Письма в ЖЭТФ, том 90, вып. 10, с. 753 – 755

Эффект Ааронова-Бома для плазмонов в квантовом кольце конечной ширины

В. М. Ковалев, А. В. Чаплик[1)]

Институт физики полупроводников Сибирского отд. РАН, 630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 21 октября 2009 г.

Найдены частоты магнитоплазменных колебаний 2D электронов в квантовом кольце при учете его конечной ширины. Последнее обстоятельство учтено в рамках модели, допускающей точное решение для одночастичного спектра. Показано, что вместо периодических осцилляций частоты плазмона ω, характерных для 1D кольца, в рассматриваемом случае возникает зависимость ω от магнитного потока с частотной и амплитудной модуляцией: период осцилляций по потоку и их амплитуда зависят от напряженности магнитного поля.

PACS: 73.20.Dx

Эффект Ааронова-Бома (АБ) был первоначально теоретически предсказан, а затем наблюден для заряженных частиц. Сравнительно недавно было показано, что аналогичные осциллирующие зависимости имеют место и для нейтральных возбуждений в твердом теле – экситонов [1 – 3] и плазмонов [4, 5]. Плазмонная задача рассматривалась для нанотрубок, в том числе и для двухстенных [4], причем считалось, что толщина стенок пренебрежимо мала. Поэтому магнитный поток сквозь нанотрубку был вполне определенной величиной, и частота плазмона зависела от него периодически. Применительно к квантовым кольцам аналогичное приближение означает нулевую ширину кольца. Целью настоящего письма является нахождение частоты плазмонов в квантовом кольце с учетом его конечной ширины, то есть с учетом радиальной степени свободы электронов. Конечная ширина кольца означает, что поток магнитного поля сквозь кольцо не фиксирован. Из общих соображений следует, что деструктивная интерференция вкладов различных электронных траекторий в фазу волновой функции должна привести к нарушению строгой периодичности АБ осцилляций. Такое нарушение действительно имеет место, но представляет интерес конкретная реализация этого сценария. Как мы покажем, в кольце конечной ширины возникает специфическая зависимость периода АБ осцилляций от магнитного поля, причем в области малых полей (оценки см. ниже) амплитуда АБ осцилляций медленно возрастает.

Поскольку движение частиц в кольце финитно по всем направлениям, одночастичный спектр дискретен, речь будет идти о коллективных колебаниях типа межподзонных плазмонов. Спектр таких возбуждений в кольце также дискретен, а в достаточно узком кольце (ширина кольца много меньше среднего радиуса) роль продольного импульса плазмона играет его угловой момент ℓ. При падении плоской волны перпендикулярно плоскости кольца возбуждаются, очевидно, только плазмоны с $\ell = \pm 1$ (это аналог правил отбора для дипольных переходов в однородном поле), а если электрическое поле волны модулировано в плоскости кольца, возможно возбуждение высших гармоник с $|\ell| > 1$. Легко видеть из разложения плоской волны по цилиндрическим гармоникам, что интенсивность плазмонного поглощения с моментом ℓ пропорциональна $J_\ell^2(k\rho_0)$, где J_ℓ – бесселева функция, ρ_0 – средний радиус кольца, k – импульс возбуждающего поля в плоскости кольца.

Для расчета плазменных частот мы воспользуемся моделью [6], допускающей аналитическое решение одночастичного уравнения Шрёдингера. Потенциальная энергия электронов в кольце записывается в виде

$$U(\rho) = A/\rho^2 + B\rho^2. \tag{1}$$

Вводя средний радиус кольца ρ_0 (такое значение ρ, при котором потенциальная энергия (1) имеет минимум) и частоту радиальных колебаний малой амплитуды ω_0, перепишем (1) в виде

$$U(\rho) = \frac{m_e\omega_0^2\rho_0^2}{8}\left(\frac{\rho^2}{\rho_0^2} + \frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right), \tag{2}$$

где m_e – эффективная масса электрона. Тогда условие малой ширины кольца, которое нам понадобиться в дальнейшем, записывается в виде

$$\beta \equiv \frac{m_e\omega_0\rho_0^2}{2\hbar} \gg 1 \tag{3}$$

[1)]e-mail: chaplik@isp.nsc.ru

Далее полагаем $\hbar = 1$. Выражение (3) означает, что осцилляторная длина для частоты ω_0 много меньше радиуса окружности, где $U(\rho)$ минимально. Одночастичный спектр и волновые функции даются выражениями

$$\psi(\mathbf{r}) = C_M \rho^M e^{-\rho^2/4\Delta^2} e^{im\varphi} F(-r; M+1; \rho^2/2\Delta^2),$$
$$E_{r,m} = \alpha\omega_0 \left(r + \frac{1+M}{2}\right) + \frac{m\omega_c}{2}, \quad (4)$$
$$M = \sqrt{m^2+\beta^2}, \quad m = 0, \pm1, \pm2, ...$$
$$C_M = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta^{M+1}\sqrt{2^M\Gamma(M+1)}},$$

где r, m – радиальные и азимутальные квантовые числа, $\alpha = \sqrt{1+\omega_c^2/\omega_0^2}$, ω_c – циклотронная частота, $\Delta = 1/\sqrt{\mu\omega_0}$.

Возмущение электронной плотности в рамках теории линейного отклика имеет вид

$$\delta n(\mathbf{r}) = \sum_{ij} \frac{V_{ij}\psi_i^0(\mathbf{r})\psi_j^0(\mathbf{r})(f_i^0 - f_j^0)}{E_i - E_j + \omega} = \sum_{\ell} \delta n_\ell(\rho) e^{i\ell\varphi}, \quad (5)$$

где $\psi_i^0(\mathbf{r})$ – невозмущенные волновые функции одночастичной задачи, $\mathbf{r} = (\rho, \varphi)$, V_{ij} – матричные элементы монохроматического возмущения, $i = (r', m')$, $j = (r, m)$, f^0 – фермиевские числа заполнения. Подставив $\delta n(\mathbf{r})$ в уравнение Пуассона $\triangle\varphi = -4\pi e\delta n(\mathbf{r})\delta(z)$, запишем его формальное решение (при $z = 0$) через функцию точечного источника

$$V^{ind}(\mathbf{r}) = e\int \frac{\delta n(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{\ell} V_\ell^{ind}(\rho) e^{i\ell\varphi}. \quad (6)$$

Здесь $V^{ind}(\mathbf{r})$ – индуцированная возмущением плотности часть электростатического потенциала. Для ℓ-й компонентны имеем

$$V_\ell^{ind}(\rho) = \int_0^\infty G_\ell(\rho,\rho')\delta n_\ell(\rho')\rho' d\rho', \quad (7)$$

где

$$G_\ell(\rho,\rho') = \int_0^\infty J_\ell(k\rho)J_\ell(k\rho')dk =$$
$$= \frac{1}{\pi\sqrt{\rho\rho'}} Q_{\ell-1/2}\left(\frac{\rho^2+\rho'^2}{2\rho\rho'}\right). \quad (8)$$

В (8) $Q_n(x)$ – шаровая функция второго рода. Для замыкания системы находим матричные элементы индуцированного потенциала $V^{ind}(\mathbf{r})$ и приходим к системе уравнений

$$V_{s,n}^{s',n+\ell} = e^2 \sum_{r,r',m} \frac{V_{r,m}^{r',m+\ell}(f_{r,m} - f_{r',m+\ell})F_{r,m;r',m+\ell}^{s,n;s',n+\ell}}{E_{r,m} - E_{r',m+\ell} - \omega}, \quad (9)$$

в которой

$$F_{r,m;r',m+\ell}^{s,n;s',n+\ell} = \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^\infty \rho' d\rho' R_{s,n}(\rho)R_{s',n+\ell}(\rho) \times$$
$$\times G_\ell(\rho,\rho')R_{r,m}(\rho')R_{r',m+\ell}(\rho'). \quad (10)$$

Здесь $R(\rho)$ – радиальные волновые функции в потенциале (2). Условие нетривиальности решения системы (9) дает спектр плазмонов $\omega_{r,\ell}$, где r нумерует радиальные моды.

Воспользуемся теперь условием узости кольца $\beta \gg 1$. Тогда в одночастичном спектре интервалы энергий между уровнями с разными радиальными числами много больше интервалов с различными ℓ. Мы ограничимся в дальнейшем плазмонами нижайшей радиальной подзоны, т.е. положим в системе (9) $r = r' = 0$. В том же приближении величины $G_\ell(\rho,\rho')$ существенны только при ρ, ρ' близких к ρ_0: $|\rho-\rho_0| \sim |\rho'-\rho_0| \lesssim \Delta = 1/\sqrt{\mu\omega_0}$, а радиальные волновые функции для $r = 0$ могут быть аппроксимированы следующим образом:

$$R_{0,m}(\rho) \sim \rho^\beta e^{-\frac{\rho^2}{4\Delta^2}} \sim e^{\beta\ln\rho - \rho^2/\Delta^2} \sim e^{-(\rho-\rho_0)^2/2\Delta^2}. \quad (11)$$

После этого интегралы в (10) легко вычисляются, и форм-факторы $F_{0,m;0,m+\ell}^{0,n;0,n+\ell}$ оказываются зависящими только от ℓ ($F_{0,m;0,m+\ell}^{0,n;0,n+\ell} \equiv F_\ell$):

$$F_\ell = \frac{1}{\pi\rho_0}\left(\ln\frac{2\sqrt{2}\rho_0}{e^{C/2}\Delta} - \psi(\ell+1/2)\right), \quad (12)$$

где $\psi(x)$ – функция Эйлера. Заметим сразу, что при $\ell \gg 1$ выполняется критерий квазиклассичности по азимутальной степени свободы, величина ℓ/ρ_0 переходит в импульс одномерного плазмона k, а поскольку $\psi(\ell \gg 1) \sim \ln\ell$, возникает известная логарифмическая сингулярность закона дисперсии 1D плазмона в длинноволновом пределе $\omega \gg kv_F$. Напомним также, что длинноволновая асимптотика дисперсии 1D плазмона $\omega^2 \sim k^2\ln k$ получается одинаковой как в используемом нами методе RPA, так и в модели латтинжеровской жидкости [7].

После всех сделанных упрощений дисперсионное уравнение принимает вид

$$1 = e^2 F_\ell \sum_m \frac{f(E_m) - f(E_{m+\ell})}{E_m - E_{m+\ell} - \omega}. \quad (13)$$

В том же приближении узкого кольца ($\beta \gg 1$) для уровней энергии получаем:

$$E_m \approx \alpha B\left(m + \frac{\Phi}{\alpha\Phi_0}\right)^2 - B\frac{\Phi^2}{\alpha\Phi_0^2} + \frac{\alpha\omega_0}{2}\left(1+\frac{\beta}{2}\right), \quad (14)$$

тогда $E_{m+\ell} - E_m = \alpha B \ell^2 + 2\alpha B \ell\,(m + \Phi/\alpha\Phi_0)$. Длинноволновому пределу в плазмонном спектре теперь соответствует условие $\omega \gg |E_{m+\ell} - E_m|$. Во втором порядке по этому параметру получаем для частоты ω_ℓ выражение

$$\omega_\ell^2 + e^2 F_\ell \sum_m \left(f(E_m) - f(E_{m+\ell})\right) \times$$
$$\times \left(E_m - E_{m+\ell} + \frac{(E_m - E_{m+\ell})^2}{\omega_\ell}\right) = 0. \qquad (15)$$

В этом выражении величина химического потенциала, входящая в функцию распределения, определяется с помощью равенства

$$\sum_m f(E_m) = N, \qquad (16)$$

где N – полное число электронов в кольце. Для вычисления суммы в (16) применяем формулу суммирования Пуассона. Уравнение для химического потенциала приобретает вид

$$\frac{1}{\pi} \sum_k \frac{\sin(2\pi k\sqrt{(\mu - \mu_0)/\alpha B})}{k} \cos\left(2\pi k \frac{\Phi}{\alpha\Phi_0}\right) = N, \qquad (17)$$

$$\mu_0 = -B\frac{\Phi^2}{\alpha\Phi_0^2} + \frac{\alpha\omega_0}{2}\left(1 + \frac{\beta}{2}\right).$$

Из этого уравнения видно, что при $N \gg 1$ основную роль в левой части уравнения (17) играет член с $k = 0$, который определяет плавную часть химического потенциала $\mu - \mu_0 = \alpha B N^2/4$. Остальные члены дают малые осциллирующие добавки.

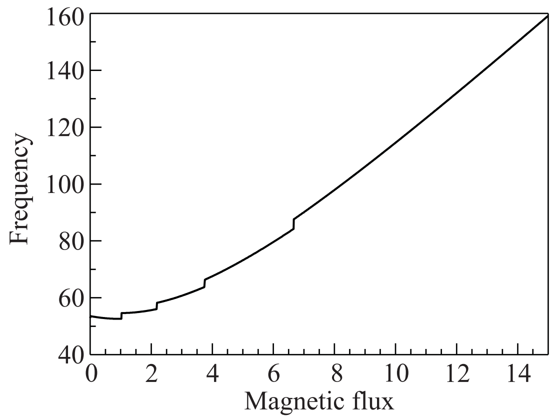
Применяя снова формулу суммирования Пуассона и решая (15) итерациями, получим:

$$\omega_\ell^2 = 2e^2 F_\ell \alpha B N \ell^2 +$$
$$+ \frac{32}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{e^2 F_\ell}{N}}\alpha^{3/2} B^{3/2} \ell^2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(2\pi k \frac{\Phi}{\alpha\Phi_0}\right), \qquad (18)$$

где амплитуды

$$A_k = \frac{\sin(\pi k N) - \pi k N \cos(\pi k N)}{4\pi^2 k^2}. \qquad (19)$$

Первое слагаемое в (18) дает монотонную часть плазмонной дисперсии и соответствует длинноволновой асимптотике $k^2 \ln k$. В осциллирующей части с ростом магнитного поля увеличиваются как период, так и амплитуда, однако рост амплитуды имеет место только в области, соответствующей длинноволновому пределу, тогда как период возрастает во всей области магнитных полей. Это видно на рисунке, где представлен результат численного решения дисперсионного уравнения (13).



Зависимость плазменной частоты для $\ell = 1$ от магнитного потока сквозь срединную окружность кольца. Магнитный поток задан в единицах кванта Φ_0, плазменная частота – в единицах вращательного кванта B. Параметры кольца: $\rho_0 = 10a_B^*$, a_B^* – эффективный боровский радиус, $\Delta = a_B^*$. Число электронов в кольце $N = 50$

Таким образом, в кольце конечной ширины зависимость частоты плазмонов от магнитного поля содержит как монотонную часть, так и АБ осцилляции, период и амплитуда которых также меняются с магнитным полем. Характерная напряженность поля определяется сравнением магнитной длины и ширины кольца.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 08-02-0152), гранта Президента РФ (# МК-299.2008.2) и программ РАН.

1. А. В. Чаплик, Письма в ЖЭТФ **62**, 885 (1995).
2. R. A. Römer, M. E. Raikh, Phys. Rev. B **62**, 7045 (2000); А. В. Чаплик, Письма в ЖЭТФ **75**, 343 (2002).
3. S. E. Ulloa, A. O. Govorov, A. V. Kalameitsev et al., *Proc. 14^{th} Int. Conf. EP2DS*, Prague, 2001, p.1037.
4. А. И. Ведерников, А .О. Говоров, А. В. Чаплик, ЖЭТФ **120**, 979 (2001).
5. E. N. Bogachek, I. A. Romanovsky, and Uzi Lindman, Phys. Rev. B **78**, 174515 (2008).
6. W. C. Tan and J. C. Inkson, Phys. Rev. B **53**, 6947 (1996).
7. H. J. Schultz, *Fermi liquids and Luttinger liqiuds*, in *Field theories for Low-Dimensional systems*, Eds. G. Marandy et al., Springer, 2000.