарит С.Н. Аристову и В.В. Дильману за полезные обсуждения и замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты # 08-08-00530, # 09-01-00343).

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, 3-е изд., М.: Наука, 1986.
2. W. I. Fushchich, W. M. Shtelen, and S. L. Slavutsky, *J. Physics A: Math. and Gen.* **24**, 971 (1991).
3. D. K. Ludlow, P. A. Clarkson, and A. P. Bassom, *J. Physics A: Math. and Gen.* **31**, 7965 (1998).
4. А. Д. Полянин, *ДАН* **380**, 491 (2001).
5. S. N. Aristov and I. M. Gitman, *J. Fluid Mech.* **464**, 209 (2002).
6. A. D. Polyaniin and V. F. Zaitsev, *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press., 2004.
7. S. V. Meleshko, *Nonlinear Dynamics* **36**, 47 (2004).
8. А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов, *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики*, М.: Физматлит, 2005.
9. В. В. Пухначев, *Успехи механики* **4**, 6 (2006).
10. P. G. Drazin and N. Riley, *The Navier – Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions*, Cambridge Univ. Press, 2006.
11. С. Н. Аристов, А. Д. Полянин, *ДАН* **427**, 35 (2009).
12. М. А. Гольдштик, В. Н. Штерн, *Гидродинамическая устойчивость и турбулентность*, Новосибирск: Наука, 1977.
13. *Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности*, ред. Х. Суинни, Дж. Голлаб, М.: Мир, 1984.
14. C. C. Lin, *Arch. Rational Mech. Anal.* **1**, 391 (1958).
15. A. D. Polyaniin, A. M. Kutepov, A. V. Vyazmin, and D. A. Kazenin, *Hydrodynamics, Mass and Heat Transfer in Chemical Engineering*, London: Taylor & Francis, 2002.