

# Неньютоновская динамика быстрого движения магнитного вихря

Б. А. Иванов<sup>+\*1)</sup>, Г. Г. Аванесян<sup>∇</sup>, А. В. Хвальковский<sup>∇ 2)</sup>, Н. Е. Кулагин<sup>□</sup>, К. Э. Заспел<sup>△ 2)</sup>, К. А. Звездин<sup>∇</sup>

<sup>+</sup> Институт магнетизма НАН Украины, 03142 Киев, Украина

<sup>\*</sup> Киевский университет им. Тараса Шевченко, 03127 Киев, Украина

<sup>∇</sup> Учреждение Российской академии наук, Институт общей физики им. А. М. Прохорова РАН, 119991 Москва, Россия

<sup>□</sup> Государственный университет управления, 109542 Москва, Россия

<sup>△</sup> Department of Environmental Sciences, University of Montana-Western, Dillon MT 59725, USA

Поступила в редакцию 11 января 2010 г.

Рассматривается динамика магнитного вихря в тонком диске субмикронного диаметра, сделанном из магнитомягкого ферромагнетика. Под действием импульсов поля длительностью порядка 10–100 пс, вихрь приходит в сложное движение. Анализ результатов микромагнитного моделирования показывает, что это движение имеет неньютоновский характер. Оно может быть описано с помощью уравнения, содержащего третью производную от смещения центра вихря по времени.

В последние годы широко исследуются свойства субмикронных магнитных частиц в форме диска, сделанных из магнитомягких материалов на немагнитной подложке (магнитных наноточек) [1]. Для таких систем основным состоянием может быть магнитный вихрь. Энергетическая выгодность вихрей определяется тем, что вихревые конфигурации намагниченности, за исключением малой области вихревого кора, не создают размагничивающего поля [1]. Ожидается, что использование упорядоченных плотноупакованных массивов таких частиц позволит создать новое поколение устройств записи и обработки информации [2]. Переключение таких элементов включает сверхбыстрые (за времена порядка десятков пикосекунд) процессы движения вихревого кора [3]. Под действием спин-поляризованного тока вихрь может прийти в круговое движение большой амплитуды, что можно использовать для создания наноразмерных генераторов, излучающих в диапазоне 0.2–2 ГГц [4, 5]. При превышении некоторого порогового значения тока в таких системах также наблюдается возбуждение сверхбыстрой динамики вихря [6–8]. Благодаря этим обстоятельствам, в последние несколько лет значительно вырос интерес к исследованию быстрой динамики магнитных вихрей.

В то же время, вихри как топологически нетривиальные распределения намагниченности представляют интерес для фундаментальной физики магнетизма. Интерес к магнитным вихрям возник в 70-х годах 20-го столетия, когда стало понято, что

в двумерных легкоплоскостных магнетиках вихри (или связанные вихревые пары) играют роль нелинейных (солитонных) элементарных возбуждений и разрыв вихревых пар приводит к фазовому переходу Березинского–Костерлица–Таулесса [9, 10], см. также недавний обзор [11].

Исследования показали наличие нетривиальных динамических свойств магнитных вихрей, см. обзор [12]. В простейшем приближении движение координаты центра вихря  $\mathbf{X}$  является гирокосмическим и описывается уравнением  $(\mathbf{G} \times d\mathbf{X}/dt) = \mathbf{F}$ , где гировектор  $\mathbf{G} = G\mathbf{e}_z$  направлен перпендикулярно плоскости магнетика,  $G$  – гирокосмическая константа,  $\mathbf{F}$  – внешняя сила, действующая на вихрь [13] (в физике магнитных вихрей это уравнение называют уравнением Тиля). При учете потенциальной силы, действующей на вихрь в частице круговой формы,  $\mathbf{F} = -\partial W(|\mathbf{X}|)/\partial \mathbf{X} = -\kappa(|\mathbf{X}|)\mathbf{X}$ ,  $W(\mathbf{X})$  – потенциальная энергия вихря, зависимость коэффициента возвращающей силы  $\kappa(|\mathbf{X}|)$  от  $|\mathbf{X}|$  определяет нелинейность системы. Решение этого уравнения определяет круговое движение вихря с частотой  $\omega_0(|\mathbf{X}|) = \kappa(|\mathbf{X}|)/G$ , в линейном приближении  $\omega_0 = \kappa/G$ , где  $\kappa = \kappa(|\mathbf{X}| \rightarrow 0)$ . Однако численное моделирование динамики вихря для больших решеточных систем легкоплоскостных магнетиков показало, что траектория свободного движения вихря не является круговой и включает высокочастотные осцилляции на фоне медленного гирокосмического движения. Для описания этих данных было предложено феноменологическое уравнение для  $\mathbf{X}$  третьего порядка по времени [14]. Это уравнение, помимо гирокосмического слагаемого, содержит еще и инерционный член

<sup>1)</sup> e-mail: bivanov@i.com.ua

<sup>2)</sup> A.V. Khvalkovskiy, C.E. Zaspel.

с массой  $M$ , а также высшее гироскопическое слагаемое с третьей производной от  $\mathbf{X}$  по времени,

$$G_3 \left( \mathbf{e}_z \times \frac{d^3 \mathbf{X}}{dt^3} \right) + M \frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} + G \left( \mathbf{e}_z \times \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right) = \mathbf{F}. \quad (1)$$

Общее решение этого уравнения построить не удается. Однако важные особенности динамики таких систем обнаруживаются при анализе его линеаризованной версии, когда сила имеет вид  $\mathbf{F} = -\kappa \mathbf{X}$ . Для малых смещений вихря  $\mathbf{X}$  его решением являются три нормальных колебания вида  $A_\alpha = a_\alpha \exp(i\omega_\alpha t)$ ,  $A = X + iY$ ; частоты этих малых колебаний  $\omega_\alpha$  могут быть выражены аналитически через  $G_3$ ,  $M$ ,  $G$  и  $\kappa$ . Анализ численных данных показал, что одна из этих частот существенно меньше остальных двух, она совпадает с введенной выше частотой  $\omega_0$ , а остальные две имеют различные знаки, обозначим их  $-\omega_1$  и  $\omega_2$ ,  $\omega_0 \ll \omega_1 \simeq \omega_2$ . Используя неравенства  $\omega_0 \sim \Delta\omega \ll \bar{\omega}$ , где  $2\bar{\omega} = \omega_2 + \omega_1$  и  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ , можно записать простые аналитические соотношения [15]:

$$\omega_0 = \kappa/G, \quad G_3 \bar{\omega}^2 = G, \quad G_3(\Delta\omega + \omega_0) = M. \quad (2)$$

Несмотря на ряд попыток, последовательный вывод (1) как нелинейного динамического уравнения для коллективной переменной  $\mathbf{X}$  проведен не был. Однако в линейном приближении уравнение (1) было верифицировано, когда на основе уравнения Ландау–Лифшица был точно рассчитан полный спектр магнитных мод на фоне вихря [15]. Этим спин-волновым модам отвечают колебания намагниченности вида  $f_n(r) \exp(it\chi + i\omega t)$ , где  $r$ ,  $\chi$  – полярные координаты в плоскости магнетика,  $n$  и  $t$  – радиальное и азимутальное числа. Моды с  $t = \pm 1$  включают сдвиг координат вихревого кора. Прямой расчет показал, что одна из них с  $t = 1$  имеет аномально малую частоту  $\omega_0$ , а остальные образуют слабо расщепленные дублеты со значениями  $t = 1$  и  $t = -1$  и частотами  $\bar{\omega} \pm \Delta\omega/2$ ,  $\Delta\omega \sim \omega_0 \ll \bar{\omega}$  [15, 16]. Найденные аналитически значения частот трех мод, включающих моду с  $\omega_0$  и низколежащий дублет, естественно сопоставить с частотами колебаний с собственными частотами линеаризованной версии уравнения (1). Это позволило записать простые аналитические выражения для феноменологических коэффициентов  $G_3$  и  $M$  в этом уравнении через частоты, найденные в рамках аналитической теории [15]. Мода с  $t = -1$  соответствует динамике с отрицательной частотой, то есть ей отвечает прецессионное движение в направлении, противоположном тому, что реализуется для мод с частотами  $\omega_{0,2}$ .

Оказалось, что хотя значения констант получены только в линейном приближении, они позволяют опи-

сать всю совокупность численных данных, включая движение вихря с немалой амплитудой [12]. Таким образом, в этом подходе нелинейность определяется только потенциальной силой в уравнении (1). Подчеркнем, что согласие достигается только при одновременном учете инерционного члена и неньютоновского слагаемого с третьей производной. К сожалению, в то время анализ ограничился численными симуляциями, и экспериментальное наблюдение этой сложной неньютоновской динамики для вихрей в легкоплоскостных магнетиках провести не удалось.

Исследование малых магнитных частиц изменило ситуацию с наблюдением вихревой динамики магнетиков. Для таких частиц вихрь реализует основное состояние, его положение можно контролировать, и возможно прямое наблюдение динамики вихря различными методами. Из данных, полученных уже в первых работах по наблюдению динамики вихря, видно наличие сложных некруговых траекторий вихря [17–20]. Объяснение этого эффекта на основе тех же соображений, что и для вихрей в легкоплоскостных магнетиках, было дано в работах [21, 22]. Оказалось, что соотношение  $\Delta\omega \sim \omega_0 \ll \bar{\omega}$  выполняется и для вихрей в магнитомягких ферромагнетиках, при этом  $\bar{\omega} \propto \sqrt{\lambda}$ ,  $\lambda = L/R$ ,  $L$  – толщина частицы,  $R$  – ее радиус, обычно  $\lambda \ll 1$ , а величины  $\omega_0 \propto \lambda$  и  $\Delta\omega \propto \lambda$  содержат следующую степень этого малого параметра [22, 23]. Однако анализ динамики вихря для малых магнитных частиц требует последовательного учета нелокального магнитодипольного взаимодействия, что сильно усложняет расчеты. Недавно в работе [24] было получено соотношение  $\Delta\omega \simeq 3.5\omega_0$ , хорошо согласующееся с экспериментом (отметим, что это соотношение очень близко к тому, что имеет место для легкоплоскостных магнетиков без учета дипольного взаимодействия [15, 16]). Возможность использования простого уравнения (1) для описания движения кора вихря в различных ситуациях открывает интересные перспективы предсказания поведения системы при возбуждениях различной природы, например, под действием переменного магнитного поля или/или спин-поляризованного тока.

В настоящей работе на основе численного моделирования мы показываем адекватность простого феноменологического подхода, основанного на уравнении (1), для магнитных частиц круговой формы в вихревом состоянии.

Мы провели серию микромагнитных расчетов, в которых динамика намагниченности для наноточки, находящейся в вихревом состоянии, возбуждалась субнаносекундными импульсами поля, подобно тому, как это было реализовано эксперименталь-

но в работе [20]. Была рассмотрена система со следующими параметрами: радиус наноточки  $R = 150$  нм, толщина  $L = 10$  нм; магнитные параметры как у пермаллоя: намагниченность насыщения  $M_s = 800$  э.м.е./см<sup>3</sup>, что отвечает величине  $4\pi\gamma M_s = 2\pi \cdot 30$  ГГц,  $\gamma$  – гиромагнитное отношение, константа обменного взаимодействия  $A = 1.3 \cdot 10^{-6}$  эрг/см, затухание не учитывалось. Моделирование проводилось с помощью пакета микромагнитных программ SpinPM, который позволяет численно интегрировать уравнение Ландау–Лифшица на конечно-разностной сетке, используя метод Рунге–Кутта четвертого порядка. Размер ячейки вычислительной сетки составляет  $1.5 \times 1.5 \times 10$  нм<sup>3</sup>. Поле направлено в плоскости диска в виде трапециевидного импульса, состоящего из трех равных по длительности участков (линейное возрастание поля, постоянное значение и линейное убывание). Первоначально, до подачи импульса, вихрь располагается в центре диска, и система находится в равновесии. При подаче импульса магнитная система возбуждается, см. рис.1а. На рис.1б показаны спектры Фурье усредненной по диску компоненты намагниченности  $M_x$  для импульсов амплитудой 100 Э и длительностью от 1000 до 10 пс [25]. Во всех спектрах отклика системы присутствует пик на частоте 320 МГц. По мере уменьшения длительности возбуждающего импульса, в спектре начинает проявляться два других пика, на частотах 7.0 ГГц и 8.0 ГГц. Амплитуды пиков высокочастотных возбуждений практически незаметны для импульса длительностью 1000 пс и становятся максимальны для самого короткого импульса 10 пс.

Сравним результаты численного моделирования с известными теоретическими результатами. Рассмотрим сначала частоты возбужденных мод. Частота гиротропной моды вихря составляет  $\omega_0 = 20\gamma M_s L / 9R$  [26], высокие частоты возбуждений с  $m = \pm 1$  определяются как  $\bar{\omega} \simeq 0.9 \cdot 4\pi\gamma M_s \sqrt{L/R}$  [23] и  $\Delta\omega \simeq 3.5\omega_0$  [24]. Для нашей системы это дает  $\omega_0/2\pi = 0.33$  ГГц,  $\bar{\omega}/2\pi = 7$  ГГц и  $\Delta\omega/2\pi = 1.1$  ГГц. Эти значения находятся в хорошем соответствии с результатами численного моделирования:  $\omega_0/2\pi = 0.32$  ГГц,  $\bar{\omega}/2\pi = 7.5$  ГГц и  $\Delta\omega/2\pi = 1.0$  ГГц, и позволяют однозначно установить природу возбужденных мод: низкочастотная мода соответствует гиротропной моде вихря, а высокочастотные возбуждения соответствуют низшему дублету с  $m = \pm 1$ .

Нетривиальная зависимость спектров от длительности импульса и вид траекторий центра вихря, см. рис.2, может быть легко объяснена с помощью феноменологического уравнения (1). Для этого при-

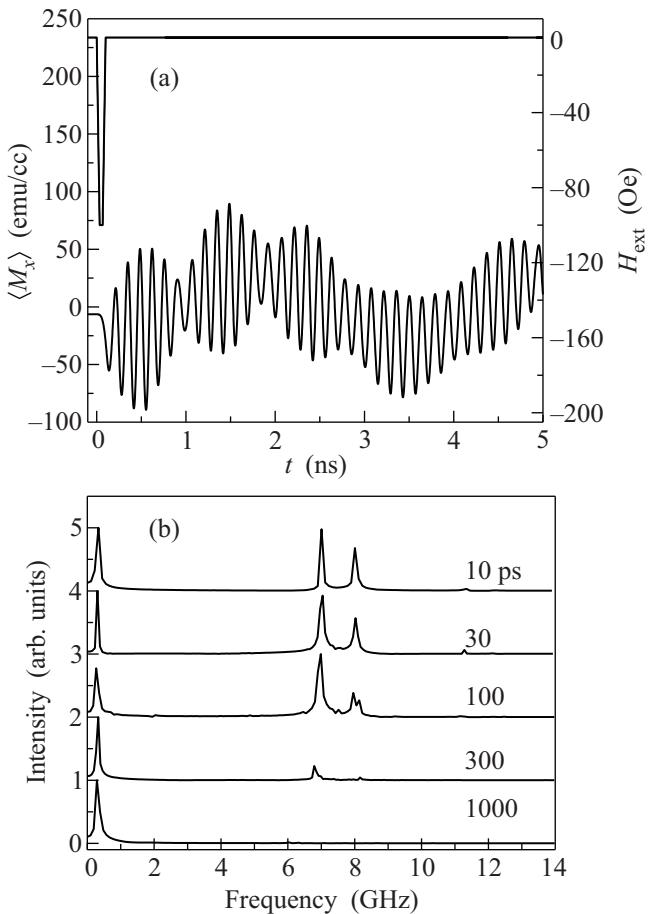


Рис.1. (а) Разворотка по времени импульса поля (верхний график) и компоненты усредненной по диску намагниченности (нижний график). Полная длительность импульса составляет 100 пс, амплитуда – 100 Э. (б) Спектр Фурье усредненной по диску  $x$ -компоненты намагниченности  $M_x$  для импульсов с амплитудой 100 Э и длительностью 1000, 300, 100, 30 и 10 пс, как обозначено на графиках

мем стандартное значение гирокопического коэффициента,  $G = 2\pi L M_s / \gamma$  [26], и представим полную силу  $\mathbf{F}^{\text{tot}}$  как  $\mathbf{F}^{\text{tot}} = -\kappa(|\mathbf{X}|)\mathbf{X} + \mathbf{F}$ , для малых смещений  $\kappa(0) \simeq (20/9) \cdot 2\pi M_s L^2 / R$  [26], сила  $\mathbf{F} = 2\pi M_s R L [\mathbf{H}(t) \times \mathbf{e}_z] / 3$  описывает воздействие переменного внешнего магнитного поля, приложенного в плоскости диска [26]. Поскольку соотношение между частотами возбуждений такое же, как для легкоплоскостных ферромагнетиков ( $\omega_0 \ll \omega_1 \simeq \omega_2$ ), мы можем воспользоваться соотношениями (2) [15], из которых находим  $G_3 = G/\bar{\omega}^2$  и  $M = G(\omega_0 + \Delta\omega)/\bar{\omega}^2$ . Используя приведенные выше аналитические выражения для  $\omega_0$ ,  $\bar{\omega}$  и  $\Delta\omega$ , легко получим  $G_3 = 0.625 \cdot 4\pi\gamma M_s (R/\gamma^2)$  и не зависящее от радиуса системы значение инерционной массы  $M = 0.58 \cdot L/\gamma^2$ , что

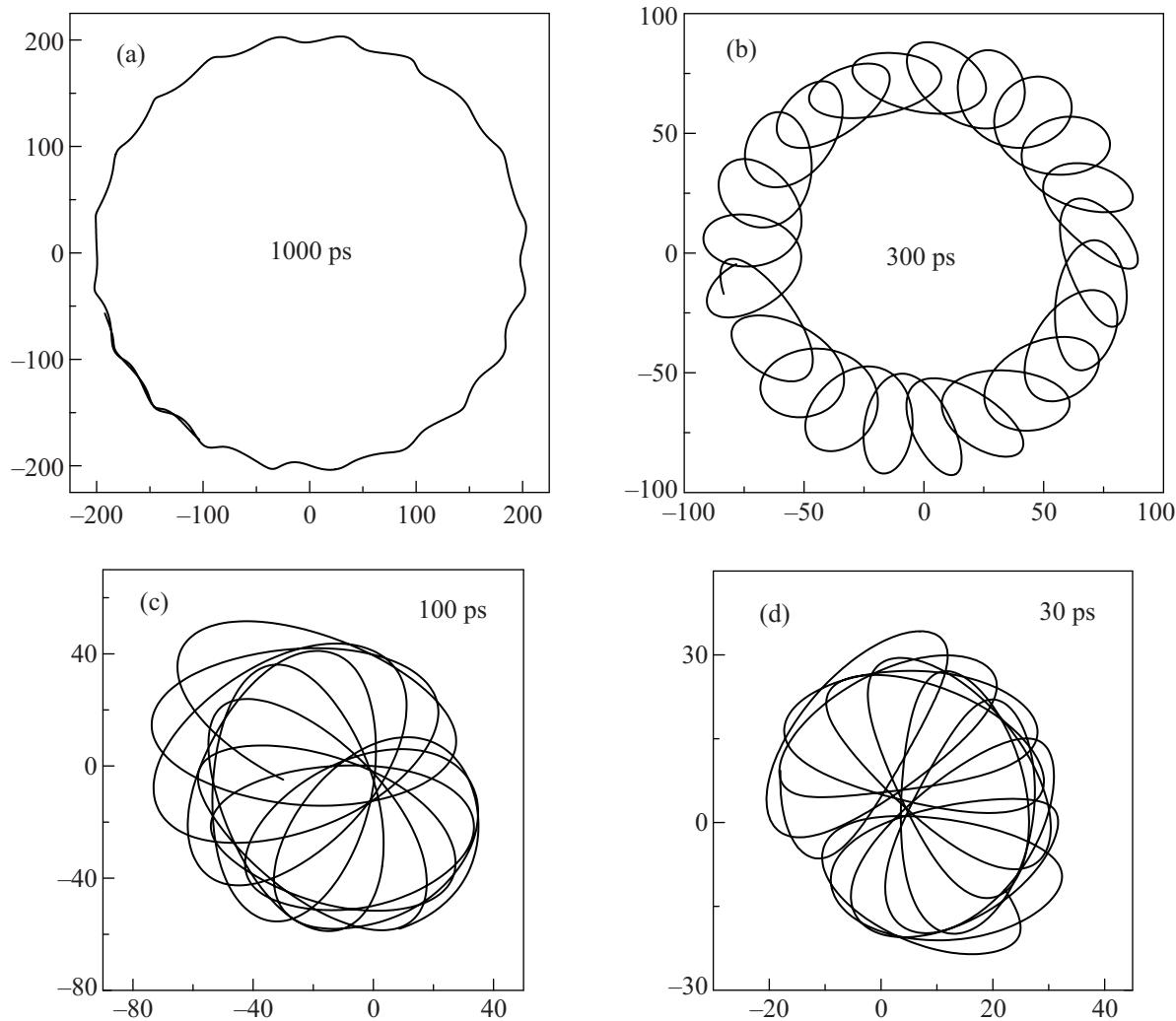


Рис.2. Фазовые траектории системы в координатах  $\langle M_x \rangle$ ,  $\langle M_y \rangle$  (отложены по горизонтальной и вертикальной осям, соответственно, в э.м.е./см<sup>3</sup>), по которым восстанавливается траектория движения кора вихря [25], для возбуждения наноточки импульсами поля с различной длительностью  $\Delta t$ : (a)  $\Delta t = 1000$  пс, (b)  $\Delta t = 300$  пс, (c)  $\Delta t = 100$  пс, (d)  $\Delta t = 30$  пс

отвечает значению массы на единицу длины вихря  $M/L$  порядка  $0.7 \cdot 10^{-14}$  г/см. Решения этого уравнения демонстрируют тот же сложный вид траекторий, включающий быстрое движение на фоне медленной прецессии вихря с частотой  $\omega_0$ , что и наблюдается численно, см. рис.2. Отметим, что для быстрых колебаний характерна суперпозиция двух движений с различными частотами, что и привело авторов работы [14] к записи уравнения третьего порядка, и что амплитуда быстрых осцилляций очень чувствительна к длине импульса, см. рис.2.

Для более детального анализа соотношения амплитуд различных типов колебаний мы используем линеаризованную версию (1), записав ее в комплексной форме для переменной  $A = X + iY$ :

$$iG_3 \frac{d^3 A}{dt^3} + M \frac{d^2 A}{dt^2} + iG \frac{dA}{dt} + \kappa A = \tilde{F}, \quad \tilde{F} = F_x + iF_y. \quad (3)$$

При возбуждении системы импульсами поля в комплексном уравнении (3)  $\tilde{F}(t) = i2\pi M_s R L \tilde{H}(t)/3$ ,  $\tilde{H}(t) \equiv H_x(t) + iH_y(t)$ . Считая, что  $A(t) = 0$  при  $t \rightarrow -\infty$ , общее решение легко получаем в виде суперпозиции слагаемых, описывающих колебания с тремя частотами,  $A = X + iY = \sum_{\alpha} A_{\alpha}(t)$ ,

$$A_0(t) = i\gamma H(\omega_0, t) e^{i\omega_0 t}, \quad 2A_2(t) = -i\gamma H(\omega_2, t) e^{i\omega_2 t}, \\ 2A_1(t) = -i\gamma H(-\omega_1, t) e^{-i\omega_1 t},$$

где введена универсальная функция  $H(\omega, t) = \int_{-\infty}^t \tilde{H}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau$ . Функцию  $H(\omega, t)$  неслож-

но найти для любой формы импульса, но наиболее показателен анализ в предельных случаях длинных и коротких импульсов. Если длительность импульса мала по сравнению с соответствующим периодом колебаний,  $\omega\Delta t/2\pi \ll 1$ , то  $H(\omega, t) = H_0\Delta t \exp(-i\omega t)$ ,  $H_0\Delta t \equiv \int_{-\infty}^{\infty} H(t)dt$ . Таким образом, в случае

предельно короткого импульса поля  $\bar{\omega}\Delta t/2\pi \ll 1$  амплитуды всех мод сравнимы,  $A_1 \simeq A_2 \simeq 2A_0$ . Для более длинных импульсов, удовлетворяющих условию  $\omega_0\Delta t/2\pi \ll 1 \ll \bar{\omega}\Delta t/2\pi$ , функция  $H(\omega, t)$  быстро убывает, и амплитуда высокочастотных мод мала. Такое поведение хорошо описывает данные моделирования; например, соотношение  $\bar{\omega}\Delta t/2\pi = 1$  в нашем случае дает  $\Delta t = 130$  пс, что согласуется с наблюдаемым существенным уменьшением амплитуды высокочастотных осцилляций при переходе от импульса  $\Delta t = 100$  пс к  $\Delta t = 300$  пс, сравните рис. 2б и с. В то же время, такое же изменение длительности импульса при выполнении условия  $\bar{\omega}\Delta t/2\pi \ll 1$  не меняет качественно форму траекторий и приводит только к изменению амплитуды смещения вихря, сравните рис. 2с и д.

Основной особенностью уравнения (1) по сравнению со стандартным динамическим уравнением ньютона-вского типа является наличие высшего гироскопического слагаемого с третьей производной координаты от времени. Этот факт проявляется в необычном отклике системы на дельтообразный импульс силы; после импульса силы вида  $F\Delta t\delta(t)$  координата изменяется со временем как  $X = (F\Delta t/2G_3)t^2$ , причем вихрь смещается в направлении, перпендикулярном направлению силы. В случае стандартной ньютоновской динамики при таком же воздействии должен реализоваться линейный рост смещения вихря со временем  $t$  в направлении силы. Мы провели анализ траекторий вихря в течении первых десятков пикосекунд (50–100 пс) после импульса поля длительностью 10 пс. Оказалось, что при этом смещение вихря происходит в направлении, перпендикулярном силе, как и следует из не-ニュтоновского уравнения (1), и что зависимость координаты вихря от времени описывается функцией вида  $X \propto t^\nu$ , где значение  $\nu = 2.1 \pm 0.2$ . Более того, значение  $G_3$ , найденное из подгонки  $X(t)$  квадратичной функцией, по порядку величины согласуется с приведенным выше аналитическим результатом (их отношение составляет  $2.8 \pm 0.5$ ). (Некое количественное расхождение может быть обусловлено отклонением соотношения  $\langle M \rangle$  и  $X$  от известной зависимости [25].) Это говорит о прекрасном качественном согласовании результатов численного моделирования

и аналитической модели (1) и, в целом, демонстрирует не-ニュтоновский характер высокочастотной динамики вихря.

Достоинство феноменологического уравнения (1) состоит в том, что с его помощью можно описать и другие типы возбуждения движения вихря, при соответствующем выборе силы  $F$ . Здесь важно подчеркнуть, что включение инерционного слагаемого (учет эффективной массы вихря) имеет смысл только при одновременном учете не-ニュтоновского слагаемого с третьей производной по времени в этом уравнении, которое полностью определяет начальный этап движения при малой длительности импульса.

Авторы благодарны А.К. Звездину за внимательное прочтение рукописи и многие ценные замечания. Работа поддержана совместным грантом Российского фонда фундаментальных исследований и Национальной Академии Наук Украины (# 08-02-90495/219-09).

1. R. Skomski, J. Phys.: Condens. Matter **15**, R841 (2003); *Advanced Magnetic Nanostructures*, Eds. D. J. Sellmyer and R. Skomski, Springer, Berlin, 2006.
2. A. Wachowiak, J. Wiebe, M. Bode et al., Science **298**, 577 (2002).
3. R. Hertel, S. Gliga, M. Fähnle et al., Phys. Rev. Lett. **98**, 117201 (2007).
4. V. S. Pribyag, I. N. Krivorotov, G. D. Fuchs et al., Nat. Phys. **3**, 498 (2007).
5. B. A. Ivanov and C. E. Zaspel, Phys. Rev. Lett. **99**, 247208 (2007).
6. K. Yamada, S. Kasai, Y. Nakatani et al., Nat. Mater. **6**, 269 (2007).
7. A. V. Khvalkovskiy, J. Grollier, A. Dussaux et al., Phys. Rev. B **80**, 140401(R) (2009).
8. A. V. Khvalkovskiy, A. N. Slavin, J. Grollier et al., Appl. Phys. Lett. **96**, 022504 (2010).
9. В. Л. Березинский, ЖЭТФ **59**, 907 (1970); **61**, 1144 (1971).
10. J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, J. Phys. C **6**, 1181 (1973).
11. С. Е. Коршунов, УФН **176**, 233 (2006).
12. F. G. Mertens and A. R. Bishop, in *Nonlinear Science at the Dawn of the 21th Century*, Eds. P. L. Christiansen and M. P. Soerensen, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
13. A. Thiele, Phys. Rev. Lett. **30**, 230 (1973); J. Appl. Phys. **45**, 377 (1974).
14. F. G. Mertens, H. J. Schnitzer, and A. R. Bishop, Phys. Rev. B **56**, 2510 (1997).
15. B. A. Ivanov, H. J. Schnitzer, F. G. Mertens et al., Phys. Rev. B **58**, 8464 (1998).
16. B. A. Ivanov and G. M. Wysin, Phys. Rev. B **65**, 134434 (2002).

17. J. P. Park, P. Eames, D. M. Engebretson et al., Phys. Rev. B **67**, 020403(R) (2003).
18. S. B. Choe, Y. Acremann, A. Scholl et al., Science **304**, 420 (2004).
19. J. Park and P. A. Crowell, Phys. Rev. Lett. **95**, 167201 (2005).
20. X. Zhu, Zh. Liu, V. Metlushko et al., Phys. Rev. B **71**, 1804089(R) (2005).
21. B. A. Ivanov and C. E. Zaspel, Appl. Phys. Lett. **94**, 027205 (2002).
22. B. A. Ivanov and C. E. Zaspel, Phys. Rev. Lett. **94**, 027205 (2005).
23. C. E. Zaspel, B. A. Ivanov, P. A. Crowell et al., Phys. Rev. B **72**, 024427 (2005).
24. K. Y. Guslienko, A. N. Slavin, V. Tiberkevich et al., Phys. Rev. Lett. **101**, 247203 (2008).
25. В случае, если в системе возбуждена лишь низкочастотная гиротропная мода, координата **X** кора вихря пропорциональна усредненной намагниченности системы  $\langle \mathbf{M} \rangle$ :  $\langle \mathbf{M} \rangle = 2\pi M_s RL[\mathbf{e}_z, \mathbf{X}]/3$  [26]. Детальный анализ траекторий кора вихря показал, что подобная зависимость сохраняется и при возбуждении высокочастотных мод.
26. K. Yu. Guslienko, B. A. Ivanov, Y. Otani et al., J. Appl. Phys. **91**, 8037 (2002).