Письма в ЖЭТФ, том 90, вып. 12, с. 837 – 841 © 2009 г. 25 декабря

Расплывание атомных волновых пакетов и полуклассический хаос

В. Ю. Аргонов[1)]

Лаборатория нелинейных динамических систем,
Тихоокеанский океанологический институт Дальневосточного отд. РАН, 690041 Владивосток, Россия

Поступила в редакцию 13 октября 2009

Показано соответствие между статистическими свойствами эволюции квантовой системы и ляпуновской неустойчивостью, и хаосом её полуклассического аналога. Мы сравниваем результаты анализа движения атома в лазерном поле в полуклассическом приближении (динамика описывается несколькими нелинейными уравнениями) и без него (динамика описывается бесконечной системой линейных уравнений). В тех диапазонах параметров, в которых полуклассическая динамика точечных атомов неустойчива, наблюдается быстрое "расползание" квантованных волновых пакетов в импульсном пространстве. Мы заключаем, что детерминированный хаос "имитирует" статистику квантовых недетерминированных эффектов, несмотря на принципиальные различия полуклассических и квантовых решений.

PACS: 05.45.–a, 37.10.Vz

Квантово-классическое соответствие и квантовый хаос – фундаментальные проблемы квантовой механики и нелинейной динамики. Многие квантовые системы в полуклассическом приближении демонстрируют нелинейные эффекты *хаоса*, *аномальной диффузии*, *фракталов* и т. д. Но квантовые уравнения сами по себе линейны, поэтому в строгом смысле такие эффекты невозможны вне рамок полуклассического приближения. На практике, однако, в природе не найдено математически строгих фракталов и строго детерминированного хаоса: всегда существуют шумы и огрубления на мелких масштабах. Поэтому проблему квантового хаоса мы будем рассматривать в более прагматическом ключе: какие нелинейные эффекты, наблюдаемые при полуклассическом моделировании квантовой системы, приближенно проявляются и в реальной физической системе, а какие – лишь ошибки полуклассического приближения?

Удобной системой для исследования квантового хаоса является атом в лазерном поле. Хаотические полуклассические решения для двухуровневого атома были теоретически обнаружены в 1970-х годах [1]. Сравнению полуклассической динамики точечных атомов и квантовой эволюции волновых пакетов посвящены многие работы 1990-х годов. В [2 – 5] показан эффект *динамической локализации*, связанный с подавлением классического хаоса когерентными квантовыми эффектами. Однако если учесть эффект спонтанного излучения, который нарушает когерентность, то некоторые проявления полуклассической динамики восстанавливаются [6].

В своих предыдущих работах [7, 8] мы также обнаружили детерминированный хаос, фракталы и другие неустойчивые эффекты в полуклассической динамике атомов в лазерном поле. Проявления детерминированного хаоса сохраняются и при наличии эффекта спонтанного излучения [9, 10]. В этих работах спонтанное излучение учитывается методом квантовых траекторий, но механическое движение атома рассматривается полуклассически. В работе [11] проквантовано и механическое движение, там рассматривается динамика уже не отдельных траекторий, а волновых пакетов. В настоящей работе мы продолжаем исследование динамики квантовых волновых пакетов и сравниваем новые результаты с результатами, полученными в работе [8]. Главный результат настоящей работы состоит в обнаружении явного соответствия между хаосом полуклассических траекторий атомов и расплыванием квантованных атомных волновых пакетов.

Мы рассматриваем двухуровневый атом (с частотой межуровневого перехода ω_a и массой m_a), находящийся в мощной стоячей волне лазера (с частотой ω_f). В системе отсчета, вращающейся с лазерной частотой, гамильтониан имеет следующий вид [8]:

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m_a} + \frac{1}{2}\hbar(\omega_a - \omega_f)\hat{\sigma}_z - \hbar\Omega\left(\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+\right)\cos k_f\hat{X}, \tag{1}$$

где $\hat{\sigma}_{\pm,z}$ – операторы переходов между уровнями атома (матрицы Паули), $\hat{X}$ и $\hat{P}$ – операторы координаты и импульса атома, Ω – частота Раби. Для удобства численного анализа запишем волновую функцию атома в импульсном пространстве: $|\Psi(t)\rangle \equiv \equiv \int[A(P,t)|2\rangle + B(P,t)|1\rangle]dP$, где $A(P,t)$ и $B(P,t)$ –

[1)]e-mail: argonov@poi.dvo.ru

комплексные амплитуды вероятности нахождения атома в момент t в состоянии с импульсом P на верхнем $|2\rangle$ и нижнем $|1\rangle$ энергетическом уровне, соответственно. Мы будем считать, что в системе нет потерь энергии (*гамильтоново* приближение), как это делалось в [8]. В реальных экспериментах потери можно подавить или исключить в следующих случаях: 1) атом помещен в высокодобротный резонатор, 2) возбужденные уровни имеют время жизни $T \gg 1/\Omega$, 3) в многократно повторяемом эксперименте мы исключаем из рассмотрения реализации, в которых за время измерений произошел спонтанный переход. Мы исходим из $\Omega \sim 10^{9-10}$ Гц, поэтому гамильтонов режим может быть обеспечен на современном оборудовании. Из гамильтониана (1) получаем бесконечномерную систему уравнений [11], состоящую из пар:

$$\begin{aligned} i\dot{a}_p &= \frac{\omega_r p^2}{2} a_p - \frac{\Delta}{2} a_p - \frac{1}{2}[b_{p-1} + b_{p+1}], \\ i\dot{b}_p &= \frac{\omega_r p^2}{2} b_p + \frac{\Delta}{2} b_p - \frac{1}{2}[a_{p-1} + a_{p+1}]. \end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь $p \equiv P/\hbar k_f$ – перенормированный импульс. Для каждого значения p есть своя пара (2) для своих переменных a_p и b_p – амплитуд вероятности, что атом имеет импульс p и при этом находится в возбужденном или основном состояниях, соответственно. Точка обозначает дифференцирование по перенормированному времени $\tau \equiv \Omega t$. Также использованы обозначения $\omega_r \equiv \hbar k_f^2/m_a\Omega$ и $\Delta \equiv (\omega_f - \omega_a)/\Omega$. Последние члены в уравнениях связывают состояния с перенормированными импульсами, различающимися на единицу. Атом при вынужденном излучении меняет импульс P строго на величину импульса фотона $\hbar k_f$ в направлении оси лазера, что соответствует единичному изменению p. Поэтому для получения замкнутой системы достаточно целочисленных p. Можно рассматривать и дробные p, но для каждого значения нецелой части p будет своя замкнутая система уравнений вида (2). В системе существует закон сохранения энергии, поэтому при поиске решений (2) можно ограничиться конечным числом уравнений, занулив a_p и b_p при больших p.

Получив решения в импульсном представлении, можно найти вероятности нахождения атома в основном и в возбужденном состояниях (с произвольным импульсом)

$$W_{|1\rangle} = \sum_p |b_p|^2, \quad W_{|2\rangle} = \sum_p |a_p|^2$$

и вероятность нахождения атома состоянии с импульсом p (в произвольном электронном состоянии) $W_p = |a_p|^2 + |b_p|^2$. Произведя преобразование Фурье, можно получить и волновую функцию системы в координатном представлении. В отличие от импульса, координата может принимать любые значения.

Уравнения движения (2) описывают динамику квантовых волновых пакетов. В полуклассическом приближении можно ограничиться рассмотрением динамики средних значений физических величин. Ее описывает нелинейная система уравнений [8]:

$$\begin{aligned} &\dot{\langle x\rangle} = \omega_r \langle p\rangle, \quad \dot{\langle p\rangle} = -u \sin\langle x\rangle, \quad \dot{u} = \Delta v, \\ &\dot{v} = -\Delta u + 2z\cos\langle x\rangle, \quad \dot{z} = -2v\cos\langle x\rangle, \end{aligned} \qquad (3)$$

где $\langle x\rangle$ и $\langle p\rangle$ – средние значения перенормированных координаты $x \equiv k_f X$ и импульса p. Блоховские переменные u, v, z определяются как $u \equiv 2\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\,(ab^*)\,dp$, $v \equiv -2\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\,(ab^*)\,dp$, $z \equiv \int_{-\infty}^{\infty}(|a|^2 - |b|^2)dp$. При выводе системы (3) использовано приближение, при котором средние значения произведений физических величин равны произведениям средних значений. Одним из условий справедливости полуклассического подхода является большой атомный импульс в сравнении с импульсом фотона ($p \gg 1$). Наша задача – сравнение результатов анализа приближенных уравнений (3) с результатами анализа уравнений (2) и установление квантово-классического соответствия.

Для численного исследования выберем значения параметров и начальных условий. Мы фиксируем $\omega_r = 10^{-5}$, что по порядку величины соответствует экспериментам с атомами Cs [12, 13] и Rb [14]. Второй параметр, расстройка резонанса Δ, будет варьироваться в широком диапазоне. Начальная координата центра тяжести атома равна $\langle x(0)\rangle = 0$, начальное значение среднего импульса $\langle p(0)\rangle$ будет принимать различные значения, удовлетворяющие $p \gg 1$. Начальный волновой пакет, находящийся в начале координат, имеет простейшую гауссову форму

$$a_p(0) = b_p(0) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma_p(0)\sqrt{2\pi}}} \exp\frac{-(p - \langle p(0)\rangle)^2}{4\sigma_p^2(0)}, \qquad (4)$$

что соответствует значениям блоховских переменных $u(0) = 1$, $v(0) = z(0) = 0$. σ_p – стандартное отклонение импульса атома (по порядку величины равное полуширине пакета). При $\tau = 0$ зафиксируем его значением $\sigma_p(0) = 5/\sqrt{2}$. Поэтому, в соответствии с соотношением Гейзенберга, стандартное отклонение начальной координаты $\sigma_x(0) = 1/2\sigma_p(0) = 0.1\sqrt{2}$ (это значительно меньше длины световой волны, которая в наших обозначениях равна 2π). Дальнейшую динамику волнового пакета (4) (эволюционирующего согласно ур. (2)) можно сравнивать с динамикой облаков точечных полуклассических атомов (эволюционирующих согласно ур. (3)), распределенных в импульсном и координатном пространствах в начальный момент времени по Гауссу с такими же σ_p и σ_x.

И полуклассические облака, и квантовые волновые пакеты со временем расплываются. Разбегание полуклассических траекторий особенно ярко выраженно при наличии динамической неустойчивости. На рис.1a для среднего начального импульса

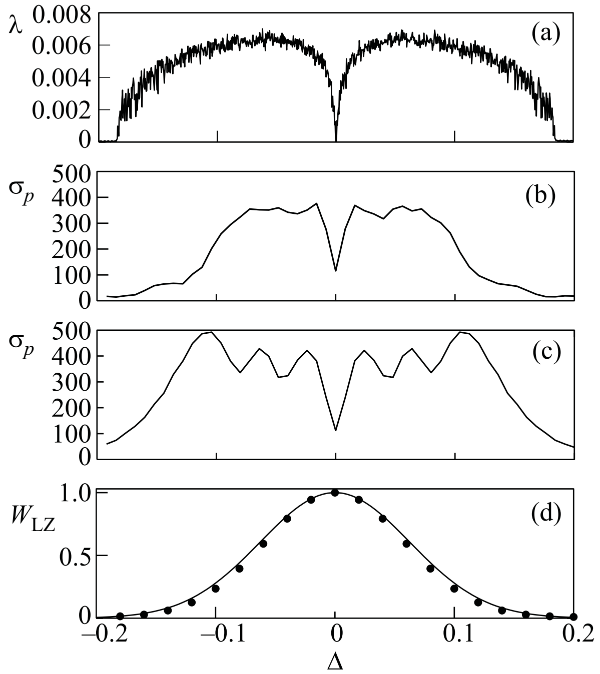

Рис.1. Зависимости классических и квантовых характеристик движения от расстройки атомно-полевого резонанса Δ: (a) максимальный показатель Ляпунова полуклассической системы (3), (b) стандартное отклонение импульса полуклассических атомов в облаке газа при $\tau = 6000$, (c) стандартное отклонение импульса квантованного атома в тот же момент, (d) вероятность туннелирования атома между потенциалами при пересечении узла стоячей волны: точки – численные результаты, линии – аналитические (7). Везде $\langle p(0)\rangle = 600$

$\langle p(0)\rangle = 600$ (соответствует ультрахолодным атомам со скоростями порядка 1 м/с) построен график максимального показателя Ляпунова λ как функции расстройки атомно-полевого резонанса. При $0 < |\Delta| \lesssim 0.2$ решения неустойчивы по Ляпунову ($\lambda > 0$): близкие траектории экспоненциально расходятся со временем, что приводит к быстрому расширению облаков атомов. На рис.1b и c изображены графики зависимости σ_p от расстройки в момент $\tau = 6000$ для полуклассического и квантового случаев, соответственно. Типичные полуклассические и квантовые временные зависимости σ_p показаны на рис.2. Среднеквадратичное отклонение растет для всех зна-

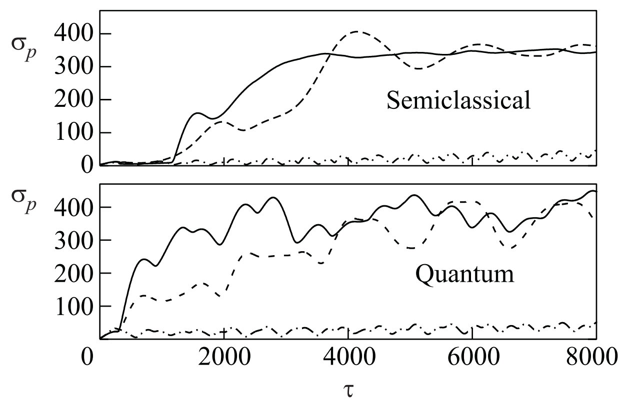

Рис.2. Полуклассические и квантовые зависимости стандартного отклонения импульса атомов от времени: сплошные линии $\Delta = -0.05$ (сильная неустойчивость), штриховые линии $\Delta = -0.02$ (умеренная неустойчивость), штрих-пунктирные линии $\Delta = -0.5$ (устойчивая динамика)

чений расстройки (из закона сохранения энергии, импульс атома не может быть неограниченным, поэтому σ_p со временем достигает насыщения), однако скорость этого роста на порядки выше для тех Δ, которым соответствует $\lambda > 0$.

Главный результат этой работы заключается в наличии корреляции между полуклассическими (рис.1a, b и верхний фрагмент рис.2) *и квантовыми* (рис.1c и нижний фрагмент рис.2) *характеристиками движения*. С полуклассическим показателем Ляпунова коррелирует скорость "расползания" не только полуклассических облаков, но и квантовых волновых пакетов. Но показатель Ляпунова вычислен для полуклассических решений, а для квантовых решений он равен нулю, поэтому *быстрое увеличение ширины волновых пакетов для умеренных расстроек требует дополнительного объяснения*.

Движение атомов может быть описано как движение в некотором потенциальном поле U. Эффективную энергию атома определим как сумму кинетической и потенциальной энергий:

$$H \equiv \frac{\omega_r \langle p\rangle^2}{2} + U. \tag{5}$$

Основные черты движения определяются видом потенциала U. Ниже мы перечислим основные формы потенциалов U и режимы движения атомов, обнаруженные в [8] и [11] для полуклассической и квантовой динамик. Для квантового случая мы дополнительно проиллюстрируем результаты методом фазовых "следов" (рис.3). Темные места ("размазанные" траектории) на фазовой диаграмме соответствуют комбинациям координат и импульсов, которые были у атома с высокой вероятностью хотя бы в один момент времени в течение показанной эволюции (в разных случаях смоделированной до $\tau = 720{-}3000$).

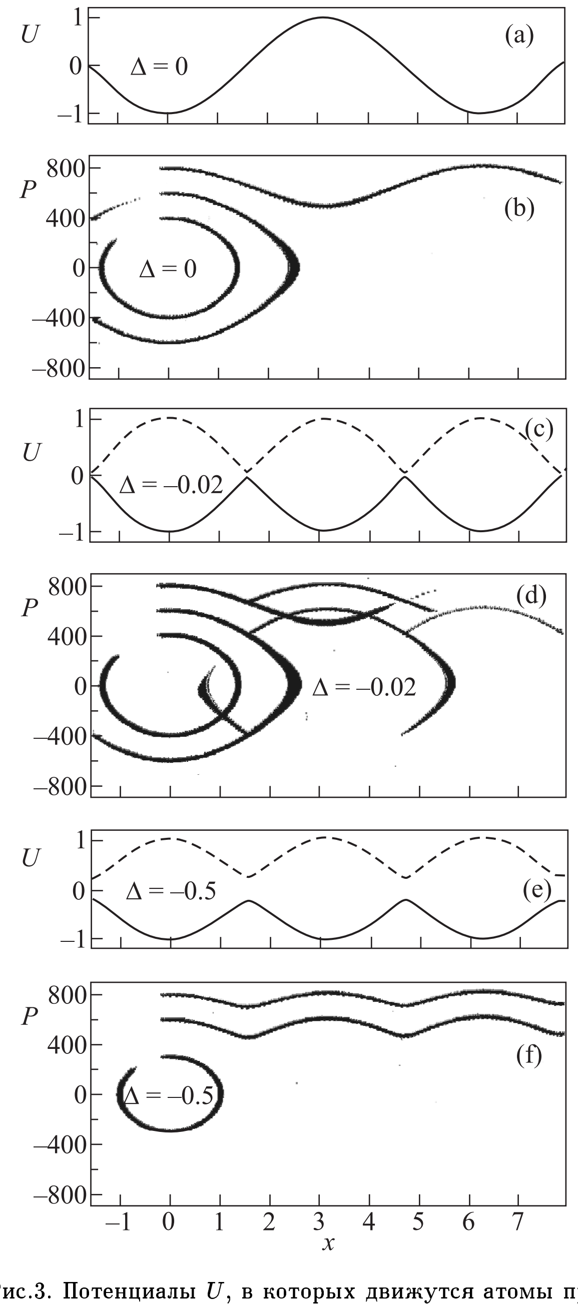

Рис.3. Потенциалы U, в которых движутся атомы при разных расстройках Δ, и соответствующие им "следы" атомных волновых пакетов в фазовом пространстве (x,p) для трех различных значений начального импульса на каждом фрагменте рисунка. Каждый "след" начинается в точках с координатой $x = 0$. При $\Delta \neq 0$ сплошной линией показан потенциал U_-, штриховой – U_+

1. $\Delta = 0$. Как в квантовом, так и в полуклассическом случаях потенциал в течение эволюции единственен и периодичен с периодом 2π. В частности, в квантовой динамике он равен $\mp\cos x$, где знак определяется начальными условиями. В начальный момент времени атом при $u(0) = 1$ попадает на потенциал $-\cos x$ (рис.3a), при $u(0) = -1$ – на $\cos x$. При другом значении $u(0)$ волновой пакет расщепляется на два пакета, которые далее эволюционируют независимо и более не расщепляются. В полуклассической динамике начального расщепления нет, но от $u(0)$ зависит амплитуда потенциала. В остальном же и в полуклассике и в квантовой динамике реализуется единый простой принцип: быстрые атомы движутся сквозь поле с переменным, но знакопостоянным импульсом, медленные колеблются в потенциальной яме (форма потенциала соответствует форме стоячей волны). На рис.3 все атомы выбраны с положительным начальным импульсом, а потенциал имеет отрицательный знак ($u(0) = 1$).

2. $0 < \Delta \ll 1$. В полуклассическом случае потенциал меняется хаотическим образом при каждом пересечении атомом узла стоячей волны ($x = \pi/2, 3\pi/2...$). Если $0 < H < \max[U]$, атом попеременно (по мере изменения глубины потенциала) то захватывается в ямах, то летит сквозь поле: эффект *хаотического блуждания*. Существенно отличается ситуация в квантовом случае. Здесь сосуществует два потенциала строго заданной формы (рис.3c):

$$U_- = -\sqrt{\cos^2 x + \Delta^2/4}, \quad U_+ = \sqrt{\cos^2 x + \Delta^2/4} \quad (6)$$

с периодом π, между которыми возможно туннелирование, приводящее к расщеплению волнового пакета вблизи узлов стоячей волны (рис.3d). При $|u(0)| = 1$ начальный знак потенциала противоположен знаку $u(0)$, а при $|u(0)| \neq 1$ волновой пакет расщепляется в момент $\tau = 0$. Но в дальнейшем волновые пакеты в любом случае расщепляются на узлах. На рис.3d $u(0) = 1$, и волновые пакеты поначалу движутся без расщеплений, повторяя резонансный случай (замедляя свою скорость по мере приближения к узлу). На узле (где $x \simeq 1.57$) они расщепляются на два пакета, один из которых эволюционирует в потенциальном поле U_- ("быстрые" пакеты), а второй в U_+ ("медленные" пакеты). Далее расщепления повторяются.

3. $\Delta \gtrsim 1$. Как в квантовом, так и в полуклассическом случаях потенциал в течение эволюции един-

ственен и периодичен с периодом π. В квантовом случае он имеет форму одного из потенциалов (6). Второй же потенциал тоже теоретически существует, но расстояние между U_- и U_+ слишком велико, так что туннелирования не происходит (рис.3e, f).

Приведенные закономерности наталкивают на мысль, что *именно расщепление пакетов каким-то образом коррелирует с ляпуновской неустойчивостью полуклассических решений.* Чтобы проверить это, оценим вероятность туннелирования Ландау-Зинера при пересечении атомом узла стоячей волны:

$$W_{LZ} \approx \exp \frac{-\Delta^2 \pi}{4\omega_r \langle p_{\rm node} \rangle}, \qquad (7)$$

где $\langle p_{\rm node} \rangle$ – среднее значение импульса при пересечении узла стоячей волны (при $\cos x = 0$). Его можно найти из закона сохранения энергии (5), зная U и начальные условия. На рис.1d вероятность туннелирования, вычисленная по формуле (7), приведена сплошной линией. Чтобы сравнить этот аналитический результат с численным, мы моделируем эволюцию волнового пакета до первого пересечения им узла стоячей волны. Изначальный "быстрый" волновой пакет (как на рис.3) расщепляется в некоторой пропорции на "быстрый" и "медленный" . Эта пропорция и определяет вероятность того, что атом совершил туннелирование Ландау-Зинера. С точки зрения квантовых измерений, W_{LZ} имеет смысл вероятности найти атом после первого пересечения узла в диапазоне импульсов и координат, соответствующих "медленному" волновому пакету. Как показывает рисунок, формула (7) и численные результаты очень близки. Можно показать, что данный результат справедлив и для дальнейших разделений каждого из полученных пакетов при отсутствии интерференции между ними. Учет влияния интерференции является темой нашего дальнейшего исследования. Вблизи и вдали от резонанса (где $\lambda \simeq 0$) расщепление крайне асимметрично и не вносит особого вклада в рост σ_p. Расщепление пакетов точно пополам происходит при $|\Delta| \sim |0.07|$, и это должно вызывать быстрый рост σ_p. Как видно из рис.1a, именно этому значению $|\Delta|$ и соответствует максимальная неустойчивость полуклассической динамики.

Таким образом, *мы установили, что быстрое увеличение σ_p квантованного атома в диапазоне $0 < |\Delta| \lesssim 0.2$ объясняется расщеплением волновых пакетов.* В полуклассическом случае расщеплений нет, но это компенсируется динамическим хаосом. *Корреляции на рис.1 и 2 объясняются тем, что полуклассический хаос пытается "имитировать" статистику расщеплений квантовых пакетов.*

Сформулируем заключение. Полуклассическое моделирование движения атома в поле дает детерминированное описание, в котором нет места случайностям, туннелированиям и расщеплениям. Парадоксальный результат состоит в том, что квантовые эффекты, устраняемые полуклассическим приближением "через дверь", могут возвращаться в решения "через окно" динамической неустойчивости. В регулярных и простых режимах полуклассическая модель легко справляется с описанием движения (решения периодичны). Но если волновые пакеты расщепляются, в полуклассической модели появляется динамический хаос – классическое явление, наиболее близко способное имитировать некоторые свойства сложной квантовой динамики: и классическая неустойчивость, и расщепление пакетов приводят к быстрому росту неопределенности положения частиц Мы обнаружили новое проявление квантовоклассического соответствия, которое может быть полезным для методологии изучения квантовых систем и имеет отношение к эффектам, которые могут быть обнаружены в реальных экспериментах. Данная работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований # 09-02-01258-а и # 09-02-00358-а.

1. П. И. Белобров, Г. М. Заславский, Г. Х. Тартаковский, ЖЭТФ **71**, 1799 (1976).
2. F. L. Moore, J. C. Robinson, C. Bharucha et al, Phys. Rev. Lett. **73**, 2974 (1994).
3. J. C. Robinson, C. Bharucha, F. L. Moore et al, Phys. Rev. Lett. **74**, 3963 (1995).
4. S. Dyrting and G. J. Milburn, Phys. Rev. A **51**, 3136 (1995).
5. R. Graham, M. Schlautmann, and P. Zoller, Phys. Rev. A **45**, R19 (1992).
6. B. G. Klappauf, W. H. Oskay, D. A. Steck et al., Phys. Rev. Lett. **81**, 1203 (1998).
7. V. Yu. Argonov and S. V. Prants, J. Russian Laser Research **27**, 360 (2006).
8. V. Yu. Argonov and S. V. Prants, Phys. Rev. A **75**, 063428 (2007).
9. V. Yu. Argonov and S. V. Prants, JETP Letters **88**, 655 (2008).
10. V. Yu. Argonov and S. V. Prants, Phys. Rev. A **78**, 043413 (2008).
11. С. В. Пранц, ЖЭТФ **136** N11 (2009).
12. H. Ammann, R. Gray, I. Shvarchuck et al., Phys. Rev. Lett. **80**, 4111 (1998).
13. C. J. Hood, T. W. Lynn, A. C. Doherty et al., Science **287**, 1447 (2000).
14. W. K. Hensinger, N. R. Heckenberg, G. J. Milburn et al., J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **5**, R83 (2003).