Письма в ЖЭТФ, том 51, вып. 8, стр. 422 – 425 25 апреля 1990 г.

СПЕКТР ФЕРМИОНОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ НА РЕШЕТКЕ С УЧЕТОМ ДИАГОНАЛЬНЫХ ПЕРЕСКОКОВ

А.А.Белов, Ю.Е.Лозовик, В.А.Мандельштам

Рассмотрено обобщение гамильтониана для фермионов в магнитном поле на квадратной решетке вида $H_0 + \lambda H_1$, где H_0 – гамильтониан, описывающий перескоки на соседние узлы, а H_1 – гамильтониан диагональных перескоков. Найдена плотность состояний, отмечается нетривиальная перестройка зонной структуры при изменении параметра λ.

Задача о спектре решеточных фермионов в магнитном поле (1 ÷ 3) за последние годы многократно возрождалась в самых различных областях физики: эффекты несоизмеримости в квазиодномерных структурах, квантовый эффект Холла, ВТСП (приближение среднего поля для модели RVB [4]) и т.д. В последнее время в связи с ВТСП возрос интерес к моделям, основное состояние которых представляет собой киральную спиновую жидкость, в которой нарушена P и T четность. Для Гейзенберговского антиферромагнетика со спином 1/2 на квадратной решетке:

$$H_{AF} = J \sum_{NN} \mathbf{S}_i \times \mathbf{S}_j + \tilde{\lambda} J \sum_{NNN} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j,$$

компьютерные эксперименты свидетельствуют в пользу того, что при $\tilde{\lambda} = 0$ основное состояние антиферромагнитно. В рамках приближения среднего поля [5] было показано, что киральное спиновое состояние появляется только при $\tilde{\lambda} \gtrsim 0{,}5$. Ввиду чрезвычайной сложности модели исследование даже приближенного гамильтониана представляет значительный интерес.

Целью настоящей работы является исследование спектра следующего гамильтониана на квадратной решетке, являющегося естественным обобщением "потоковой фазы", соответствующей одной из седловых точек в пределе $n \to \infty$ (n — число цветов):

$$H_{TB} = -\chi \sum_{NN} (e^{i\theta_{ij}} c_i^+ c_j + \text{H.c.}) - \frac{\lambda\chi}{2} \sum_{NNN} (e^{i\theta_{ij}} c_i^+ c_j + \text{H.c.}), \tag{1}$$

Мы рассмотрим только простейший случай однородного магнитного поля. Будем считать, что поток через плакет решетки равен $2\pi\phi$ (в единицах кванта потока), где $\phi = p/q$ — рациональное число ($\phi = 1/2$ — соответствует "потоковой фазе").

Как известно, при $\lambda = 0$ и четном q происходит касание двух зон при нулевой энергии. Эффективная динамика вблизи половинного заполнения описывается, следовательно, "мультиплетом" из q релятивистских (безмассовых) фермионов. Ниже мы исследуем спектр (1) при всех значениях λ. Из нашего анализа следует, в частности, что при $\lambda > 0$ в случае четного q при нулевой энергии имеется конечная щель между зонами и, следовательно, фермионы приобретают массу (зависящую от λ). После интегрирования по массивным фермионам в соответствии с идеологией [5], получаем эффективный лагранжиан Черна — Саймонса с коэффициентом равным $2q$.

Перейдем к изучению спектра гамильтониана (1). Выберем калибровку Ландау. Совершим преобразование Фурье и отнормируем подходящим образом энергию. В результате получим уравнение вида

$$H\psi_j \equiv (H_0 + \lambda H_1)\psi_j = \epsilon\psi_j \, , \tag{2}$$

где H_0 — оператор Харпера (или почти-Матье):

$$H_0\psi_j = 2\cos(\check{k}_x + 2\pi\phi j)\psi_j + e^{ik_y}\psi_{j+1} + e^{-ik_y}\psi_{j-1} \, , \tag{3}$$

$\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ — вектор квазиимпульса, $k_x = \check{k}_x + 2\pi\phi j$ и $\check{k}_x \in (-\pi/q, \pi/q)$; H_1 — оператор "возмущения", описывающий прыжки по диагоналям плакетов:

$$H_1\psi_j = \cos(\check{k}_x + 2\pi\phi(j + \tfrac{1}{2}))e^{ik_y}\psi_{j+1} + \cos(\check{k}_x + 2\pi\phi(j - \tfrac{1}{2}))e^{-ik_y}\psi_{j-1} \tag{4}$$

Закон дисперсии для уравнения (2) имеет следующий вид:

$$P_\phi(\epsilon, \lambda) = u(\lambda)[\cos(q\check{k}_x) + \cos(qk_y)] + v(\lambda)\cos(q\check{k}_x)\cos(qk_y), \tag{5}$$

где $u(\lambda) = 2^{2-2q} \left|\sum_{k=0}^{q} C_{2q}^{2k}(1+\lambda)^k(1-\lambda)^{q-k}\right|$, $v(\lambda) = 2^{2-q}\lambda^q$, $P_\phi(\epsilon, \lambda) = (-1)^{p+q+1}\epsilon^q + \ldots$ — полином от ϵ степени q с коэффициентами, полиномиально зависящими от λ.

При фиксированном значении $\phi = p/q$ спектр состоит из q зон. Плотность состояний в s-й зоне ($s = 0, \ldots, q-1$) определяется формулой:

$$g_s(\epsilon) = \int_{-\pi/q}^{\pi/q} \frac{d\check{k}_x}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \delta(\epsilon_s(\check{k}_x, k_y) - \epsilon),$$

где $\epsilon_s(\check{k}_x, k_y)$ — s-ая ветвь закона дисперсии (5).
После ряда преобразований находим;

$$g(\epsilon) \equiv \frac{1}{q} \sum_{s=0}^{q-1} g_s(\epsilon) = \frac{1}{\pi^2} \left|\frac{\partial P_\phi(\epsilon, \lambda)}{\partial\epsilon}\right| J(\epsilon), \tag{6}$$

где $J(\epsilon)$ – некоторый эллиптический интеграл, имеющий различный вид, в зависимости от параметров задачи: $w_1 = -v$, $w_2 = -u^2/v$, $w_3 = v - 2u$, $w_4 = v + 2u$. Имеются три типа областей изменения $P_\phi(\epsilon, \lambda)$, ограниченные параметрами w_i, для каждого из которых $J(\epsilon)$ имеет свое представление:

$$
\begin{aligned}
&\text{I. } w_1 < P < w_2. \quad J(\epsilon) = \frac{2}{\sqrt{(w_3 - P)(w_4 - P)}} K\left(\frac{P - w_1}{\sqrt{(w_3 - P)(w_4 - P)}}\right).\\
&\text{II. } w_2 < P < w_3. \quad J(\epsilon) = \frac{2}{P - w_1} K\left(\frac{\sqrt{(w_3 - P)(w_4 - P)}}{P - w_1}\right).\\
&\text{III. } w_3 < P < w_4. \quad J(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{v(P - w_2)}} K\left(\sqrt{\frac{(w_4 - P)(P - w_3)}{4v(P - w_2)}}\right).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Выясним теперь, как перестраивается зонная структура по мере изменения параметра λ. При $\lambda = 0$ спектр, очевидно, идентичен спектру, полученному Хофштадером [1], а при $\lambda \to \infty$ спектр, с точностью до масштабного множителя, соответствует спектру Хофштадера при удвоенном значении ϕ. Область изменения параметра λ разделяется на две подобласти $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$, в каждой из которых зоны деформируются достаточно регулярным образом.

В области $\lambda \in (0, 1)$ зоны соответствуют типу III (см. (7)). Границы зон определяются уравнениями $P = w_3$ и $P = w_4$. При $P = w_1$ в спектре имеются логарифмические особенности (в каждой из зон – ровно одна особенность). В этой области параметры w_i упорядочены так: $w_2 < w_3 < w_1 < w_4$.

В области $\lambda \in (1, +\infty)$ каждая зона состоит из областей всех трех типов. Границы зон определяются из уравнений $P = w_1$ и $P = w_4$. При $P = w_2$ есть логарифмическая особенность. В данной области параметры w_i упорядочены следующим образом: $w_1 < w_2 < w_3 < w_4$. При $P = w_3$ спектр непрерывен.

Точка $\lambda = 1$ является "сингулярной". В ней происходит пересечение траекторий $\epsilon_1(\lambda)$, $\epsilon_2(\lambda)$ и $\epsilon_3(\lambda)$, где $\epsilon_k(\lambda)$ – решение уравнения $P(\epsilon, \lambda) = w_k$. В результате, в точке $\lambda = 1$ особенности $g(\epsilon)$ оказываются на краях зоны, тогда как при $\lambda \neq 1$ особенности находятся внутри зон. Характер особенностей меняется: в точке $\lambda = 1$ особенности корневые. Отметим, что при изменении λ от 0 до ∞ все зоны деформируются единым "универсальным" образом. Перекрытия зон не происходит. Скейлинговые свойства спектра [6] сохраняются в процессе деформации. Все однопараметрическое семейство гамильтонианов $\mathbf{H}(\lambda) = H_0 + \lambda H_1$, при $\lambda \neq 1$, соответствует, как и оператор почти-Матье H_0, "критическому режиму", в частности, спектр $H(\lambda, \phi)$ инвариантен относительно РГ – преобразований, при иррациональных ϕ спектр сингулярен и т.д.

Вышеуказанные свойства универсальности $H(\lambda)$ вытекают из симметрии классического аналога рассматриваемой системы, который описывается гамильтонианом $H_{CL} = 2\cos x + 2\cos p + \lambda(\cos(x + p) + \cos(x - p))$, относительно перестановки $x \leftrightarrow p$. Как показано в [3], подобная симметрия приводит к замкнутости траекторий классической динамической системы и, как следствие, к критическому режиму соответствующей квантовой задачи. Более подробное изучение скейлинговых свойств спектра гамильтониана $H(\lambda)$ будет опубликовано отдельно.

Авторы выражают благодарность Я.Г.Синаю, С.Я.Житомирской и Д.В.Хвещенко за полезные обсуждения.

Литература

1. *Hofstadter D.R.* Phys. Rev. B, 1976, **14**, 2239.
2. *Wannier G.H.* Int. J. Quant. Chem., 1979, **13**, 413.

3. *Wilkinson M.* Proc. Roy. Soc. Lond., **A,** 1984, **391,** 305.

4. *Baskaran G. et al.* Sol. St. Commun., 1987, **63**, 973.

5. *Wen X.G. et al.* Phys. Rev. B, 1989, **39,** 11413.

6. *Tang C., Kohmoto M.* Phys. Rev. B, 1986, **34,** 204.

Институт спектроскопии
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
26 марта 1990 г.