Письма в ЖЭТФ, том 90, вып. 9, с. 663 – 667

О топологическом смещении дискретных источников в газе кротовых нор

А. А. Кириллов, Е. П. Савелова, Г. Д. Шамшутдинова

Ульяновский государственный университет, филиал в г. Димитровград, 433507 Димитровград, Россия

Поступила в редакцию 29 сентября 2009 г.

Рассмотрена модель пространства в виде статического газа кротовых нор. Показано, что рассеяние света на таком газе приводит к формированию специфического диффузионного гало вокруг каждого дискретного источника. Свойства гало определяются распределением кротовых нор в пространстве и гало должно коррелировать с распределением темной материи, что позволяет объяснить полное отсутствие скрытой массы в межгалактическом газе. Получены также численные оценки параметров газа кротовых нор.

PACS: 98.80.–k

1. Как известно, все многообразие проявлений темной материи можно приписать наличию локально нетривиальной топологической структуры пространства или, что эквивалентно, наличию специфического топологического смещения источников (см., например, [1]). Простейшей моделью подобного пространства является статический газ кротовых нор [2]. В настоящей работе мы покажем, что газ кротовых нор приводит не только к зависящей от масштаба перенормировке интенсивности чисто гравитационных источников, то есть, к появлению "гало темной материи" вокруг каждой точечной гравитирующей массы, но и к аналогичной перенормировке всех космических дискретных источников излучения. Другими словами, вокруг каждого дискретного источника формируется диффузионное гало, причем подобное гало (в силу их общего топологического происхождения) должно быть достаточно сильно коррелировано с гало темной материи. Основной результат настоящей работы заключается в выводе формул (3) и (5) (см. ниже) для гало, а также в получении численных оценок для параметров газа кротовых нор. При наблюдении галактик данное гало имеет низкую поверхностную яркость и воспринимается как фон, имеющий отличное от собственного излучения галактики происхождение, что и приводит к значительной переоценке параметра $M/\ell \gg 1$ – отношения массы к светимости и соответственно интерпретируется как наличие скрытой массы. В облаках же межгалактического газа, в силу их огромного размера (больше или порядка характеристического размера гало), излучение от гало всегда суммируется с излучением от горячего облака, параметр $M/\ell \sim 1$ и скрытая масса всегда отсутствует [3].

Напомним, что нетривиальная топологическая структура (или топологическое смещение) должна была сформироваться в течение квантового периода эволюции Вселенной, когда топология пространства испытывала флуктуации, а само пространство – время имело пеноподобную структуру [4]. В процессе расширения Вселенная остыла, квантовогравитационные процессы остановились, а топологическая структура пространства закалилась. Не существует убедительных теоретических аргументов, почему такая пеноподобная структура пространства должна распасться на квантовой стадии. Более того, присутствие значительного количества темной энергии (эффективной космологической постоянной) в современной Вселенной, а также и на более ранней инфляционной стадии [5] можно расценивать как дополнительный аргумент в пользу нетривиальности топологической структуры пространства [6]. Действительно, темная энергия нарушает условие энергодоминантности $\varepsilon + 3p > 0$. Кроме спекулятивных теорий (или чисто феноменологических моделей [5]), не существует вещества, которое обладало бы таким свойством. Однако известно, что в присутствии нетривиальной топологии вакуумные поляризационные эффекты вполне естественно приводят к таким формам материи [7]. Другими словами, в настоящее время существует только один строгий способ введения темной энергии – это вакуумные поляризационные эффекты на многообразии нетривиальной топологической структуры. Следует отметить также, что и сама по себе устойчивость кротовых нор требует наличия вещества, нарушающего условие энергодоминантности. В частности, кротовые норы могут поддерживаться поляризацией вакуума, которая в свою очередь порождается самими кротовыми норами (см., например, [8]).

2. Рассмотрим задачу о рассеянии электромагнитного излучения, исходящего от одиночного дискретного источника, на газе кротовых нор. Для простоты мы рассматриваем случай статического газа, то есть в предположении, что кротовые норы не двигаются в пространстве. В этом случае рассеяние не сопровождается сдвигом частоты. При этом результаты легко обобщаются и на случай расширяющейся Вселенной. Отметим, что решение задачи о модификации закона Ньютона в присутствии газа кротовых нор приведено в работе [2]. Оказывается, что и в случае излучения также можно говорить о топологическом смещении источников. Нас будет интересовать поведение смещения на масштабах $\ell \gg a$, где a – характерный размер горловины кротовых нор, и, следовательно, в этом приближении горловина кротовой норы выглядит как точеный объект. Наша цель – найти функцию Грина для волнового уравнения

$$\left(k^2 + \nabla^2\right) G(r, r_0) = 4\pi\delta(r - r_0) \tag{1}$$

в присутствии кротовой норы. Напомним, что такое уравнение описывает распределение излучения на частоте $\omega = kc$ (то есть любую компоненту E, H или векторный потенциал A), производимое единичным стационарным источником $j \sim e^{-i\omega}\delta(r - r_0)$. Действительно, в калибровке Лоренца $\partial_i A^i = 0$ уравнения Максвелла сводятся к виду

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k x_k} A^i = \frac{4\pi}{c} j^i,$$

где j^i – 4-мерный ток. Используя теперь линейность связи тензора напряженностей с векторным потенциалом поля $F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i$, можно убедиться, что как $E_i = F_{0i}$, так и $H_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} F_{jk}$ удовлетворяют приведенному выше уравнению с очевидной заменой $j^i \to J_{ik} = \partial_i j_k - \partial_k j_i$.

Для произвольного источника векторный потенциал (и, соответственно, напряженности поля) выражается через функцию Грина в виде

$$A^k = \frac{1}{c}\int G(r, r_0) j^k(r_0) d^3 r_0.$$

Для плоского пространства функция Грина имеет стандартный вид $G_0(R) = e^{ikR}/R$ (где $R = |r - r_0|$). В силу конформной инвариантности уравнений Максвелла, эту же функцию можно использовать и для целого класса конформно плоских метрик.

Самую простейшую кротовую нору можно построить следующим образом. Рассмотрим две сферы $S_\pm$ радиуса a и расстоянием $d = \left|R_+ - R_-\right|$ между центрами сфер. Внутренности сфер удалены, а поверхности склеены. Сферы $S_\pm$ можно рассматривать как сопряженные зеркала, так что когда сигнал падает на одно из зеркал, то отраженный сигнал исходит от другого (сопряженного ему) зеркала. Таким образом, кротовая нора характеризуется следующими параметрами: a – радиусом горловины, $\mathbf{R}_\pm$ – положением центров горловин в пространстве и, вообще говоря, матрицей поворота U, описывающей процедуру склейки точек на сферах. В используемом ниже приближении зависимость от U выпадает и не будет учитываться.

Точное решение задачи о рассеянии для единичной кротовой норы довольно громоздко и будет приведено нами в другом месте. Для астрофизики же удобно рассмотреть дифракционные эффекты на кротовой норе в приближениях геометрической оптики $ka \gg 1$. Согласно принципу Гюйгенса, рассеяние на кротовой норе можно объяснить наличием вторичных источников на горловине кротовой норы, которые можно учесть дополнительными членами типа

$$G(R) = G_0\left(R\right) + u_R^+ - u_A^+ + u_R^- - u_A^-,$$

где $u_{A,R}^\pm$ описывают поглощение и отражение горловинами $S_\pm$, соответственно. Каждый такой член можно описать поверхностным интегралом типа (см. стандартный учебник [9])

$$u_\alpha^\pm\left(r, r_0\right) = \frac{k}{2\pi i}\int\limits_{S_\pm^\alpha} G_0(r', r_0)\frac{e^{ikR'}}{R'} df_n,$$

где $R' = |r' - r|$, а $S_\pm^{R,A}$ обозначает освещенную и теневую сторону горловины, соответственно. Если пренебречь размерами горловин, то в результате интегрирования можно считать, что площадь горловины равна πa^2. Таким образом, получаем члены, отвечающие за отражение и поглощение сигнала вторичными источниками, расположенными на горловине:

$$u_A^\pm = \frac{k}{2\pi i}\pi a^2 G_0(R_\pm - r_0) G_0(r - R_\pm),$$

$$u_R^\pm = \frac{k}{2\pi i}\pi a^2 G_0(R_\mp - r_0) G_0(r - R_\pm),$$

которые представляют собой сферические волны от двух дополнительных источников в точках $\mathbf{R}_\pm$. Таким образом, рассеяние на кротовых норах действительно может быть описано введением дополнительных источников, то есть смещением точечного источника в (1) вида

$$\delta(r - r_0) \to \delta(r - r_0) + b\left(r, r_0\right), \tag{2}$$

где $b(r, r_0)$ – функция смещения. Действительно, при этом формально функция Грина остается такой же, как и для плоского пространства $G_0(R)$, эффект же рассеяния на топологии описывается тем, что все источники испытывают смещение $J(r) \to \to J(r) + \int b(r, r') J(r') d^3r'$. Для статического газа кротовых нор функция смещения принимает вид

$$b(r, \omega) = \frac{\omega}{2\pi i c} \sum_m \pi a_m^2 \left(\frac{e^{ikR_-^m}}{R_-^m} - \frac{e^{ikR_+^m}}{R_+^m} \right) \times \\ \times \left[\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_+^m) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_-^m) \right], \quad (3)$$

где для простоты мы положили $r_0 = 0$, а индекс m нумерует различные кротовые норы.

Таким образом, наличие газа кротовых нор приводит к появлению специфического излучающего гало (3) вокруг каждого точечного источника. В силу наличия случайных фазовых множителей в (3), данное гало имеет некогерентный (или диффузионный) характер. Переходя от суммы к интегралу и используя плотность распределения кротовых нор $F(R_-, R_+, a)$, данное выражение может быть переписано в виде

$$b(r, \omega) = \frac{\omega}{2ic} n \int \left(\frac{e^{ikR}}{R} - \frac{e^{ikr}}{r} \right) [g(R, r) + g(r, R)] \, d^3R,$$

где $g = \frac{1}{n} \int a^2 F(R_-, R_+, a) \, da$, а n обозначает среднюю плотность кротовых нор в пространстве. В случае однородного распределения кротовых нор функция g зависит только от $d = |R_+ - R_-|$. Тогда значение смещения наиболее просто будет выглядеть в представлении Фурье:

$$b(k, \omega) = \frac{\omega}{ic} n \frac{4\pi (g(k) - g(0))}{k^2 - \frac{1}{c^2}(\omega + io)^2}. \quad (4)$$

где $g(k) = (2\pi)^{-3/2} \int g(r) e^{-ikr} d^3r$ – образ Фурье для функции $g(\mathbf{d})$.

Отметим, что поскольку мы работаем в рамках геометрической оптики, лоренц-инвариантность и стандартные дисперсионные соотношения для фотонов не нарушаются. Однако подобные нарушения будут иметь место на масштабах, где геометрическая оптика перестает работать. А именно, на достаточно больших масштабах, на которых начинают проявляться топологические дефекты (например, скрытая масса начинает проявлять себя при $\lambda = 2\pi/k \gtrsim$ порядка нескольких Крс [1], что гораздо больше любой измеримой длины волны фотона $\lambda \sim c/\omega$).

Возможность нарушения лоренц-инвариантности уже неоднократно обсуждалась в литературе (см., например, [10]). Все существующие оценки совпадают по порядку величины и касаются только чрезвычайно малых масштабов [11, 12]. В частности, в работе [12] было установлено очень жесткое ограничение на "первую" нетривиальную поправку к стандартному дисперсионному соотношению, а именно, если $\omega^2 = k^2(1 + kl_1 + k^2l_2^2 + \ldots)$, то $l_1 < L_{Pl}$, где L_{Pl} – планковская длина. Отметим, что подобная поправка соответствует разложению по малому параметру $kl \ll 1$, где l имеет смысл характерного размера, связанного с кротовыми норами[1)], что приводит к очень сильному ограничению на существование микроскопических кротовых нор (то есть, допускается существование нор лишь на масштабах $l_1 < L_{Pl}$, см. аналогичную оценку также и в [11]).

Однако данное ограничение можно использовать и для оценки существования кротовых нор астрономического масштаба. Действительно, при наличии кротовых нор астрономического масштаба ($L \sim \sim$ нескольких Крс), малым параметром уже является отношение длины волны к характеристическому масштабу кротовой норы, то есть обратный параметр $1/kL$. И в дисперсионных соотношениях первая нетривиальная поправка будет иметь вид $\omega^2 = = k^2 \left(1 + 1/kL_1 + 1/k^2L_2^2 + \ldots\right)$. Тогда, если воспользоваться приведенными выше ограничениями на наличие абсолютного значения поправки к дисперсионному соотношению ($kl_1 < 10^{-27}$), найдем, что в случае астрофизических кротовых нор характеристический, связанный с кротовыми норами, масштаб должен быть $L_1 > (1 \div 5)$ Крс. Это как раз тот самый масштаб, на котором начинают проявляться эффекты скрытой массы и, следовательно, согласно нашей интерпретации эффектов скрытой массы [1], плотность кротовых нор должна достигать значения $nL_1^3 \sim 1$. Отметим также, что на галактических масштабах лоренц-инвариантность нарушается также уже и благодаря релятивистским гравитационным эффектам (то есть, эффектам ОТО). Другими словами, существенно улучшить приведенные выше ограничения на дисперсионные соотношения не представляется возможным.

Как уже отмечалось выше, причина отсутствия нарушения лоренц-инвариантности, в частности, в оптическом диапазоне, очень проста, для коротких длин волн вторичные формирующие гало источники (см. выражение (3)) имеют произвольные случайные фазы и, следовательно, не вносят вклада в амплитуду

1) Напомним, что с кротовыми норами можно связать три параметра длины. Один связан с плотностью нор $n^{-1/3}$, а также имеются средний радиус горловины a и среднее расстояние между горловинами $d = |R_+ - R_-|$.

сигнала. Другими словами, данное гало носит диффузионный характер. В этом случае более корректно будет рассматривать выражение для потока энергии, приходящего в точку r, который для диффузного поля становится аддитивной величиной.

3. Рассмотрим перенормировку интенсивности излучения. В силу диффузного характера тока интенсивность излучения будет определяться квадратом тока:

$$\overline{I(R)I^*(R')} = \left|I(R)\right|^2 \delta(R-R'),$$

где усреднение берется либо за период поля $T = 2\pi/\omega$, либо по случайным фазам. Без учета рассеяния на топологии, то есть, в обычном плоском пространстве, интенсивность излучения $W = (E^2+H^2)/8\pi$ определяется интенсивностью тока $|I|^2$ как $W(r) \sim \int \frac{|I(r)|^2}{|r-r'|^2} d^3r'$ и, в частности, для точечного источника $|I(r)|^2 = |I_0|^2\delta(r-r_0)$ интенсивность потока $W(r) = |G_0(r-r_0)|^2|I_0|^2$. Учет рассеяния на кротовых норах приводит к замене $G_0 \to G$, что эффективно можно описать как появление смещения (2), (3) или дополнительного гало, которое также обладает указанным свойством дельта-коррелированности, что и приводит к перенормировке интенсивности тока $|I_0|^2 \to |\tilde{I}(r)|^2$. Проще исходить из функции Грина, то есть, рассмотрим сумму

$$G(r)G^*(r) = |G(r)|^2 = |G_0(r)|^2 + \sum_{s=A,R;\ p=\pm} |u_s^p|^2,$$

которая дает

$$|G(r)|^2 = \frac{1}{r^2} + \frac{\omega^2}{4\pi^2c^2}\sum_m \pi^2 a_m^4 \left(\frac{1}{\left(R_-^m\right)^2} + \frac{1}{\left(R_+^m\right)^2}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\left|R_-^m - r\right|^2} + \frac{1}{\left|R_+^m - r\right|^2}\right).$$

В этом выражении за счет случайности фаз перекрестные члены можно не учитывать. Данное выражение определяет смещение интенсивности единичного точечного источника в форме

$$|G(r)|^2 = \frac{1}{r^2} + \int \frac{\tilde{b}^2(R)}{|R-r|^2} d^3R,$$

где

$$\tilde{b}^2(R) = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{n}{4}\int \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X^2}\right)\left(\tilde{g}(R,X) + \tilde{g}(X,R)\right) d^3X$$

и $\tilde{g}(R_+,R_-) = \frac{1}{n}\int a^4 F(R_-,R_+,a)\,da$. Для изотропного распределения кротовых нор $\tilde{g} = \tilde{g}(|R_+ - R_-|)$, и мы получим смещение в форме

$$\tilde{b}^2(R) = \frac{k^2}{2} n \int \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{|X+R|^2}\right) \tilde{g}(X)\, d^3X. \qquad (5)$$

Таким образом, связь между интенсивностью реального, $|I_0(r)|^2$, и видимого $|\tilde{I}(r)|^2$ токов (или, что эквивалентно, между реальной, ℓ_0, и наблюдаемой, ℓ, светимостью) определяется распределением кротовых нор в пространстве и задается выражением

$$|\tilde{I}|^2(r) = |I_0|^2(r) + \int \tilde{b}^2(r-r')|I_0|^2(r')d^3r.$$

4. Приведем теперь некоторые оценки. Для оценки перенормировки источника рассмотрим случай, когда все кротовые норы имеют одинаковое значение $d = |\mathbf{R}_- - \mathbf{R}_+| = r_0$. В этом случае, можно взять $\tilde{g}(X) = \frac{\overline{a^4}}{4\pi r_0^2}\delta(X - r_0)$ и для точечного источника получить смещение в форме

$$\tilde{b}^2(R) = \frac{k^2}{2} n\overline{a^4}\frac{1}{R^2}\left(1 + \frac{R}{2r_0}\ln\left|\frac{R+r_0}{R-r_0}\right|\right). \qquad (6)$$

Отметим, что характерная особенность ($\tilde{b}^2 \sim 1/R^2$) в плотности гало отвечает только точечному источнику. Для реальных распределенных источников подобное гало приобретает характер кора $\tilde{b}^2 \sim \tilde{b}^2(l) \sim \mathrm{const}$, где l – линейный размер источника.

Оценку плотности кротовых нор получить достаточно просто – первые кротовые норы должны появляться на масштабах, на которых начинают проявляться эффекты скрытой массы, то есть на масштабах порядка $L_1 \sim (1 \div 5)$ Kpc, что дает в этом промежутке плотность кротовых нор $n \sim (3 \div 0.024) \cdot 10^{-66}\,\text{см}^{-3}$. Характеристический же размер горловины оценивается следующим образом [2, 6]. Как уже отмечалось ранее, для однородного распределения кротовых нор значение $\bar{a}$ определяет количество темной энергии во Вселенной. Действительно, рассмотрим одну кротовую нору в пространстве Минковского. Тогда метрику можно выбрать в форме (см., например, [2])

$$ds^2 = dt^2 - f^2(r)\left(dr^2 + r^2\sin^2\vartheta d\phi^2 + r^2 d\vartheta^2\right),$$

где $f(r) = 1 + \theta(a-r)(a^2/r^2 - 1)$ и $\theta(x)$ – это ступенчатая функция. Можно заменить $f(r)$ и на более гладкую функцию, однако это не будет менять последующих оценок. Обе области, $r > a$ и $r < a$, представляют части обычного пространства Минковского и поэтому в них кривизна отсутствует, $R_i^k \equiv 0$.

Тем не менее, на границе $r = a$ имеется сингулярность, которая определяет скалярную кривизну как $R = -8\pi GT = \frac{2}{a}\delta(r-a)$, где T – это след тензора энергии импульса, который следует добавить в правую часть уравнений Эйнштейна для поддержания и устойчивости данной кротовой норы. Понятно, что такие источники нарушают условие энергодоминантности, а следовательно, воспроизводят форму темной энергии (для них имеем $T = \varepsilon + 3p < 0$). Если плотность таких источников (а соответственно, и плотность кротовых нор) достаточно высока, то это проявляет себя как ускорение масштабного фактора $\sim t^{\alpha}$ для пространства Фридмана с показателем $\alpha = 2\varepsilon/3(\varepsilon + p) > 1$, см., например, [5].

Каждая кротовая нора дает вклад $\int Tr^2 dr \sim \bar{a}$ в темную энергию, в то время как плотность темной энергии будет $\varepsilon_{DE} \sim (8\pi G)^{-1} n\bar{a}$. Поскольку плотность темной энергии имеет порядок $\varepsilon_{DE} \sim 0.75\varepsilon_0$, где ε_0 – критическая плотность, то сразу получим оценку $\bar{a} \sim (1 \div 125)\cdot 10^{-3}\mathrm{R}_{\odot}$, где $\mathrm{R}_{\odot}$ – радиус Солнца. Используя выражение (6), получим оценку для относительной яркости гало:

$$\ell/\ell_0 \sim \frac{k^2}{2} n\overline{a}^4 l \sim 4\frac{l}{R_{\odot}}\left(\frac{k}{k_0}\right)^2 \left[1 \div 2\cdot 10^6\right]\cdot 10^{-14}.$$

Здесь l – линейный размер источника, вокруг которого формируется диффузионное гало, а k_0 – соответствует длине волны $\lambda_{\max}$ при температуре $T_{\odot} = 6\cdot 10^3\,\mathrm{K}$. Очевидно, что относительная яркость гало $\ell/\ell_0 \ll 1$ и достигает значения порядка единицы только для областей размером $\left[0.5\cdot 10^{-6} \div 1\right]\cdot 10^{14}\mathrm{R}_{\odot}$. Отметим также, что при удалении от области излучения яркость гало согласно (6), падает как $\sim 1/R^2$.

Данная работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант # 09-02-00237-а. Мы также выражаем признательность А.А. Старобинскому за ценные замечания.

1. A. A. Kirillov, Phys. Lett. B **632**, 453 (2006); A. A. Kirillov, D. Turaev, MNRAS **371**, L31 (2006); Phys. Lett. B **656**, 1 (2007).
2. A. A. Kirillov, E. P. Savelova, Phys. Lett. B **660**, 93 (2008).
3. D. Clowe et al., Astrophys. J. Lett. **648**, L109 (2006).
4. J. A. Wheeler, (1964) in: *Relativity, Groups, and Topology*, B.S. and C.M. DeWitt (Eds.), Gordan and Breach, New York; S. W. Hawking, Nucl. Phys. B **114** 349 (1978).
5. A. A. Starobinsky, Phys. Lett. B **91**, 100 (1980); A. H. Guth, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981); A. A. Linde, Phys. Lett. B **108**, 389 (1982).
6. A. A. Kirillov and E. P. Savelova, Gravitation and Cosmology **14**, 256 (2008); A. A. Kirillov, E. P. Savelova, and P. S. Zolotarev, Phys. Lett. B **663**, 372 (2008).
7. А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, *Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях*, М.: Энергоатомиздат, 1988.
8. V. Khatsymovsky, Phys. Lett. B **320**, 234 (1994).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, М.: Наука, 1973.
10. T. Jacobson, S. Liberati, and D. Mattingly, Ann. Phys. **321**, 150 (2006); C. Eling, T. Jacobson, and D. Mattingly, arXiv:gr-qc/0410001.
11. F. R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B **578**, 277 (2000); F. R. Klinkhamer and C. Rupp, Phys. Rev. D **70**, 045020 (2004); Phys. Rev. D **72**, 017901 (2005); S. Bernadotte and F. R. Klinkhamer, Phys. Rev. D **75**, 024028 (2007).
12. A. A. Abdo et al., arXiv:0908.1832.