

Динамические тороидальные хопфионы в ферромагнетике с анизотропией типа “легкая ось”

А. Б. Борисов, Ф. Н. Рыбаков¹⁾

Институт физики металлов Уральского отд. РАН, 620041 Екатеринбург, Россия

Поступила в редакцию 7 сентября 2009 г.

Найдены трехмерные тороидальные прецессионные солитоны с ненулевым индексом Хопфа, равномерно движущиеся вдоль оси анизотропии в одноосном ферромагнетике. Путем численного решения уравнения Ландау-Лифшица определена их структура и области существования.

PACS: 03.50.-k, 11.27.+d, 47.32.Cc, 75.10.Nk, 75.60.Ch, 94.05.Fg

Статические и динамические топологические структуры с ненулевым инвариантом Хопфа (хопфионы) в различных моделях и средах обсуждались в работах [1–4]. В частности, в трехмерных ферромагнитных материалах распределение намагниченности характеризуется целочисленным индексом Хопфа H . Изучение динамики хопфионов в этих средах представляет не только теоретический интерес, но и важно для различных физических приложений, особенно в перспективе создания принципиально новых элементов памяти.

В одноосном ферромагнетике устойчивые прецессионные солитоны с $H = 0$ (магнитные капли) были найдены в работах [5, 6]. Однако в таких системах прецессионные равномерно движущиеся тороидальные солитоны при $H \neq 0$ были найдены только в изотропном ферромагнетике [7]. Их устойчивость к возмущениям, нарушающим аксиальную симметрию, обсуждалась в работе [8]. Цель настоящей работы – исследовать области существования и структуру тороидальных хопфионов, равномерно движущихся вдоль оси анизотропии в одноосном ферромагнетике.

Динамика вектора намагниченности описывается уравнением Ландау-Лифшица, которое в пренебрежении релаксацией может быть записано в виде

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}], \quad \mathbf{H}_{\text{eff}} = -\frac{\delta E}{\delta \mathbf{M}}, \quad (1)$$

где γ – гиромагнитное отношение ($\gamma > 0$). Энергия ферромагнетика равна сумме обменной энергии

$$E_{\text{exch}} = (\alpha/2) \int (\partial_i \mathbf{M})^2 d\mathbf{r} \quad (2)$$

и энергии одноосной магнитной анизотропии

$$E_{\text{anis}} = (\beta/2) \int (M_x^2 + M_y^2) d\mathbf{r}. \quad (3)$$

Для многих магнитных сред характерно большое значение фактора качества $Q = \beta/4\pi$, и вклад энергии магнитных дипольных взаимодействий не существен.

В каждой точке пространства \mathbb{R}^3 с декартовой системой координат (x, y, z) ориентация вектора \mathbf{M} задается точкой на двумерной сфере \mathbb{S}^2 в угловых переменных Θ и Φ :

$$M_x + iM_y = M_0 \sin \Theta e^{i\Phi}, \quad M_z = M_0 \cos \Theta. \quad (4)$$

Рассмотрим локализованные решения (1), для которых

$$\Phi = \omega t + Q\varphi + \phi(r, z - Vt), \quad \Theta = \theta(r, z - Vt), \quad (5)$$

где $Q \in \mathbb{Z}$, φ – полярный угол цилиндрической системы координат (r, φ, z) , а $\theta \rightarrow 0$ при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$. Такие решения описывают трехмерные прецессионные солитоны стационарного профиля, распространяющиеся вдоль оси анизотропии. В дальнейшем, для простоты, мы будем обсуждать конфигурации единичного векторного поля

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(r, z) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad (6)$$

в движущейся вдоль z (со скоростью V) системе координат.

Искомое векторное поле \mathbf{M} задает отображение $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{S}^2$ и характеризуется целочисленным топологическим индексом Хопфа H . Если $Q \neq 0$, то решению типа (5) соответствует тороидальный хопфион [9, 10] с индексом

$$H = QT, \quad T = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbf{n} \cdot [\partial_r \mathbf{n} \times \partial_z \mathbf{n}] dr dz. \quad (7)$$

¹⁾ e-mail: F.N.Rybakov@gmail.com

Представим энергию как функционал векторного поля \mathbf{n} :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} w_E dr dz, \quad (8)$$

$$w_E = \alpha M_0^2 \pi r [(\partial_r \mathbf{n})^2 + (\partial_z \mathbf{n})^2 + \left(\frac{Q^2}{r^2} + \frac{\beta}{\alpha}\right) (n_x^2 + n_y^2)]. \quad (9)$$

Помимо энергии, уравнение (1) обладает двумя интегралами движения: числом спиновых отклонений (магнонов)

$$N = \frac{M_0}{\gamma \hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (1 - n_z) 2\pi r dr dz \quad (10)$$

и проекцией импульса поля намагниченности [11] на ось анизотропии

$$P = -\frac{M_0}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbf{n} \cdot [\partial_r \mathbf{n} \times \partial_z \mathbf{n}] \pi r^2 dr dz. \quad (11)$$

Для определения структуры трехмерных солитонов был использован тот же метод минимизации функционала энергии (8) с ограничением (10), что в работе [12], но с тем отличием, что ограничение (11) учитывалось дополнительной аддитивной штрафной квадратичной функцией, а пробная конфигурация поля задавалась гладкими функциями ϕ_{ini} и θ_{ini} , соответствующими расслоению Хопфа с индексом $H = Q$:

$$\phi_{ini} = -\frac{\pi}{2} + v + k \frac{z}{a}, \quad (12)$$

$$\cos(\theta_{ini}) = 1 - \frac{4 \sinh(u)^2}{2 + \cosh(2u)} e^{\delta(1 - \coth(u))}, \quad (13)$$

где u и v – тороидальные координаты:

$$\tanh(u) = (2ar)/(a^2 + r^2 + z^2), \quad 0 \leq u < \infty, \quad (14)$$

$$\cot(v) = (a^2 - r^2 - z^2)/2az, \quad 0 \leq v < 2\pi. \quad (15)$$

Параметры a и k определяются интегралами движения N и P :

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi^2} \frac{\gamma \hbar}{M_0} N}, \quad k = k_0 + k_P \frac{\gamma}{M_0} \frac{P}{a^2}, \quad (16)$$

где константы $k_0 \approx 3.353$, $k_P \approx 0.076$.

Тем же методом, для сравнения, были выполнены расчеты и для случая нетопологических солитонов с $H = 0$ – стационарных [5] и движущихся [13] магнетонных капель. Пробная конфигурация поля в этих случаях задавалась иными функциями:

$$\phi_{ini} = -\frac{\pi}{2} + k \operatorname{atan}\left(\frac{z}{r}\right), \quad (17)$$

$$\theta_{ini} = \begin{cases} \pi\rho/R_1, & 0 \leq \rho < R_1, \\ \pi(2R_1 - \rho)/R_1, & R_1 \leq \rho < 2R_1, \\ 0, & \rho \geq 2R_1, \end{cases} \quad (18)$$

где $\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$, а параметры k и R_1 определяются интегралами движения N и P :

$$k = 2 \frac{\gamma}{M_0} P \left(\frac{\gamma \hbar}{M_0} N\right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{4\pi^2 - 6}{3\pi^4}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad (19)$$

$$R_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma \hbar}{M_0} N\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3\pi}{4\pi^2 - 6}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (20)$$

Результаты расчета нетопологических солитонов находятся в соответствии с данными работ [6, 13].

Искомое поле $\mathbf{n}(r, z)$ доставляет экстремум функционалу

$$J(\mathbf{n}(r, z)) = E - \hbar\omega N + VP. \quad (21)$$

Используя необходимое условие экстремума, составим пару уравнений:

$$\left. \frac{d}{d\lambda} J(\mathbf{n}(r + \lambda r, z)) \right|_{\lambda=0} = 0, \quad (22)$$

$$\left. \frac{d}{d\lambda} J(\mathbf{n}(r, z + \lambda z)) \right|_{\lambda=0} = 0. \quad (23)$$

Решая полученную систему относительно неизвестных ω и V , получим удобные формулы для расчета искомых:

$$\omega = \frac{E_{\text{exch}} + E_{\text{anis}} - I_z}{\hbar N}, \quad V = \frac{2E_{\text{exch}} - 3I_z}{2P}, \quad (24)$$

где

$$I_z = \alpha M_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (\partial_z \mathbf{n})^2 2\pi r dr dz. \quad (25)$$

Минимизируемый функционал энергии (8) после нескольких тысяч итераций достигает минимального значения. Для проверки полученных конфигураций поля по формулам (24) вычислялись ω и V , и рассчитывалась невязка для дифференциального уравнения Ландау-Лифшица (1). Обсудим полученные результаты.

На рис.1 построены линии постоянного значения углов, параметризующих вектор \mathbf{n} . Координаты нормированы на характерную длину

$$l_0 = \sqrt{\alpha/\beta}. \quad (26)$$

Видно, что радиус центрального вихревого кольца, соответствующего значению $\theta = \pi$ – южному полюсу сферы \mathbb{S}^2 , у движущегося солитона больше. Линии $\cot(\phi) = \text{const}$ не построены вблизи малых значений θ , так как настоящий численный метод, определяющий значения векторов \mathbf{n} , не позволяет точно вычислять азимутальный угол, когда $|n_z| \rightarrow 1$. Но вид этих линий у стационарного и движущегося хопфионов существенно различен. Область локализации

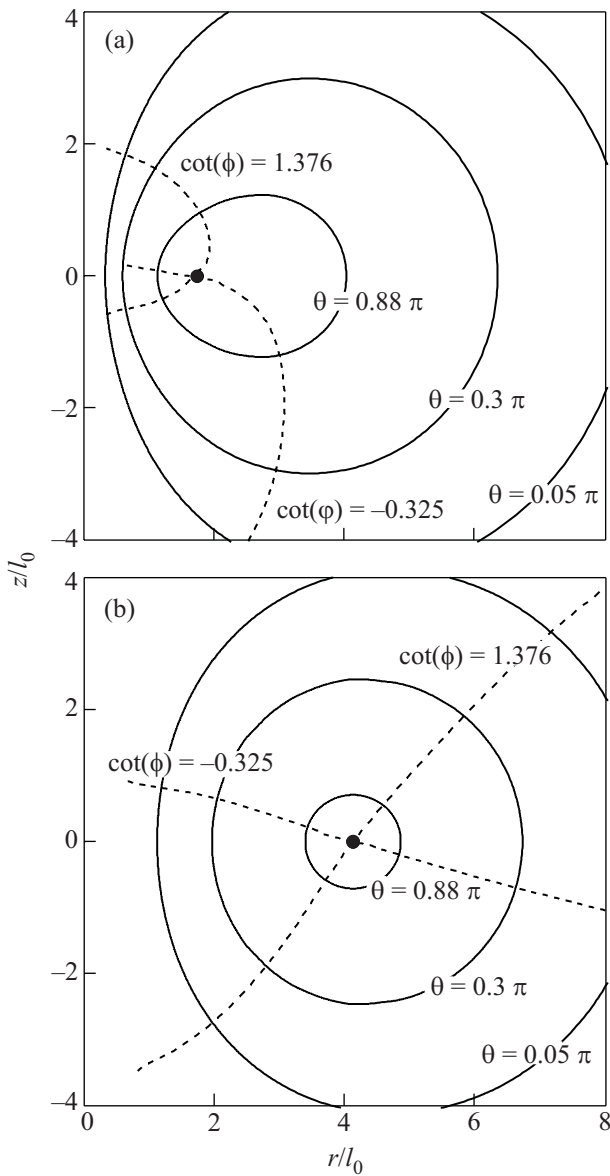


Рис.1. Линии постоянного значения углов, параметризующих единичный вектор \mathbf{n} , для стационарного (а) и равномерно движущегося (б) со скоростью $V = 0.134V_0$ хопфионов с индексом $H = 3$, $\omega = 0.567\omega_0$; сплошная линия – $\theta = \text{const}$; пунктирная линия – $\cot(\phi) = \text{const}$

движущегося солитона несколько больше, но, как и в стационарном случае, порядка l_0 .

На рис.2 изображена зависимость приведенной энергии $\varepsilon = E/\alpha M_0^2 l_0$ от отношения V/V_0 , где $V_0 = \gamma M_0 \sqrt{\alpha\beta}$. График отражает важное выявленное свойство – существование двух типов движущихся хопфионов, по крайней мере в некотором интервале скоростей, с равными H , V и ω . На рис.3 проиллюстрированы типичные распределения нормированной плотности энергии $\sigma_E = w_E/E$. Для

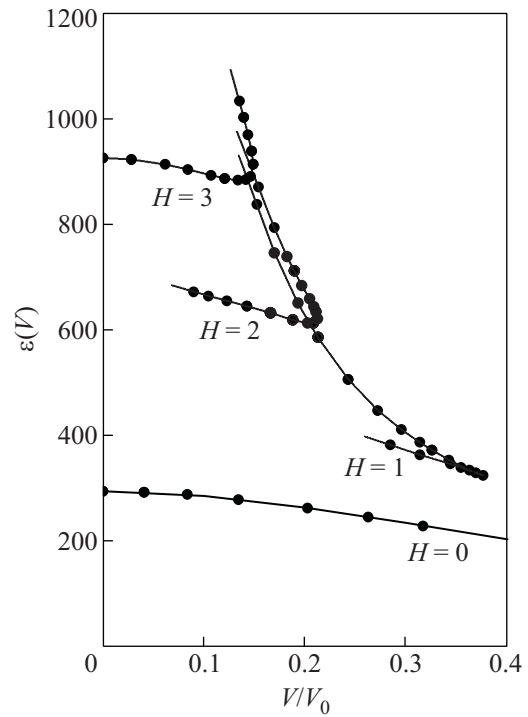


Рис.2. Зависимость энергии от скорости для нетопологического ($H = 0$) и топологических ($H = 1, 2, 3$) солитонов при одинаковой частоте прецессии $\omega = 0.567\omega_0$. Точками обозначены результаты численного счета

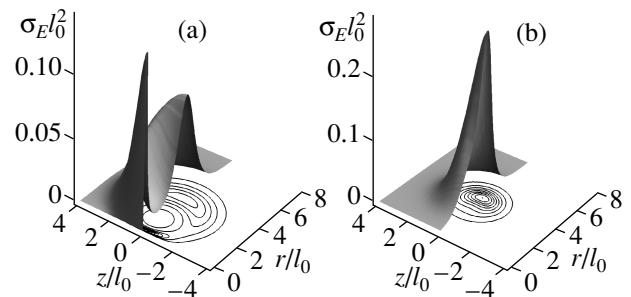


Рис.3. Зависимость нормированной плотности энергии от координат для хопфионов нижней (а) и верхней (б) энергетической ветви, $H = 1$, $\omega = 0.567\omega_0$, $V = 0.314V_0$

хопфионов нижней энергетической ветви с малыми скоростями характерна высокая плотность энергии вдоль стенки тороидальной поверхности, для хопфионов верхней ветви с большой энергией – плотность энергии возрастает от стенки к центру тороида. Из графиков рис.2, 4 также видно, что скорость топологических солитонов ограничена. При уменьшении частоты прецессии предельная скорость хопфиона также уменьшается, а энергия – увеличивается.

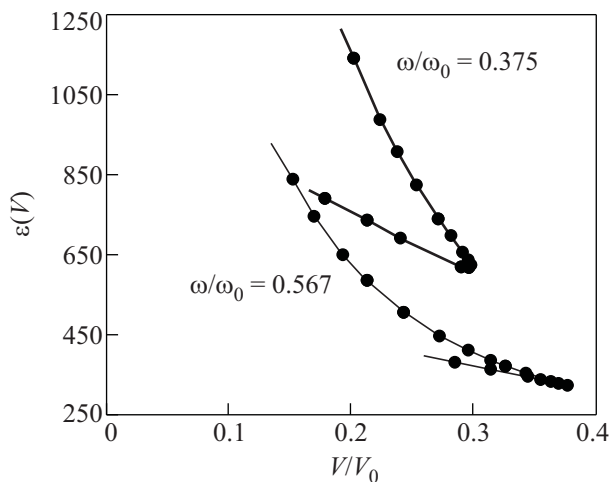


Рис.4. Зависимость энергии от скорости для хопфиона с $H = 1$ для двух значений частоты прецессии

ся. Величина ω нормирована на величину частоты однородного ферромагнитного резонанса:

$$\omega_0 = \gamma M_0 \beta. \quad (27)$$

Самые общие представления о структуре стационарного хопфиона с $H = 1$ не позволяют сравнить его энергию с энергией соответствующего нетопологического солитона [14, 15]. Особенности структуры исследуемого класса объектов пока не дают нам возможности и численными методами исследовать случай с $H = 1$ и $V = 0$ [12]. Но, экстраполируя зависимость $\varepsilon(V)$ в область малых V на рис.2 для $H = 1$, можно сделать однозначный вывод о том, что энергия стационарного прецессионного топологического

солитона больше, чем у нетопологического при равных ω , по крайней мере в некотором диапазоне значений частоты прецессии.

1. L. D. Faddeev, Preprint IAS 75-QS70, 1975.
2. G. E. Volovik and V. P. Mineev, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **73**, 767 (1977) [JETP **46**, 401 (1977)].
3. A. M. Kamchatnov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **82**, 117 (1982) [JETP **55**, 69 (1982)].
4. I. E. Dzyloshinskii and B. A. Ivanov, Pisma v Zh. Eksp. Teor. Fiz. **29**, 592 (1979).
5. B. A. Ivanov and A. M. Kosevich, Pisma v Zh. Eksp. Teor. Fiz. **24**, 495 (1976).
6. B. A. Ivanov and A. M. Kosevich, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **72**, 2000 (1977) [JETP **45**, 1050 (1977)].
7. N. R. Cooper, Phys. Rev. Lett. **82**, 1554 (1999).
8. P. Sutcliffe, Phys. Rev. B **76**, 184439 (2007).
9. A. Kundu and Y. P. Rybakov, J. Phys. **15**, 269 (1982).
10. J. Gladkowski and M. Hellmund, Phys. Rev. D **56**, 5194 (1997).
11. N. Papanicolaou and T. N. Tomaras, Nucl. Phys. B **360**, 425 (1991).
12. A. B. Borisov and F. N. Rybakov, Pisma v Zh. Eksp. Teor. Fiz. **88**, 303 (2008) [JETP Lett. **88**, 264 (2008)].
13. T. Ioannidou and P. M. Sutcliffe, Physica D **150**, 118 (2001).
14. А. М. Косевич, Б. А. Иванов и А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Киев, Наукова думка, 1983.
15. A. M. Kosevich, B. A. Ivanov, and A. S. Kovalev, Phys. Rep. **194**, 117 (1990).