Письма в ЖЭТФ, том 91, вып. 3, с. 115 – 120 © 2010 г. 10 февраля

О дробно-дифференциальной модели переноса космических лучей в галактике

В. В. Учайкин[1)]

Ульяновский госуниверситет, 432970 Ульяновск, Россия

Поступила в редакцию 28 октября 2009 г.

После переработки 13 ноября 2009 г.

Критикуется одна из моделей переноса космических лучей в Галактике, основанная на дифференциальном уравнении в частных производных дробных порядков. Предлагается новая модель, названная моделью ограниченной аномальной диффузии. Главное отличие от критикуемой модели – учет ограниченности скорости движения частиц.

1. В чем проблема. Оживление в последние десятилетия интереса к дробным производным и их применениям в различных областях естественных (и не только естественных) наук (см. [1]) не миновало и физику космических лучей. По-видимому, оператор, лишь символически отличающийся от производной по времени дробного порядка 1/2 в форме Маршо, появляется (правда, "неопознанным") в работе Чувилгина и Птускина [2] (содержимое квадратных скобок в уравнении (2) на с. 194). Эта же производная встречается в уравнениях, выведенных в [3, 4] (см. также обзорную часть недавней работы [5]). Замена в диффузионном уравнении первой производной по времени ее дробным аналогом отражает замедление диффузии в результате попадания галактических космических лучей в магнитные ловушки, замечательно описанные в книге Дормана [6], дающей, посуществу, физические основания теории замедленной диффузии (субдиффузии). Вместе с тем турбулентный (как модно сейчас говорить, фрактальный) характер среды, присущий межзвездному магнитному полю [7], ускоряет диффузию. Описание ускоренной диффузии (супердиффузии) путем замены диффузионного лапласиана его дробной (2/3) степенью было осуществлено Мониным в 1955 г. [8]. В статье Саичева и Заславского [9] и в нашей с Золотаревым книге [10] оба эти режима (супер- и субдиффузии) были соединены в одно уравнение аномальной диффузии и найдено его решение, зависящее (помимо координат и времени) от двух параметров: $\alpha \in (0,2]$ и $\beta \in (0,1]$ – дробных порядков частных производных по координатам и времени. Характерной особенностью этого решения явились тяжелые степенные хвосты (при $\alpha < 2$) и закон расширения диффузионного пакета со временем $t^{\beta/\alpha}$. В [11] мы назвали найденное семейство решений дробно-устойчивыми распределениями и позднее подробно исследовали их.

Сразу после ознакомления с этими работами Лагутин предложил использовать полученные результаты для решения конкретной задачи – описания аномального переноса космических лучей в Галактике. Об этом намерении и было заявлено в наших с ним работах [12 – 14]. Затем Лагутиным с соавторами был опубликован ряд работ, в которых полученные в [9, 10] распределения сопоставлялись с экспериментальными данными путем подбора параметров. В процессе этих исследований численные значения параметров сместились от $\alpha = 1.7$, $\beta = 0.8$ в 2001 г. до $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.8$ в 2004 г. [15, с. 13], при этом отношение β/α возросло от 0.47 до 2.67. Если начальные значения не представлялись абсурдными, то про последние[2)] этого уже не скажешь: расширение облака космических лучей, извергнутого точечным мгновенным источником, в турбулентном магнитном поле с ловушками происходит по закону

$$R_c \propto t^{\beta/\alpha} = t^{2.67},$$

тогда как в отсутствие их оно расширялось бы по линейному закону $R_c = vt$! Более того, скорость $\dot{R}_c \propto t^{1.67}$ удаления диффундирующих частиц от источника возрастает со временем быстрее, чем в случае равноускоренного движения, благополучно преодолевая скорость света и продолжая возрастать далее, в каком бы направлении не распространялся диффузионный фронт. Если, например, какой-то точки достигают космические лучи, движущиеся от двух симметрично расположенных относительно нее точечных источников в противоположных (по отношению друг к другу) направлениях, то и ускоряются

[1)]e-mail: vuchaikin@gmail.com

[2)]В работе 2008 г. [16] использовано более умеренное отношение $\beta/\alpha = 1/0.7 = 1.43$, но это ничего не изменило: оно по-прежнему остается больше единицы.

они в этих противоположных направлениях, проходя, напомню, через одну и ту же точку в пространстве.

Излишне говорить, что нет никаких физических причин подобному поведению космических лучей. Авторы ведь не вводят никакого механизма ускорения частиц и нигде не упоминают об этом эффекте (скорее, дефекте) модели, ставшем предметом настоящей заметки. Но если лишь такой ценой достигается согласие модели с экспериментом, то следует признать, что рассматриваемая модель попросту неприменима. Цель настоящей заметки – внести ясность в существо дела.

2. О дробных производных и фракталах. Особенностью производной дробного порядка является ее отделенность от обычного дифференциала и связанного с ним понятия "приращение". Встречающееся иногда рассуждение, что в силу каких-то причин приращение Δy пропорционально $(\Delta x)^\nu$, не имеет никакого отношения к используемым в данной модели производной Римана-Лиувилля и ее трехмерному риссову обобщению. В действительности, следует говорить здесь о специальной форме приращения – разности дробного (ν-го) порядка

$$\Delta^\nu y = \left(1 - e^{-\Delta x \frac{d}{dx}}\right)^\nu y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \begin{pmatrix} \nu \\ k \end{pmatrix} y(x - k\Delta x),$$

но эта разность не поддается наглядной интерпретации; положение усугубляется еще и нецелым значением ν. Поэтому-то и вывод дробных уравнений начинается обычно с интегральных соотношений, подвергаемых затем преобразованиям Фурье-Лапласа $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{k}$, $t \mapsto \lambda$ и асимптотическим разложениям, в результатах которых произведения $|\mathbf{k}|^\alpha f(\mathbf{k}, \lambda)$, $\alpha \in (0,2]$, и $\lambda^\beta f(\mathbf{k}, \lambda)$, $\beta \in (0,1]$, интерпретируются как фурье-образ дробного лапласиана и трансформанта Лапласа дробной производной Римана-Лиувилля порядков α и β соответственно:

$$|\mathbf{k}|^\alpha f(\mathbf{k}, \cdot) = \int e^{i\mathbf{kr}} (-\triangle)^{\alpha/2} f(\mathbf{r}, \cdot) d\mathbf{r},$$

$$\lambda^\beta f(\cdot, \lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \, {}_0\mathsf{D}_t^\beta f(\cdot, t) dt.$$

Сами же выражения $|\mathbf{k}|^\alpha f(\mathbf{k}, \cdot)$ и $\lambda^\beta f(\cdot, \lambda)$ появляются как асимптотические (при $\mathbf{k} \to 0, \lambda \to 0$), и обратные преобразования, использующие тауберовы теоремы, ведут к степенным (по $\mathbf{r}$ и t) функциям уже в асимптотике больших аргументов. Такие распределения характеризуют, в частности, фрактальные структуры и процессы, основным свойством которых является *самоподобие*. Например, если расположить на вещественной оси последовательность случайных точек так, чтобы расстояния R между соседними точками были одинаково распределены и независимы, и потребовать самоподобия в среднем (то есть равенства $\langle N(x) \rangle = \langle N(1) \rangle x^\nu$, $\nu \in (0,1]$), то уравнение для плотности распределения R будет содержать дробную производную порядка ν. Получаемое при этом распределение случайных точек будет обладать всеми признаками стохастического фрактала, включая перемежаемость. С увеличением ν эти признаки будут ослабевать, и при $\nu = 1$ уравнение станет уравнением первого порядка, экспоненциальное решение которого приведет нас к модели однородного пуассоновского ансамбля, на больших масштабах имеющего вид однородного. Такова связь фрактальных структур с дробными производными.

Поскольку важнейшим свойством космической плазмы является турбулентность, проявляющаяся в самоподобных структурах степенного (фрактального) типа, применение здесь дробно-дифференциального аппарата представляется вполне уместным.

3. Модель ограниченной аномальной диффузии. Вывод дробно-дифференциального уравнения аномальной диффузии

$$\left[{}_0\mathsf{D}_t^\beta + C(-\triangle)^{\alpha/2}\right] \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \delta(\mathbf{r}), \qquad (1)$$

решения которого использованы Лагутиным и др., опирается на схему блужданий, рассмотренную Монтроллом и Вейссом [17] и известную в зарубежной литературе по аббревиатуре CTRW (Continuous Time Random Walk). Блуждание частицы в этой схеме представляется в виде последовательности мгновенных скачков случайной длины в случайные моменты времени, в промежутках между которыми частица покоится. Длины скачков и продолжительности пребывания частицы в покое (в "ловушке") взаимны и между собой независимы.

Чтобы прояснить связь схемы блужданий с реальным процессом переноса космических лучей в галактическом магнитном поле, разобьем пространство на кубические объемы (ячейки), и каждой частице, находящейся внутри i-й ячейки, припишем координату $\mathbf{r}_i$ центра ячейки. Спустя случайное время T после входа в эту ячейку частица перейдет в одну из шести соседних ячеек, и приписанный к ней вектор переместится в момент пересечения разделяющей их грани в центр этой новой ячейки. По истечении случайного времени T' частица перейдет в другую соседнюю ячейку, и снова вектор совершит мгновенный скачок и т.д. Если бы эти ячейки были одинаковы по своим свойствам, блуждание приписанного вектора представляло бы собой просто дискретизованное броуновское движение, с увеличением масштаба превращающееся в обыкновенную диффузию.

Однако сильно турбулизованное магнитное поле высокой напряженности отнюдь не является непременным свойством каждой ячейки. По современным представлениям, сложившимся, впрочем, еще полвека назад, большая часть космического пространства между магнитными облаками заполнена более слабыми и спокойными полями, плавные силовые линии которых могут сохранять индивидуальность на большом протяжении. Вдоль них-то по винтовым траекториям и движутся заряженные частицы космических лучей, попадая время от времени в облака-ловушки, где они могут надолго задерживаться, забывая свое начальное направление. Теперь переход из одной ловушки в другую не мгновенен, как это было при пересечении грани между соседними ловушками, теперь частица пересекает "почти пустые" ячейки, проходя большие расстояния R. При фрактальном характере среды распределение R характеризуется длинным хвостом степенного вида. Эти-то переходы и требуют учета конечной скорости движения частицы, точнее, ведущего центра частицы.

4. О большом и малом. Стоит, однако, пояснить, что такое большие времена и длинные переходы. В физическом контексте слово "большие" воспринимается как указание на то, что числовые значения этих величин превосходят значения, считающиеся "нормальными", характерными для рассматриваемой системы. Я же имею в виду здесь скорее математический, точнее, теоретико-вероятностный аспект: дисперсия или даже математическое ожидание "большой" случайной величины не существуют. Что эти слова означают? Один мой не самый начитанный аспирант полагал, что их "нет" в том смысле, что они просто равны нулю, хотя в действительности, наоборот, речь идет о бесконечности или разности бесконечностей. В студенчестве, однако, я и сам был немало озадачен процедурой "вычитания бесконечностей" в методе перенормировок, и позднее с восторгом встретил фразу выдающегося теоретика: "Господа, но если какая-то величина обращается в бесконечность, то это же еще не основание для того, чтобы ею можно было пренебречь!"

Когда математик говорит, что n-й момент случайной величины X, заданной плотностью распределения $f(x)$, не существует, он имеет в виду, что не существует несобственный интеграл

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$$

как двойной предел последовательности собственных интегралов

$$m_n = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to \infty}} \int_A^B x^n f(x) dx,$$

не зависящий от порядка его вычисления. Пример – плотность распределения Коши

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \ -\infty < x < \infty.$$

Устремив вначале $B \to \infty$, а потом $A \to -\infty$, получим $m_1^+ = +\infty$, действуя в обратном порядке, получаем $m_1^- = -\infty$, стало быть, математическое ожидание не существует. Не существует в этом смысле и второй момент. Отсюда, однако, не следует делать вывода о том, что какие-то физические величины становятся бесконечными (на этом основании часто отвергают распределения с бесконечными моментами). Поскольку

$$\lim_{A\to\infty} \int_A^{\infty} f(x) dx = 0,$$

при последовательном измерении физической величины X мы всегда будем получать конечные значения $X_1, X_2, \ldots$ Конечными также окажутся и среднее арифметическое и выборочная дисперсия. Дело только в том, что условия закона больших чисел (существование математического ожидания) и центральной предельной теоремы (конечность дисперсии) не выполняются, и поэтому полученные по обычным формулам числа уже не являются устойчивыми характеристиками исследуемой величины, и нужно использовать другие параметры. Их можно найти в рамках применимости обобщенной предельной теоремы, описывающей поведение суммы независимых случайных величин даже тогда, когда не существует дисперсии и даже математического ожидания. Предельное распределение (аналог гауссова) может существовать и в этом случае. Для этого, правда, необходимо условие: распределения случайных слагаемых должны иметь степенные хвосты. Более того, только при этом условии и существуют предельные (при числе слагаемых $n \to \infty$) распределения. Они называются устойчивыми (в смысле Леви) распределениями. Распределение Коши принадлежит к их числу. Степенные хвосты указывают на их связь с дробными производными, и такая связь действительно существует (см. [1] и ссылки там). Если времена ожидания имеют бесконечное среднее, а пробеги – бесконечную дисперсию, но обе эти величины характеризуются асимптотически степенными распределениями с показателями β и α, вместо операторов $\partial/\partial t$ и $\triangle$ в диффузионном уравнении появляются их дробные аналоги ${}_0\mathsf{D}_t^\beta$ и $\triangle^{\alpha/2}$. Переход к этим операторам и означает в контексте нашей статьи "большие" времена и пробеги.

5. Модель ограниченной аномальной диффузии. Важнейшим следствием введения учета конечной скорости свободного движения частиц является ограниченность пространственного распределения: теперь за пределами шара радиуса vt с центром в точечном мгновенном источнике плотность вероятности равна нулю. Назовем этот процесс *ограниченной аномальной диффузией* (ОАД), чтобы отличать его от процесса неограниченной аномальной диффузии (НАД), в котором движение частицы представляется как последовательность мгновенных скачков из одной точки пространства в другую: на сколько бы парсеков или световых лет та точка ни отстояла от этой, частица прибывает в нее в тот же момент времени, когда она покидает предыдущую. Время задержки (пребывания в ловушке) никак не связано ни с этим расстоянием, ни с движением вообще. Если из этой модели убрать ловушки (то есть положить плотность распределения T $q(t) = \delta(t)$), она вообще лишается всякого смысла: частица мгновенно улетает на бесконечность, исчезая из рассматриваемой системы. Модель же ОАД наряду со временем, проведенным в ловушке, учитывает и время, затраченное на движение частицы и по этой причине сохраняет смысл даже в отсутствие ловушек. Наконец, тот факт, что пропагатор ОАД обращается в нуль за пределами сферы радиуса vt, обеспечивает конечность всех его моментов.

Учет влияния конечной скорости свободного движения на описанный выше процесс блуждания, выполненный в наших работах [18 – 22], существенно изменил модель CTRW. Теперь в момент наблюдения частица может находиться в одном из двух состояний – состоянии покоя или состоянии движения. Соответствующие компоненты плотности вероятности обозначим через $\psi_0(\mathbf{r},t)$ и $\psi_1(\mathbf{r},t)$, так что суммарная плотность

$$\psi(\mathbf{r},t) = \psi_0(\mathbf{r},t) + \psi_1(\mathbf{r},t).$$

Обозначим далее скорости переходов $1 \to 0$ и $0 \to 1$ в единице объема окрестности точки $\mathbf{r}$ через $F_{1\to 0}(\mathbf{r},t)$ и $F_{0\to 1}(\mathbf{r},t)$, соответственно. Очевидно, что частица, перешедшая в состояние покоя в точке $\mathbf{r}$ в момент времени $t - t'$, останется там к моменту наблюдения t с вероятностью $Q(t') = \int_{t'}^\infty q(\tau)d\tau$, а частица, покинувшая ловушку в точке $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, пересечет без взаимодействий единичную площадку в точке $\mathbf{r}$ с вероятностью $P(\mathbf{r}') = \int_0^\infty p(\mathbf{r}' + \xi\Omega)d\xi$, $\Omega = \mathbf{r}'/r'$. Учитывая, что на этот переход ей придется потратить r'/v с, получим:

$$\psi(\mathbf{r},t) = \int_0^\infty dt' Q(t') F_{1\to 0}(\mathbf{r}, t-t') +$$

$$+v^{-1}\int d\mathbf{r}' P(\mathbf{r}') F_{0\to 1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t - r'/v), \qquad (2)$$

Множитель v^{-1} перед интегралом возникает потому, что сам интеграл дает поток частиц, тогда как ψ_1 – их концентрация. Скорости переходов (при условии, что частица начинает свою историю с попадания в ловушку в начале координат в начальный момент времени) связаны соотношениями

$$F_{1\to 0}(\mathbf{r},t) = \int d\mathbf{r}' p(\mathbf{r}') F_{0\to 1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t - r'/v) + \delta(\mathbf{r})\delta(t), \qquad (3)$$

$$F_{0\to 1}(\mathbf{r},t) = \int_0^\infty d\tau q(\tau) F_{1\to 0}(\mathbf{r}, t-\tau), \qquad (4)$$

комментарии к которым представляются излишними. Преобразованием Фурье-Лапласа

$$\psi(\mathbf{r},t) \mapsto \psi(\mathbf{k},\lambda) = \int d\mathbf{r} \int_0^\infty dt\, e^{i\mathbf{kr} - \lambda t}\psi(\mathbf{r},t)$$

система уравнений (2)–(4) приводится к виду

$$L_v(\lambda,\mathbf{k})\psi(\mathbf{k},\lambda) \equiv [1 - p(\mathbf{k},\lambda/v)q(\lambda)]\psi(\mathbf{k},\lambda) = S_v(\lambda,\mathbf{k}),$$

где

$$S_v(\lambda,\mathbf{k}) = Q(\lambda) + (1/v)P(\mathbf{k},\lambda/v)q(\lambda)$$

и

$$p(\mathbf{k},\lambda/v) = \int p(\mathbf{r}) e^{-(\lambda/v)r} e^{i\mathbf{kr}} d\mathbf{r}.$$

Аналогично определяется $P(\mathbf{k},\lambda/v)$. Если хвосты распределений R и T имеют степенной характер с показателями $\alpha \in (0,2)$ и $\beta \in (0,1]$, соответственно,

$$\mathsf{P}(R > r) \sim \frac{A}{\Gamma(1-\alpha)} r^{-\alpha}, \ r \to \infty,$$

$$\mathsf{P}(T > t) = Q(t) \sim \frac{B}{\Gamma(1-\beta)} t^{-\beta}, \ t \to \infty,$$

то с помощью тауберовых теорем можно показать, что при $\mathbf{k} \to 0,\ \lambda \to 0$

$$L_v(\lambda,\mathbf{k}) \sim B\lambda^\beta +$$

$$+\begin{cases} \langle R\rangle\langle\lambda/v - i\mathbf{k}\Omega\rangle + A\langle(\lambda/v - i\mathbf{k}\Omega)^\alpha\rangle, & \alpha > 1, \\ A\langle(\lambda/v - i\mathbf{k}\Omega)^\alpha\rangle, & \alpha < 1, \end{cases}$$

где Ω – случайное направление движения, предполагаемое ниже изотропно распределенным. Сопоставляя поведение различных слагаемых при $\lambda \to 0$, приходим к следующим выводам.

При $v = \infty$ в обоих случаях имеем одно и то же асимптотическое выражение

$$L_\infty(\lambda, \mathbf{k}) \sim B[\lambda^\beta + C_\infty|\mathbf{k}|^\alpha],$$

$$C_\infty = A|\cos(\alpha\pi/2)|/[(\alpha+1)B],$$

приводящее к дробно-дифференциальному уравнению НАД (1). При $v < \infty$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$ (ввиду упомянутой изотропии $\langle\Omega\rangle = 0$) оператор переноса примет вид

$$L_v(\lambda, \mathbf{k}) \sim B\lambda^\beta + \langle R\rangle\langle\lambda/v - i\mathbf{k}\Omega\rangle + A\langle(\lambda/v - i\mathbf{k}\Omega)^2\rangle =$$

$$= (A/v^2)\lambda^2 + (B + \langle R\rangle/v)\lambda - (A/3)k^2,$$

соответствующий телеграфному уравнению

$$(A/v^2)\frac{\partial^2\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} + (B + \langle R\rangle/v)\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} -$$

$$-(A/3)\triangle\psi(\mathbf{r},t) = S_v(\mathbf{r},t),$$

описывающему ограниченную нормальную диффузию. В тех же условиях при $\beta < 1$ получаем дробный вариант *субдиффузионного* телеграфного уравнения

$$(A/v^2)\frac{\partial^2\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} + (\langle R\rangle/v)\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} +$$

$$+B\ {}_0\mathsf{D}_t^\beta\psi(\mathbf{r},t) - (A/3)\triangle\psi(\mathbf{r},t) = S_v(\mathbf{r},t).$$

В обоих случаях "глубокая" временная асимптотика $\psi(\mathbf{r},t)$ теряет зависимость формы от скорости и приводит к уравнениям неограниченной диффузии и субдиффузии, соответственно. То же наблюдается и в случае $\alpha < 1$, когда $\beta < \alpha$. Если же $\alpha < \beta \le 1$ (а именно такую комбинацию параметров используют Лагутин и Тюменцев), асимптотическое уравнение для $\psi(\mathbf{r},t)$ принимает необычный для диффузионного процесса вид с псевдодифференциальным оператором – усредненной по направлениям Ω материальной производной дробного порядка $(\mathsf{D}_t + v\Omega\nabla)^\alpha$:

$$(A/v^\alpha)\langle(\mathsf{D}_t + v\Omega\nabla)^\alpha\rangle\psi(\mathbf{r},t) = S_v(\mathbf{r},t).$$

Зависимость от скорости теперь остается при любых временах, но исчезает зависимость от β. Соответствующее этому случаю распределение $\psi(\mathbf{r},t)$ имеет специфический U-образный вид в ограниченной радиусом vt области, за пределами которой оно равно нулю [22, 23].

6. Заключение. Напомню, в заключение, что одна из первых наших статей по аномальной диффузии заканчивается фразой: "Последнее может служить основанием для вывода о неприменимости супердиффузионного уравнения к описанию реальных физических процессов в области характеристического показателя $\alpha < 1$" [22, с. 1424]. Осторожное слово "может" употреблено здесь отнюдь не всуе: если рассматривается блуждание частицы в пространстве, скажем, скоростей или импульсов, мгновенный перескок частицы на большие "расстояния" вполне допустим и даже обоснован в рамках общепринятой модели мгновенных столкновений. Использование же модели с бесконечной скоростью частиц без учета каких-либо граничных условий для описания блуждания частиц в *координатном пространстве* при $\alpha \le \beta$ ставит под сомнение как полученные результаты, так и сделанные на их основе выводы (в частности, вывод о том, что "самосогласованное описание экспериментальных данных по спектрам отдельных групп ядер и спектру всех частиц не достигается" [24, с. 601]).

Надеюсь, учет конечной скорости распространения космических лучей, скажем, в рамках предлагаемой здесь модели ОАД, окажется более плодотворным. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 07-01-00517).

---

1. В. В. Учайкин, *Метод дробных производных*, Ульяновск, изд-во "Артишок", 2008.
2. L. G. Chuvilgin and V. S. Ptuskin, In: *Proc. 22nd Int. Cosmic Ray Conf.*, Vol. **2**, Dublin, 1991, p. 193.
3. B. R. Ragot and J. G. Kirk, Astron. Astrophys. **327**, 432 (1997).
4. R. Balescu, Phys. Rev. E **51**, 4807 (1995).
5. G. M. Webb, G. P. Zank, E. Kh. Kaghashvili et al., Astrophys. J. **651**, 211 (2006).
6. Л. И. Дорман, *Экспериментальные и теоретические основы астрофизики космических лучей*, М.: Наука, 1975.
7. А. В. Кулаков, А. А. Румянцев, ДАН **336**, 183 (1994).
8. А. С. Монин, ДАН СССР **105**, 256 (1955).
9. A. I. Saichev and G. M. Zaslavsky, Chaos **7**, 753 (1997).
10. V. V. Uchaikin and V. M. Zolotarev, *Chance and Stability. Stable Distributions and their Applications*, Utrecht, the Netherlands, VSP, 1999.
11. V. Kolokoltsov, V. Korolev, and V. Uchaikin, *Fractional Stable Distributions*, Res. Report No 23/00, The Nottingham Trent University, UK, 2000.

12. А. А. Лагутин, Ю. А. Никулин, В. В. Учайкин, Препринт АГУ-2000/4, Barnaul, 2000.
13. V. V. Lagutin and V. V. Uchaikin, In: *Proc. 27th Int. Cosmic Ray Conf.*, Hamburg, Vol.**5**, 2001, p.1896.
14. A. A. Lagutin and V. V. Uchaikin, Nucl. Instr. Meth. B **201**, 212 (2003).
15. А. А. Лагутин, А. Г. Тюменцев, Известия Алтайского государственного университета № 5, 4 (2004).
16. V. V. Bugayov, A. A. Lagutin, A. G. Tyumentsev et al., In: *Proc. 30th Int. Cosmic Ray Conf.*, Mexico, Vol.**2** (OG part 1), 2008, p.179.
17. E. W. Montroll and G. H. Weiss, J. Math. Phys. **6**, 167 (1965).
18. V. V. Uchaikin, J. Math. Sciences **92**, 4085 (1998).
19. V. V. Uchaikin, Physica A **255**, 65 (1998).
20. В. В. Учайкин, Теоретическая и математическая физика **115**, 154 (1998).
21. В. В. Учайкин, Ж. технической физики **68**, 138 (1998).
22. В. М. Золотарев, В. В. Учайкин, В. В. Саенко, ЖЭТФ **115**, 1411 (1999).
23. В. В. Учайкин, И. В. Яровикова, ЖВМ и МФ **43**, 1536 (2003).
24. А. А. Лагутин, А. Г. Тюменцев, Н. В. Волков, Известия РАН, сер.физ. **73**, 599 (2009).