

## Влияние структуры сложной сети на свойства динамических процессов на ней

С. Л. Гинзбург, А. В. Накин, Н. Е. Савицкая

Петербургский институт ядерной физики им. Б.П. Константинова РАН, 188300 Гатчина, Ленинградская обл., Россия

Поступила в редакцию 1 октября 2009 г.

После переработки 19 ноября 2009 г.

Изучено влияние структуры сложной сети на свойства лавинообразного динамического процесса, протекающего на ней. Установлено, что такая структурная характеристика сети, как степень ее ассортативности (дисассортативности), численно выражающаяся коэффициентом ассортативности  $r$ , является управляющим параметром, определяющим свойства динамического процесса на сети.

PACS: 05.65.+b, 89.75.Fb

В последнее десятилетие бурное развитие получила наука о сложных сетях – пространственных системах, представляющих собой совокупность узлов, соединенных связями. Это обусловлено в первую очередь тем, что множество объектов повышенного интереса, такие, как разнообразные связи в социальной сфере, Интернет, комплекс энергоснабжения, совокупность дорожных развязок, торговые, финансовые контакты и многое другое, можно представить именно в виде сети [1]. Так, например, в случае торговой сети узлы – это торговые точки, склады, магазины, а связи – коммуникации между ними.

Условно можно выделить два основных направления исследований сложных сетей. Первое из них связано с изучением их структурных свойств, второе – с исследованием динамических процессов на сетях. Очевидно, что оба эти направления тесно связаны. Однако, несмотря на актуальность проблемы, до сих пор не проводилось комплексного изучения влияния структурных свойств сложных сетей на характер динамики на них.

Целью данной работы является изучение зависимости свойств конкретного динамического процесса от характеристик сети, на которой он развивается.

Как известно, основной структурной характеристикой любой сети является функция распределения числа связей узлов  $P(k)$  [1]. Кроме того, ранее было показано [2], что в сложных сетях возможно наличие корреляций в связях между узлами с различным значением  $k$ . Так, в социальных сетях, например, узлы с большим числом связей (видные социальные деятели) со значительно большей вероятностью связаны между собой, чем с узлами с малым числом связей (рядовые граждане). По характеру корреляций сложные сети делятся на ассортативные, где связи устанавливаются преимущественно между узлами с одина-

ковым числом связей, и дисассортативные, где узлы с большим числом связей (хабы) связаны с узлами с наименьшим числом связей. Численной характеристикой, которая отражает подобные тенденции, является коэффициент ассортативности  $r$  [2]:

$$r = \frac{\sum_k e_{kk} - \sum_k a_k b_k}{1 - \sum_k a_k b_k}. \quad (1)$$

Величина  $e_{lk}$  представляет собой долю связей, соединяющих узлы с числом связей  $l$  и  $k$ ,  $a_l = \sum_k e_{lk}$ ,  $b_k = \sum_l e_{lk}$ .

Из приведенной формулы видно, что величина  $r$  изменяется в пределах  $-1 \leq r \leq 1$ . Так, в случае ассортативной сети, в которой узлы с большим числом связей (хабы) связаны между собой и практически не связаны с узлами с малой величиной  $k$ , этот коэффициент положителен ( $r > 0$ ). В предельном случае полностью ассортативной сети  $r = 1$ , поскольку  $\sum_k e_{kk} = 1$ . Для дисассортативной сети, где характерны связи хабов с узлами с малыми  $k$  и почти отсутствуют связи между хабами, коэффициент ассортативности отрицателен ( $r < 0$ ), так как  $e_{kk} < a_k b_k$ . Для некоррелированной сети коэффициент  $r$  равен нулю, поскольку  $e_{lk} = a_l b_k$ .

Для удобства расчетов мы пользовались следующей модификацией данной формулы [3]:

$$r = \frac{M^{-1} \sum_j l_j k_j - [M^{-1} \sum_j \frac{1}{2} (l_j + k_j)]^2}{M^{-1} \sum_j \frac{1}{2} (l_j^2 + k_j^2) - [M^{-1} \sum_j \frac{1}{2} (l_j + k_j)]^2}. \quad (2)$$

Здесь суммирование ведется по связям в построенной сети,  $M$  – полное число этих связей, а  $l_j$  и  $k_j$  – число связей у узлов, находящихся на концах  $j$ -й связи.

До настоящего времени были предложены лишь искусственные методы построения ассортативных и

дисассортативных сетей, такие, как конструирование сетей “by hands” из готовых модулей с большим и малым числом связей или принудительное “переплетение” связей в сетях [4]. В настоящей работе мы представляем простой и естественный способ построения сетей с различными значениями коэффициента ассортативности.

Процесс построения сети начинался с конструирования начального кластера. Взяв  $m + 1$  узлов, мы соединяли их по принципу “все со всеми”. Такой способ построения начального кластера выбран для того, чтобы все, включенные в кластер узлы, реализовали свои  $m$  связей, и следующий узел присоединялся бы к ним, избегая присоединения двух связей нового узла к одному и тому же узлу начального кластера.

Далее мы строили растущую сеть методом линейного преимущественного присоединения следующим образом. В каждый момент времени  $t$  новый узел, рожденный с  $m$  связями, присоединяется к  $m$  узлам уже существующей сети. Узел  $i$  для присоединения выбирается с вероятностью, задаваемой линейной функцией от количества связей этого узла  $k_i$  и варьируемого коэффициента  $A$ :  $f(k_i, A) = (k_i + A) / \sum_i (k_i + A)$ .

Построенные по таким правилам присоединения сети являются безмасштабными, для них функция распределения числа связей имеет степенной вид  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ , где  $\gamma = 3 + A/m$  [1]. Используя такой способ построения сети, при простом варьировании коэффициента  $A$  ( $-m \leq A < \infty$ ) можно получить сети с различным значением коэффициента ассортативности  $r$ . На рис.1 представлена зависимость коэффициента ассортативности  $r$  от величины  $A$ , построенная для сети размером  $N = 10000$  при  $m = 20$ . Расчеты коэффициента  $r$  проводились, как минимум, для десяти реализаций сети для каждого значения  $A$ , затем результаты усреднялись. Рассмотрев зависимость коэффициента ассортативности от значения параметра  $A$ , мы видим, что при  $A < 0$  сеть будет дисассортативной ( $r < 0$ ), а при  $A > 0$  ассортативной ( $r > 0$ ). Значению  $A = 0$  соответствует  $r = 0$ .

Таким образом, сети, построенные по предлагаемому методу, являются растущими, безмасштабными сетями с различными значениями коэффициента ассортативности  $r$ . Заметим, что такая модель сложной сети наиболее полно отражает свойства естественных, природных и социальных, сетей. Очевидно, что Интернет, к которому ежедневно подключаются новые узлы-пользователи или сеть телефонных контактов, количество абонентов в которой постоянно увеличивается, являются растущими сетями. Безмасштабность же обеспечивает наличие та-

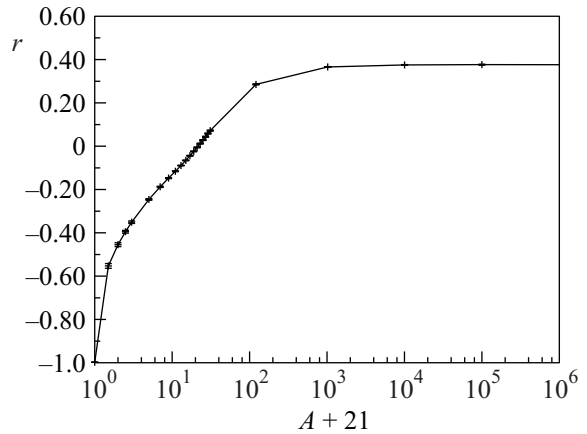


Рис.1. Зависимость коэффициента ассортативности  $r$  от величины  $A$ . Расчеты выполнены для сети размером  $N = 10000$  при  $m = 20$ . Заметим, что значения  $A$  на оси  $x$  приведены со сдвигом на величину  $(m + 1)$

ких топологических свойств естественных сложных сетей, как неоднородность их структуры и наличие хабов (узлов с большим количеством связей) [1].

Далее в настоящей работе мы рассматривали сети с количеством узлов  $N = 10000$  и  $m = 20$ .

Перейдем теперь к изучению динамики на сети. Мы рассмотрим на сети динамическую систему, описываемую моделью Френкеля-Конторовой [5]. Ранее посредством данной модели на решетках описывалось поведение различных физических систем, таких, как решетки джозефсоновских контактов [6, 7] волны зарядовой плотности [8], механические системы, например, совокупность упруго взаимодействующих частиц, находящихся в периодическом потенциале и под действием внешней силы [9]. В рассматриваемой нами системе с каждым узлом сети связана одномерная динамическая переменная  $\varphi_i$ , помещенная в периодический потенциал, на которую воздействует локальная сила  $F_i$ , где  $i$  – номер узла (узлы нумеруются в порядке рождения). Данная переменная может трактоваться и как калибровочно-инвариантная разность фаз в случае джозефсоновской среды, и как фаза волн зарядовой плотности, и как координата “частицы” для механической системы. Для описанной модели потенциальная энергия выражается следующей формулой [9]:

$$U(\varphi_i) = \sum_i [V(1 - \cos \varphi_i) - 2\pi F_i \varphi_i] + \frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} (\varphi_i - \varphi_j)^2. \quad (3)$$

Коэффициенты  $J_{ij}$  определяют взаимодействие между частицами и подчиняются следующим соот-

ношениям:  $J_{ij} = 1$ , если  $i$ -й и  $j$ -й узлы связаны,  $J_{ij} = 0$ , если не связаны. Величины  $F_i$  описывают внешнее воздействие на систему.

Динамика переменной  $\varphi_i$  описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_i}{dt} &= -\frac{1}{\tau} \frac{\partial U(\varphi_i)}{\partial \varphi_i}, \\ V \sin \varphi_i + \tau \frac{d\varphi_i}{dt} &= \sum_j J_{ij}(\varphi_j - \varphi_i) + 2\pi F_i. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $V$  и  $\tau$  – параметры системы, коэффициенты  $J_{ij}$ , как сказано выше, характеризуют наличие или отсутствие взаимодействия между  $i$ -й и  $j$ -й переменными. В нашем случае  $J_{ij} = J_{ji}$ . При этом сумма всех связей, имеющих у узла под номером  $i$ , равна  $k_i$  для этого узла, то есть  $\sum_j J_{ij} = k_i$ . Тогда имеем:

$$V \sin \varphi_i + \tau \frac{d\varphi_i}{dt} = \sum_j J_{ij} \varphi_j - k_i \varphi_i + 2\pi F_i. \quad (5)$$

Как уже сказано выше, величины  $F_i$  описывают внешнее воздействие на систему, что наглядно демонстрирует следующий пример. Если мы рассмотрим случай, когда взаимодействие в системе отсутствует, то уравнение движения для одной переменной  $\varphi_i$ , условно говоря, одной “частицы”, имеет вид

$$\tau \frac{d\varphi_i}{dt} = 2\pi F_i - V \sin \varphi_i. \quad (6)$$

При  $F_i \leq V/2\pi$  уравнение имеет в качестве решения устойчивую точку ( $d\varphi_i/dt = 0$ ), “частица” находится в одной из потенциальных ям. При возрастании величины внешнего воздействия  $F_i$  “частица” начинает “скользить” по потенциалу, и при  $F_i > V/2\pi$  становится возможным переход из одного состояния в другое. Данная картина поведения проиллюстрирована на рис.2.

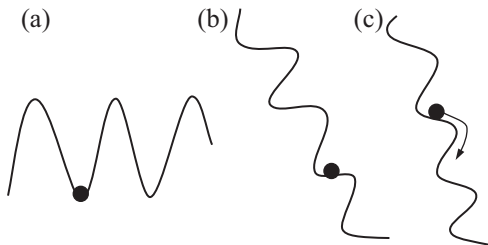


Рис.2. Схематическое изображение динамики одиночной “частицы”, описываемой уравнением (6), для случаев (a)  $F_i \leq V/2\pi$ , (b)  $F_i = V/2\pi$ , (c)  $F_i > V/2\pi$

Таким образом, описанная модель является системой взаимодействующих пороговых элементов. Система обладает закрытыми граничными условиями,

основная динамическая переменная имеет два пороговых значения: положительное и отрицательное. Мы будем рассматривать нашу модель при условии, что суммарное значение основной переменной сохраняется в процессе эволюции системы и равно нулю. Возмущение будет производиться в определенных узлах, находящихся на “границе” сети. Естественно определить границу сети как узлы, в которых  $k = m$ , то есть те узлы, к которым не было произведено присоединение. Именно на этих узлах мы будем изменять величины  $F_i$ , чтобы возбудить в системе динамический процесс. Ниже процесс возмущения будет обсужден более подробно. Заметим, что данная система уже была исследована нами на безмасштабной, растущей, некоррелированной сети ( $r = 0$ ) [10], и было показано, что она демонстрирует нетривиальную, лавинообразную критическую динамику.

Рассмотрим теперь случай, когда параметр  $V \gg 1$ . В этой ситуации в систему можно ввести дискретное время и перейти к рассмотрению более удобной переменной  $z_i = \frac{V}{2\pi} \sin \varphi_i + \frac{\tau}{2\pi} \frac{d\varphi_i}{dt}$ , динамика которой будет описываться не системой дифференциальных уравнений, а системой отображений или алгоритмами [7]. Возникающая в результате перехода к дискретному времени система отображений выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} z_i(n+1) - z_i(n) &= \sum_j J_{ij} \Psi(z_j(n)) - k_i \Psi(z_i(n)), \\ z_i(n+1) - z_i(n) &= \sum_j J_{ij} \Psi(z_j(n)) - \\ &- k_i \Psi(z_i(n)) + [F_i(n+1) - F_i(n)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Первое уравнение данной системы справедливо для внутренних узлов сети, второе – для узлов на границе, где происходит возмущение.

Функция  $\Psi(z)$  имеет вид  $\Psi(z_i(n)) = \theta[z_i - z_c^+] - \theta[-z_i - z_c^-]$ , где  $z_c^+$  и  $(-z_c^-)$  – положительное и отрицательное критические значения для  $z$  ( $z_c^\pm > 0$ ).

Из уравнений (7) видно, что изменение во времени суммарного значения переменной  $z_i$  выражается через сумму изменений внешних воздействий:

$$\sum_i [z_i(n+1) - z_i(n)] = \sum_i [F_i(n+1) - F_i(n)]. \quad (8)$$

Для того чтобы соблюдалось поставленное нами условие сохранения и равенства нулю суммарного значения основной динамической переменной  $z$ , мы выберем для системы следующие начальные условия:  $z_i = F_i = 0$ . Далее разделим границу на “положительную” и “отрицательную” части. Для этого мы выберем случайно  $n_b^+$  “положительных” узлов

границы, остальные  $n_b^-$  узлов будут “отрицательными”. На “отрицательных” узлах величины будут получать отрицательные приращения, на “положительных” – положительные. Количество узлов в положительной и отрицательной частях границ и величина изменения  $F_i$  будут выбираться так, чтобы  $\sum_i [F_i(n+1) - F_i(n)] = 0$ . Тогда мы получим, что суммарное изменение величины  $z$  будет равно нулю.

Рассмотрим теперь процесс моделирования динамики описанной нами закрытой системы на сети. Начиная с состояния, в котором  $z_i = F_i = 0$ , мы возмущаем сеть, добавляя величину  $+\Delta h = 1$  к  $F_i$  в случайно выбранном  $i$ -м узле “положительной” части границы сети и величину  $-\Delta h = -1$  к величине  $F_j$  в случайно выбранном  $j$ -м узле “отрицательной” части границы сети. В результате суммарное возмущение равняется нулю. Далее шаг за шагом мы производим “накачку” переменной  $z$  в сеть.

Как только в одном из узлов сети переменная  $z_i$  выйдет из интервала значений  $-z_c^- < z_i < z_c^+$ , то, согласно отображениям (7), произойдет сброс нескольких единиц с этого узла на соседние узлы  $z_j$ , связанные с ним  $k_i$  связями. Изменение  $z$  в одном из узлов (осыпание) может вызвать осыпание соседних, запуская таким образом лавинообразный процесс. В этом случае мы ожидаем окончания динамического процесса, то есть ситуации, когда для всех  $z$  выполнено неравенство  $-z_c^- < z_i < z_c^+$ , а затем вновь возмущаем систему на границе способом, описанным выше.

По прошествии некоторого переходного периода времени в системе устанавливается критическое состояние. Уникальность этого явления состоит в том, что, несмотря на сложную топологию сети и условие сохранения нулевого суммарного значения динамической переменной, в системе не происходит полной аннигиляции положительных и отрицательных величин, а образуются устойчивые кластеры узлов, в которых величина  $z$  имеет положительное или отрицательное значение [10].

Процесс аннигиляции в системе способствует возникновению и поддержанию критического состояния, которое состоит из набора метастабильных состояний. Во время переходов из одного метастабильного состояния в другое, согласно отображениям (7), значения  $z$  на узлах несколько флуктуируют, но не меняют знака в процессе эволюции системы. Переход между метастабильными состояниями осуществляется посредством лавин, которые обнаруживаются как каскад изменений  $z$  на узлах.

Структура метастабильных состояний, составляющих возникающее критическое состояние, а также

некоторые особенности динамики системы, естественно, зависят от разделения границы сети на “положительную” и “отрицательную” части, а также от соотношения положительного и отрицательного критических значений для основной переменной. Динамика систем с различными соотношением величин  $n_b^-/n_b^+ = z_c^+/z_c^-$  на безмасштабной сети с  $m = 2$  подробно исследована в работе [10]. В настоящей работе мы рассматривали следующее соотношение между этими величинами:  $n_b^-/n_b^+ = z_c^+/z_c^- = 0.2$ .

Мы изучили динамику описанной системы на сетях с различной степенью ассортативности. В качестве характеристики лавины был выбран ее профиль в критическом состоянии, то есть количество точек  $s(n_a)$ , вовлеченных в динамический процесс на каждом временном шаге  $n_a$  в течение лавины:

$$s(n_a) = \frac{1}{N} \sum_i \{\theta[z_i(n_a) - z_c^+] + \theta[-z_i(n_a) - z_c^-]\}, \quad (9)$$

где  $n_a$  – время на протяжении одной лавины.

Мы вычисляли усредненные профили лавин в системах, помещенных на сети, построенные при различных значениях коэффициента  $A$ , а следовательно, и коэффициента ассортативности  $r$  следующим образом.

В течение всего процесса моделирования динамики нашей системы, который длился, пока не насчитывалось  $10^6 - 10^7$  лавин, отбирались лавины с фиксированной длительностью  $L$  временных шагов. Для каждой из них рассчитывалось число узлов, вовлеченных в лавину на каждом шаге  $s(n_a)$ ,  $1 \leq n_a \leq L$  по формуле (9). Затем мы проводили усреднение профиля лавины  $s(n_a)$  по всем лавинам фиксированной длины  $L$  согласно формуле

$$S(n_a) = \frac{1}{N_{ava}} \sum_{a=1}^{N_{ava}} s_a(n_a), \quad (10)$$

где  $s_a(n_a)$  – количество узлов, вовлеченных на шаге  $n_a$  в  $a$ -ю лавину длиной  $L$ , а  $N_{ava}$  – число лавин длиной  $L$ , наблюдавшихся в течение всего времени моделирования.

Результаты расчетов представлены на рис.3, 4.

Из рисунка видно, что в случае сильно дисассортативных сетей ( $r < -0.27$ ) лавина представляла собой процесс с четко выраженной периодичностью и периодом в два временных шага, в то время как в ассортативных сетях ( $r > 0$ ) число точек, затронутых лавиной, плавно нарастало, а затем также плавно спадало к концу лавины. Этот результат объясняется структурными свойствами сетей, на которых развивается лавина. Так как в сильно дисассортативной

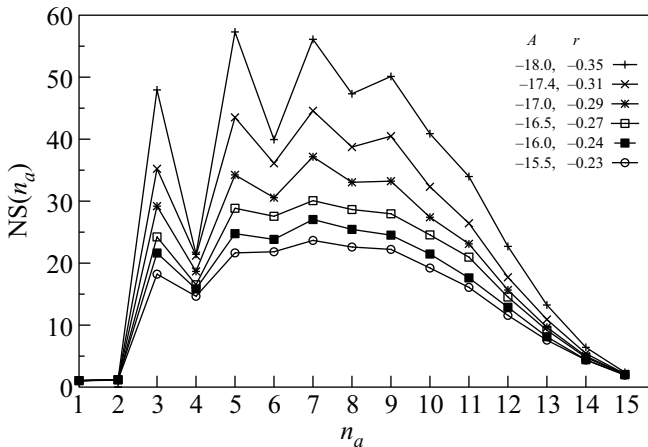


Рис.3. Усредненное количество узлов сети, вовлеченных в лавину длиной  $L = 15$  шагов на сети размером  $N = 10000$  с  $m = 20$  в случае дисассортативных сетей с  $-0.35 \leq r \leq -0.23$  ( $-18 < A < -15$ ). Количество лавин  $N_{ava}$  для каждого значения  $A$ :  $A = -18$ ,  $N_{ava} = 1745$ ;  $A = -17.4$ ,  $N_{ava} = 1899$ ;  $A = -17$ ,  $N_{ava} = 2137$ ;  $A = -16.5$ ,  $N_{ava} = 1817$ ;  $A = -16$ ,  $N_{ava} = 2460$ ,  $A = -15.5$ ,  $N_{ava} = 2320$ ; В профиле лавин видна периодичность вплоть до значения  $r = -0.27$ ,  $A = -16.5$

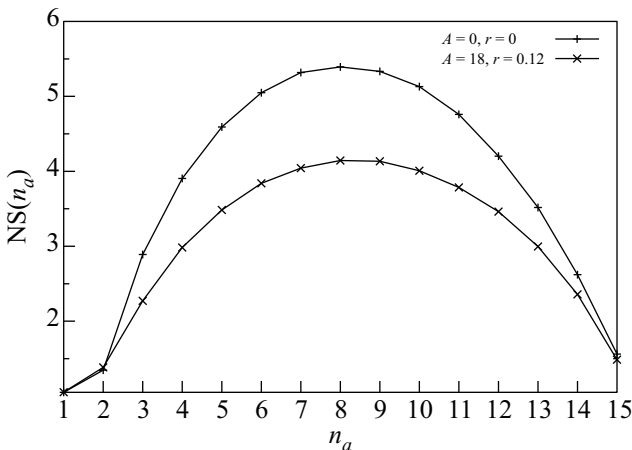


Рис.4. Усредненное количество узлов сети, вовлеченных в лавину длиной  $L = 15$  шагов на ассортативной ( $A = 18$ ) и некоррелированной ( $A = 0$ ) сетях размером  $N = 10000$  с  $m = 20$  в случае. В этих случаях периодичности не наблюдается

сети ее граница (узлы с наименьшим значением  $k$ ) связана в основном с хабами (узлами с большим значением  $k$ ), то после инициации лавины на границе возмущение передается на узел-хаб, с которого поступает на множество узлов с малым  $k$ , после чего вновь возвращается на хаб. В результате число точек, вовлеченных в лавину, будет изменяться периодически, постепенно убывая из-за процесса аннигиляции. В ассортативной же сети точки с различными,

как малыми, так и большими  $k$  одинаково часто вовлекаются в лавину, чем и объясняется ее “гладкий” профиль. По мере прохождения лавины их число сначала плавно нарастает, а затем, благодаря процессу аннигиляции также плавно убывает. В случае слабо дисассортативных сетей с  $r > -0.27$  наблюдается переходный режим от периодического развития лавины к ее “гладкому” профилю.

Таким образом, в настоящей работе на примере лавинообразной динамики изучено влияние структуры сложной сети на свойства динамического процесса, протекающего на ней. В результате установлено, что одной из основных структурных характеристик, определяющей свойства динамического процесса на сети, является степень ее ассортативности (дисассортативности), численно выражающаяся коэффициентом ассортативности  $r$ . Данная величина характеризует степень корреляции в связях между узлами с малым и большим числом связей (хабами). В ассортативных сетях ( $r > 0$ ) хабы преимущественно связаны между собой и практически не связаны с узлами с малым числом связей, в случае же дисассортативной сети ( $r < 0$ ) хабы в основном связаны с узлами с малым числом связей.

Получены следующие интересные результаты.

1. Для построения сетей с различной степенью ассортативности использован простой и естественный метод, в рамках которого растущая сеть строится с помощью линейного преимущественного присоединения, и вероятность присоединения нового узла к уже существующему в сети пропорциональна  $(k + A)$ , где  $k$  – число связей узла в сети и  $A$  – варьируемый коэффициент. Изменяя коэффициент  $A$ , мы получали сети с различными значениями коэффициента ассортативности  $r$ . Зависимость  $r(A)$  изучена подробно и показано, что при  $A < 0$  сеть будет дисассортативной ( $r < 0$ ), а при  $A > 0$  – ассортативной ( $r > 0$ ). Значению  $A = 0$  соответствует  $r = 0$ .

2. На сети различной ассортативности мы помещали динамическую систему, демонстрирующую лавинообразную критическую динамику, и рассматривали структуру лавин, возникающих в данной системе. Показано, что в случае дисассортативной сети лавины характеризуются периодическим поведением, что объясняется тем, что в процессе своего развития на каждом шаге лавина переходит с хабов на узлы с малым числом связей. В случае ассортативной сети такой эффект отсутствует.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы “Квантовая макрофизика”, Государственной программы “Сильно коррелированные электроны в полупроводниках, метал-

лах, сверхпроводниках и магнитных материалах” и Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 08-02-00314-а), Государственной программы “Нейтронная физика”.

1. S. N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes, *Adv. Phys.* **51**, 1079 (2002).
2. M. E. Newman, *Phys. Rev. E* **67**, 026126 (2003).
3. M. E. Newman, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 208701 (2002).
4. R. Xulvi-Brunet and I. M. Sokolov, *Acta Physica Polonica B* **36**, 1431 (2005).

5. О. М. Браун, Ю. С. Кившарь, *Модель Френкеля-Конторовой. Концепции, методы, приложения*, М.: Физматлит, 2008.
6. С. Л. Гинзбург, Н. Е. Савицкая, *Phys. Rev. E* **026128** (2002).
7. С. Л. Гинзбург, *ЖЭТФ* **106**, 607 (1994).
8. J. P. Sethna and C. R. Myers, *Phys. Rev. B* **47**, 11171 (1993).
9. S. N. Coppermith, *Phys. Rev. A* **36**, 3375 (1987).
10. С. Л. Гинзбург, В. А. Накин, Н. Е. Савицкая, *ЖЭТФ* **130**, 5 (2009).