

Перепутывание А-атомов в режиме когерентного пленения населенностей

Л. В. Ильинев¹⁾

Институт автоматики и электрометрии Сибирского отд. РАН,
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 17 октября 2009 г.

После переработки 12 ноября 2009 г

Рассмотрено явление перепутывания внутренних состояний в ансамблях А-атомов, находящихся в режиме когерентного пленения населенностей. Выведены условия перепутывания в парах и тройках атомов в форме неравенств, связывающих корреляционные функции амплитуд резонансных световых полей. Выполнение этих условий требует неклассичности (отсутствия положительной определенности) в распределении вероятности для амплитуд.

PACS: 03.67.Bg, 42.50.Dv

Термином “перепутывание” (entanglement) обозначают специфические корреляции между подсистемами единой квантовой системы. Специфичность этих корреляций состоит в невозможности описать их в терминах классических стохастических моделей. Перепутывание является важным ресурсом многих квантовых процессов обработки и передачи информации [1, 2].

Актуальной является задача исследования способов создания и обнаружения перепутывания по внутренним состояниям в системах многих атомов. В этой связи представляют интерес атомные системы в режиме когерентного пленения населенностей (КПН, английская аббревиатура СРТ). К обнаружению эффекта, ныне известного как КПН, привело развитие метода пробного поля в нелинейной лазерной спектроскопии трехуровневых систем [3]. Широкий интерес к явлению КПН возник после работы [4]. Среди нынешних применений КПН наиболее важны следующие: в спектроскопии сверхвысокого разрешения (так называемый “темный резонанс”) [5], в нелинейной оптике [6], в создании лазера без инверсии [7], в атомной оптике [8], в лазерном охлаждении атомов ниже энергии отдачи фотона [9]. Перечисленные применения основаны, по-существу, на физике “одного атома”. Многоатомность, несомненно, вносит новые интересные нюансы. Предметом настоящей работы являются условия возникновения перепутывания в ансамблях атомов, находящихся в режиме КПН.

Явление КПН может возникнуть при взаимодействии атома с системой резонансных оптических

полей, вызывающих переходы между одним из основных и некоторым возбужденным уровнем атома. Принципиальным является нетривиальность пространства \mathcal{H}_{gr} основных состояний атома – необходимо, чтобы размерность \mathcal{H}_{gr} превосходила единицу. В этом случае возможна ситуация, когда амплитуда вероятности появления атома в любом возбужденном состоянии, в которое, в принципе, возможен светоиндексированный переход, обращается в нуль вследствие деструктивной интерференции амплитуд переходов с различных подуровней основного состояния. Состояние из \mathcal{H}_{gr} , обеспечивающее данную деструктивную интерференцию, является КПН-состоянием. Находясь в этом состоянии, атом не взаимодействует с излучением и, естественно, не подвержен спонтанному распаду.

Возможные КПН-состояния образуют собственное подпространство $\mathcal{H}^{(CPT)}$ в \mathcal{H}_{gr} . В зависимости от величины угловых моментов J_e и J_g в возбужденном и основном состояниях размерность $\dim \mathcal{H}^{(CPT)}$ пространства КПН-состояний может быть равной 1 или 2. Последнее имеет место для атома с $J_e = J_g - 1$. Величина $\dim \mathcal{H}^{(CPT)}$ представляется принципиальной для создания перепутывания атомов в КПН-состояниях. Действительно, чистое перепутанное внутреннее состояние пары однотипных атомов “1” и “2”, находящихся в КПН-состояниях, есть нефакторизуемый элемент пространства $\mathcal{H}_1^{(CPT)} \otimes \mathcal{H}_2^{(CPT)}$, то есть элемент, не представимый в виде тензорного произведения $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ векторов $|\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1^{(CPT)}$ и $|\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2^{(CPT)}$. В случае $\dim \mathcal{H}^{(CPT)} = 2$, выбрав некоторые базисы $\{|\psi_1\rangle, |\psi_1\rangle^\perp\}$ в $\mathcal{H}_1^{(CPT)}$ и $\{|\psi_2\rangle, |\psi_2\rangle^\perp\}$ в $\mathcal{H}_2^{(CPT)}$, можно построить очевидный

¹⁾ e-mail: leonid@iae.nsk.su

пример перепутанного (нефакторизуемого) состояния $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle + |\psi_1\rangle^\perp \otimes |\psi_2\rangle^\perp$ из $\mathcal{H}_1^{(CPT)} \otimes \mathcal{H}_2^{(CPT)}$. Если $\dim \mathcal{H}^{(CPT)} = 1$, что имеет место, например, в модели Л-атома, все векторы пространства $\mathcal{H}_1^{(CPT)} \otimes \mathcal{H}_2^{(CPT)}$ являются факторизуемыми и перепутывание, на первый взгляд, невозможно. Заметим, однако, что структура $\mathcal{H}^{(CPT)}$ как подпространства в \mathcal{H}_{gr} задается конфигурациями и амплитудами резонансных электромагнитных мод. В стандартном подходе к явлению КПН, как и в приведенных выше простых рассуждениях, амплитуды являются заданными параметрами. Мы покажем, что определенная квантовая стохастичность полевого состояния приводит к перепутыванию Л-атомов в состоянии КПН. На данный феномен обращено внимание в работе [10], где построен частный пример перепутанного КПН-состояния ансамбля Л-атомов. Особенности явления когерентного пленения населенностей в квантованных полях рассматриваются также в [11].

Напомним суть явления КПН в системе из N Л-атомов. Запишем гамильтониан системы в следующем виде:

$$\hat{H}(t) = - \sum_{j=1}^N \left(\varepsilon_+ |+\rangle_j \langle +| + \varepsilon_- |-\rangle_j \langle -| \right) + \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^N \left(\lambda_+(j) \alpha_+ e^{-i\omega_+ t} |0\rangle_j \langle +| + \lambda_-(j) \alpha_- e^{-i\omega_- t} |0\rangle_j \langle -| + h.c. \right).$$

Здесь присутствует суммирование по всем атомам. За начало отсчета энергии в атоме выбран из соображений удобства верхний уровень $|0\rangle$ (см. рисунок), так что энергии подуровней основного состояния есть, соответственно, $-\varepsilon_+$ и $-\varepsilon_-$ (ε_+ и $\varepsilon_- > 0$);

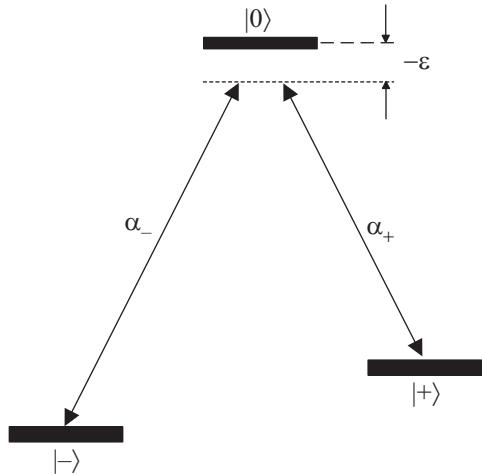


Схема Л-атома в режиме когерентного пленения населенностей

α_+ и α_- – амплитуды двух полевых мод с частотами ω_+ и ω_- . Константы $\lambda_\pm(j)$ включают в себя дипольные моменты переходов и амплитуды стандартных конфигурационных функций мод в точке нахождения атома j . В данном модельном гамильтониане пространственное положение атомов трактуется классически, что предполагает малость ширин волновых функций их центров масс по сравнению со средним межатомным расстоянием. Эти ширины должны быть также малы в масштабе длины волны для возможности вводить локальные константы связи $\lambda_\pm(j)$ атома и поля. При этом средняя скорость атомов предполагается достаточно малой, так что за время пролета масштаба длины волны успевает произойти достаточно много вынужденных и спонтанных переходов, помещающих атом в КПН-состояние, приведенное ниже. Гамильтониан поступательного движения атомов исключен из (1). Не учитывается также прямое межатомное взаимодействие. Перепутывание оказывается обусловленным взаимодействием атомов с общим внешним электромагнитным полем.

От временной зависимости в (1) можно избавиться стандартным преобразованием (частичным переходом к представлению взаимодействия):

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) \rightarrow \hat{H} = \\ = \sum_{j=1}^N \left((\omega_+ - \varepsilon_+) |+\rangle_j \langle +| + (\omega_- - \varepsilon_-) |-\rangle_j \langle -| \right) + \\ + \sum_{j=1}^N \left(\lambda_+(j) \alpha_+ |0\rangle_j \langle +| + \lambda_-(j) \alpha_- |0\rangle_j \langle -| + h.c. \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Если $\omega_+ - \varepsilon_+ = \omega_- - \varepsilon_- \equiv \varepsilon$ (как изображено на рисунке), первая сумма в правой части (2) пропорциональна проектору на пространство основных состояний системы атомов. В этом случае состояние

$$|\Psi^{(CPT)}(\alpha_+, \alpha_-)\rangle = \bigotimes_{j=1}^N \left(\lambda_-(j) \alpha_- |+\rangle_j - \lambda_+(j) \alpha_+ |-\rangle_j \right) \quad (3)$$

оказывается стационарным для гамильтониана (2):

$$\hat{H} |\Psi^{(CPT)}(\alpha_+, \alpha_-)\rangle = \varepsilon |\Psi^{(CPT)}(\alpha_+, \alpha_-)\rangle$$

и является КПН-состоянием системы Л-атомов (ненормированным).

Состояние (3) отвечает определенным значениям амплитуд α_+ и α_- , что предполагает нахождение поля в глауберовском когерентном состоянии $|\alpha_+, \alpha_-\rangle$.

Рассмотрим обобщенное состояние системы атомов и поля:

$$\hat{\varrho}_{1,\dots,N;f} = \int |\Psi^{(CPT)}(\alpha_+, \alpha_-)\rangle\langle\Psi^{(CPT)}(\alpha_+, \alpha_-)| \otimes \otimes|\alpha_+, \alpha_-\rangle\langle\alpha_+, \alpha_-| P(\alpha_+, \alpha_-) d^2\alpha_+ d^2\alpha_-.$$
 (4)

Здесь $P(\alpha_+, \alpha_-)$ – квазивероятностное распределение амплитуд (в общем случае ненормированное) [12].

Статистический оператор $\hat{\varrho}_{1,\dots,N;f}$ будет использован для исследования характера корреляций между атомами. Статистический оператор ансамбля атомов получается из (3) взятием следа по полевым состояниям:

$$\begin{aligned} \hat{\varrho}_{1,\dots,N} &= Tr_f \hat{\varrho}_{1,\dots,N;f} = \\ &= \int |\Psi^{(CPT)}(\alpha_+, \alpha_-)\rangle\langle\Psi^{(CPT)}(\alpha_+, \alpha_-)| P(\alpha_+, \alpha_-) \times \\ &\quad \times d^2\alpha_+ d^2\alpha_-. \end{aligned}$$
 (5)

Заметим, что в случае положительно-определенного распределения $P(\alpha_+, \alpha_-)$ правая часть этого выражения представляет собой сепарабельное (неперепутанное) состояние системы атомов, так как каждое состояние $|\Psi^{(CPT)}(\alpha_+, \alpha_-)\rangle$ является сепарабельным по построению. Поэтому перепутывание между атомами окажется следствием неклассичности P -распределения.

Рассмотрим матрицу плотности $\hat{\varrho}_{1,2}$ пары Л-атомов. Каждый атом, находясь в пространстве состояний $|+\rangle$ и $|-\rangle$, является кубитом. Согласно критерию Переса-Городеки [2, 13], перепутывание пары кубитов эквивалентно неположительности оператора $\hat{\varrho}_{1,2}^{T_2}$, полученного из $\hat{\varrho}_{1,2}$ частичным транспонированием в некотором базисе второго (для определенности) атома. Выберем для этой цели базис $\{|+\rangle, |-\rangle\}$. С целью упрощения дальнейших выражений предположим случайность разности фаз амплитуд α_+ и α_- , что позволит при усреднении полевых переменных рассматривать только интенсивности (об эффекте КПН в некогерентных полях см. [14]). Получаем

$$\begin{aligned} \hat{\varrho}_{1,2}^{T_2} &= |\lambda_-(1)\lambda_-(2)|^2\langle|\alpha_-|^4\rangle|+\rangle\langle+| \otimes |+\rangle\langle+| + \\ &\quad + |\lambda_+(1)\lambda_+(2)|^2\langle|\alpha_+|^4\rangle|-|\langle-| \otimes |-|\langle-| + \\ &\quad + \langle|\alpha_+\alpha_-|^2\rangle \left(|\lambda_-(1)\lambda_+(2)|^2|+\rangle\langle+| \otimes |-|\langle-| + \right. \\ &\quad \left. + |\lambda_+(1)\lambda_-(2)|^2|-|\langle-| \otimes |+\rangle\langle+| + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_-(1)\lambda_+(2)\lambda_+^*(1)\lambda_-^*(2)|+\rangle\langle-| \otimes |+\rangle\langle-| + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_+(1)\lambda_-(2)\lambda_-^*(1)\lambda_+^*(2)|-\rangle\langle+| \otimes |-|\langle+| \right). \end{aligned}$$
 (6)

Здесь $\langle\dots\rangle$ – символ усреднения по распределению $P(\alpha_+, \alpha_-)$ из (5). При условии

$$\langle|\alpha_+\alpha_-|^2\rangle^2 > \langle|\alpha_+|^4\rangle\langle|\alpha_-|^4\rangle$$
 (7)

у оператора $\hat{\varrho}_{1,2}^{T_2}$ появляется отрицательное собственное значение, что свидетельствует о перепутывании внутренних состояний пары Л-атомов. Заметим, что в условие (7) не вошли параметры $\lambda_{\pm}(1, 2)$. В частности (и это не было очевидно a priori), на критерий перепутывания не влияет положение атомов – в том, что касается их взаимодействия с полем, пару атомов можно рассматривать как сосредоточенную систему. С целью упрощения выражений при анализе системы трех атомов мы далее примем это положение и включим параметры λ_{\pm} (единые для всех атомов) в амплитуды полей.

Неравенство (7) невозможно для положительно-определенного распределения $P(\alpha_+, \alpha_-)$. Действительно, в последнем случае, то есть в классике, имеет место очевидное неравенство

$$\langle(x|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2)^2\rangle_{cl} \geq 0,$$
 (8)

верное для всех действительных значений x . Отсюда следует неравенство

$$\langle|\alpha_+\alpha_-|^2\rangle_{cl}^2 \leq \langle|\alpha_+|^4\rangle_{cl}\langle|\alpha_-|^4\rangle_{cl},$$
 (9)

противоположное выражению (7).

Рассмотрим теперь систему из трех атомов. Выявление достаточных условий перепутывания трехчастичного состояния предполагает исследование условия неположительности оператора $\hat{\varrho}_{1,2,3}^{T_3}$. Ясно, что дополнительное рассмотрение $\hat{\varrho}_{1,2,3}^{T_2,3}$ не даст ничего нового. Для оператора $\hat{\varrho}_{1,2,3}^{T_3}$ имеем с учетом упомянутого предположения о сосредоточенном характере системы:

$$\begin{aligned} \hat{\varrho}_{1,2,3}^{T_3} &= \langle|\alpha_+|^6\rangle|-\rangle\langle-| \otimes |-\rangle\langle-| \otimes |-\rangle\langle-| + \\ &\quad + \langle|\alpha_+|^4|\alpha_-|^2\rangle \left[|+\rangle\langle+| \otimes |-\rangle\langle-| \otimes |-\rangle\langle-| + \right. \\ &\quad \left. + |-\rangle\langle-| \otimes |+\rangle\langle+| \otimes |-\rangle\langle-| + |-\rangle\langle-| \otimes |-\rangle\langle-| \otimes |+\rangle\langle+| + \right. \\ &\quad \left. + |-\rangle\langle-| \otimes |-\rangle\langle+| \otimes |-\rangle\langle-| + |-\rangle\langle-| \otimes |+\rangle\langle-| \otimes |-\rangle\langle-| + \right. \\ &\quad \left. + |-\rangle\langle+| \otimes |-\rangle\langle-| \otimes |-\rangle\langle+| + |+\rangle\langle-| \otimes |-\rangle\langle-| \otimes |+\rangle\langle-| \right] + \\ &\quad + \left(\{+\} \leftrightarrow \{-\} \right). \end{aligned}$$
 (10)

Данный оператор приобретает отрицательные собственные значения в случае выполнения по крайней мере одного из следующих двух неравенств:

$$\begin{aligned} \langle |\alpha_+|^2 |\alpha_-|^4 \rangle^2 &> \langle |\alpha_-|^6 \rangle \langle |\alpha_+|^4 |\alpha_-|^2 \rangle, \\ \langle |\alpha_-|^2 |\alpha_+|^4 \rangle^2 &> \langle |\alpha_+|^6 \rangle \langle |\alpha_-|^4 |\alpha_+|^2 \rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

Повторим, что в отличие от неравенства (7), которое представляет собой необходимое и достаточное условие перепутывания пары атомов, неравенства (11) есть только достаточные условия. Они также предполагают нарушение классичности P -распределений полевых амплитуд [15].

Нетрудно привести пример P -распределений, обеспечивающих перепутывание пары и тройки А-атомов в режиме КПН. Предположение о случайной разности фаз реализуется в состояниях без перепутывания между модами. Простейшие состояния такого вида диагональны по числам фотонов в каждой моде. Легко убедиться, что если в качестве $P(\alpha_+, \alpha_-)$ взять глауберовскую P -функцию фоковских состояний

$$\begin{aligned} |n\rangle_+ \langle n| \otimes |n\rangle_- \langle n| = \\ = \int P(\alpha_+, \alpha_-) |\alpha_+, \alpha_-\rangle \langle \alpha_+, \alpha_-| d^2\alpha_+ d^2\alpha_-, \end{aligned} \quad (12)$$

будет обеспечено выполнение неравенства (7) при $n \geq 1$ и неравенств (11) при $n \geq 2$. Состояния (5) с P -функцией (12) сходно с перепутанным состоянием из [10], где, в отличие от настоящей работы, квантованной является только одна из электромагнитных мод.

Таким образом, выявлены условия возникновения перепутывания внутренних состояний в ансамбле А-атомов, находящихся в режиме когерентного пленения населенностей. Мы не рассматривали процедуру приготовления таких состояний. Это есть предмет отдельного исследования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований

(грант # 09-02-00801), Президиума СО РАН и программы Отделения физических наук РАН “Фундаментальная оптическая спектроскопия и ее приложения”.

1. M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Communication*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
2. R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, Rev. Mod. Phys. **81**, 865 (2009).
3. Т. Я. Попова, А. К. Попов, С. Г. Раутиан, Р. И. Соколовский, ЖЭТФ **57**, 850 (1969).
4. G. Alzetta, A. Gozzini, L. Moi, and G. Orriols, Nuovo Cim. **36**, 5 (1976).
5. A. Akulshin, A. Celikov, and V. Velichansky, Opt. Commun. **84**, 139 (1991).
6. J. E. Field, K. H. Hahn, and S. E. Harris, Phys. Rev. Lett. **67**, 3062 (1991).
7. M. O. Scully, Phys. Rep. **129**, 191 (1992).
8. P. Marte, P. Zoller, and J. L. Hall, Phys. Rev. A **44**, 4118 (1991).
9. A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser et al., Phys. Rev. Lett. **61**, 826 (1988).
10. M. D. Lukin, S. F. Yelin, and M. Fleischauer, Phys. Rev. Lett. **84**, 4232 (2000).
11. А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, Письма в ЖЭТФ **79**, 75 (2004).
12. Не следует отождествлять $P(\alpha_+, \alpha_-)$ с P -функцией Глаубера полевого состояния. Последняя получается из произведения $P(\alpha_+, \alpha_-) \langle \Psi^{(CPT)}(\alpha_+, \alpha_-) | \Psi^{(CPT)}(\alpha_+, \alpha_-) \rangle$ после нормировки на единичный интеграл по комплексным амплитудам.
13. A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).
14. A. V. Taichenachev, A. M. Tumaikin, and V. I. Yudin, Laser Physics **4**, 124 (1994).
15. Для положительной P -функции, т.е. в классике, из условия $\langle |\alpha_{\pm}|^2 (x|\alpha_{\mp}|^2 + |\alpha_{\pm}|^2)^2 \rangle_{cl} \geq 0$ для всех действительных значений x следуют неравенства, противоположные (11).