

Гравитационная модуляция оптической длины большебазовых лазерных интерферометров

А. В. Гусев¹⁾, В. Н. Руденко¹⁾

Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга МГУ, 119992 Москва, Россия

Поступила в редакцию 15 февраля 2010 г.

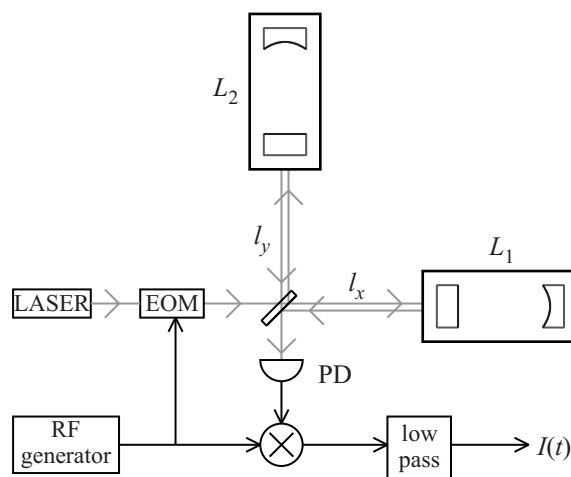
Рассматривается влияние квазистатических вариаций наземного гравитационного поля на выходной сигнал большебазовых гравитационно-волновых (ГВ) интерферометров. Используется релятивистское представление гравитационного поля средой с изменяющимся показателем преломления. Приводится аналитический расчет с численными оценками величины приливного эффекта, объясняющий результаты недавних наблюдений на интерферометрах LIGO.

1. Введение. Для детектирования гравитационного излучения астрофизической природы созданы и находятся в поисковом режиме наземные лазерные интерферометры на подвесных зеркалах (пробных массах) с базой 4 км (LIGO [1]) и 3 км (VIRGO [2]). Диапазон наилучшей чувствительности этих антенн лежит в области ($10^2 \div 10^3$) Гц. Обсуждалась также возможность параллельного использования этих установок для регистрации медленных геофизических возмущений через сигналы следящих систем удержания зеркал в рабочей точке интерферометра (на частотах ниже 0.01 Гц [3–5]).

Недавно на интерферометрах LIGO (наблюдательная серия S5) были обнаружены приливные вариации наземного поля в виде амплитудной модуляции радиосигнала на частоте циркуляции фотонов между зеркалами [6, 7]. Предложенная в этих работах интерпретация связывает наблюдения с релятивистским эффектом гравитационного смещения частоты оптической накачки интерферометра. Это, однако, противоречит потенциальному характеру наземного поля, запрещающему изменение частоты фотона при его движении по замкнутой траектории (интерференция на входном зеркале).

Ниже предлагается иное объяснение, ассоциированное с другим релятивистским оптогравитационным эффектом – появлением эффективного оптического показателя преломления среды в гравитационном поле.

Принципиальная схема интерферометров LIGO и VIRGO представлена на рисунке. Конфигурация Майкельсона усложнена наличием оптических Фабри-Перо (ФП) резонаторов в плечах, которые ниже будем рассматривать как сложные зеркала (опущено зеркало рециркуляции между лазером и делителем луча, что качественно не влияет на



Принципиальная схема ГВ интерферометра

результат дальнейшего анализа). Для удержания плечевых зеркал в позиции оптического резонанса вводится фазовая модуляция входного луча (блоки EOM, RF) на радиочастоте $\nu_r \sim 25$ МГц в интерферометрах LIGO). По известной схеме Паунда-Драйвера [8] синхронное детектирование отраженного излучения на частоте модуляции позволяет сформировать напряжение драйверов коррекции положения зеркал (на рисунке эти детали опущены). Полезный сигнал интерферометра как гравитационно-волнового (ГВ) детектора появляется на выходе деструктивной интерференции (антисимметричный порт) в “темном пятне” в виде низкочастотных составляющих фототока после демодуляции.

2. Частота циркуляции в выходном сигнале интерферометра. Появление составляющей выходного тока фотодетектора на частоте циркуляции фотонов связано с засветкой соседней к основному резонансу моды в ФП плечах. Теоретически плечевые ФП резонаторы и “полный Майкельсон” долж-

¹⁾ e-mail: avg@sai.msu.ru, rvn@sai.msu.ru

ны иметь одномодовую монохроматическую накачку. Однако в силу большой базы плеч ($L \sim 3 \div 4$ км) частота циркуляции, она же “межмодовый интервал” или “свободный спектральный интервал” ФП, оказывается относительно небольшой: для интерферометров LIGO она имеет порядок $\nu_{fsr} = c/2L \simeq 37$ кГц. Это значительно больше ширины пика линии стабилизированной накачки $\sim (1 \div 3)$ Гц, обусловленной флуктуациями фазы оптического генератора, но меньше (или порядка) ширины спектра его амплитудных флуктуаций (“пьедестал линии”) $\delta\nu \sim \nu_0/Q \sim (10^4 \div 10^5)$ Гц (ν_0, Q – частота и добротность генератора). Благодаря этому факту, соседние с основным резонансом ν_0 моды на частотах $\nu_0 \pm \nu_{fsr}$ тоже получают некоторую подсветку. Такая двух (трех) модовая структура поля в ГВ интерферометрах может служить причиной появления составляющей тока на частоте ν_{fsr} на выходе фотоприемника.

На практике ситуация оказывается более запутанной. Из-за условия деструктивной интерференции отраженных “плечевых” волн на частоте основной моды (темное пятно) ее амплитуда на фотодетекторе исчезает и не может участвовать в процессе рождения радио-компоненты тока ν_{fsr} . Для разрешения данного парадокса следует учесть, что накачка больших гравитационных интерферометров априори не является монохроматической. Как отмечено выше, она специально модулируется с высокой радиочастотой $\nu_r \sim 10^7$ Гц $\gg \nu_{fsr}$ для получения “сигналов расстройки”, обеспечивающих (посредством управляющих драйверов) удержание координат подвешенных зеркал в рабочей позиции, соответствующей вершине оптического резонанса плеч. Величина сигнала расстройки пропорциональна амплитуде радио-компоненты на частоте модуляции ν_r . В рабочем режиме “замкнутого интерферометра” расстояние между зеркалами в плечах оказывается фиксированным с большой точностью. На низших частотах, $\nu < 1$ Гц, точность слежения достигает 10^{-10} см. На высоких частотах в рабочем диапазоне интерферометрической антенны как приемника гравитационных волн ($\sim 10^2 \div 10^3$ Гц) передаточная функция следящих систем падает и зеркала оказываются свободными. Их смещение под действием относительного поля ускорений в гравитационной волне регистрируется интерферометром.

Для дальнейших расчетов важно, что боковые компоненты модулированной накачки на частотах $\nu_0 \pm \nu_r$ как раз служат опорным гетеродином для выделения ν_{fsr} при фотодетектировании, поскольку их ЭМ поле не исчезает в дифференциальном выходе интерферометра в отличие от несущей компоненты ν_0 .

Последнее существенное замечание к общей картине получения выходного сигнала состоит в напоминании того факта, что результат интерференции зависит от соотношения *оптических* длин ФП плеч $(L_1 n_1 - L_2 n_2)$, где n_1, n_2 – соответствующие показатели преломления. Поэтому сохранение геометрических размеров интерферометра в квазистатике в принципе допускает появление сигналов, связанных с медленным изменением параметров “оптической среды” в плечах интерферометра. Как известно из ОТО, действие гравитации на световые лучи может быть описано через эквивалентный показатель преломления на пути распространения ЭМ излучения [9, 10]. Такой подход был использован, в частности, в пионерской работе по оптическим интерферометрам как приемникам ГВ-излучения [11].

Как будет показано ниже, именно этот релятивистский эффект может служить причиной регистрации приливных вариаций наземного потенциала, обнаруженный LIGO в серии наблюдений S5.

3. Интерференция отраженных волн на фотодетекторе. На фотодетектор попадают световые волны, отраженные от плечевых ФП резонаторов. Их разность фаз зависит как от оптических длин самих резонаторов, так и от соотношения “майкельсоновских размеров” l_x, l_y , которые много меньше базы $L_1, L_2 \sim L_0$. На практике всегда существует небольшая, но конечная (статическая) разность $\Delta L = L_1 - L_2$, что обуславливает асимметрию оптических резонансных частот в плечах (каждое плечо работает в “своем резонансе”). При этом условие деструктивной интерференции (“темного пятна”) по основной частоте накачки ν_0 обеспечивается подбором разности “майкельсоновских размеров” $\delta l = l_x - l_y$, так называемая “Шнапп асимметрия”. Важно, что эта асимметрия не приводит к нулевой интерференции для волн сдвинутых частот, в частности, для радио боковых $\nu_0 \pm \nu_r$.

При условии сохранения размеров плеч L_1, L_2 следящими системами можно указать две причины разности фаз отраженных плечевых волн, интерферирующих на фотодетекторе: а) асимметрию резонансных частот в плечах (статический сдвиг), б) вариации показателей преломления оптической среды в плечах (динамический сдвиг). Приведем формулы для обоих эффектов.

А) *Статический сдвиг.* Используя известные формулы Эйри [12], легко найти оценку фазового сдвига плечевых волн вблизи оптического резонанса при малой расстройке $\Omega = 2\pi(\nu - \nu_0) \ll 2\pi\nu_0 = 4\pi(L/\lambda)\nu_{fsr}$, связанного с асимметрией плеч ΔL ($L_1 \sim L_2 \sim L_0$):

$$\varphi_i \cong \Omega_i \frac{4L_0 n_0}{(1-r)c}; \quad \Delta\varphi \cong \frac{4L_0 n_0}{(1-r)c} \Delta\Omega_{st},$$

$$\Delta\Omega_{st} = 2\pi(\nu_{fsr,1} - \nu_{fsr,2}) \cong \frac{2\pi}{1-r} \frac{\Delta L}{L_0} \frac{c}{2L_0 n_0}; \quad (1)$$

$$\nu_{fsr,i} = \frac{c}{2L_i n_0} \quad (i = 1, 2).$$

Б) *Динамический сдвиг.* При изменениях показателей преломления в плечах (δn_i) возникает дополнительный сдвиг за счет модуляции межмодовых (и, следовательно, собственных) частот плеч (геометрически плечи остаются фиксированными) $\nu_{fsr} \cong \cong (c/2L_0 n_0)(1 - (\delta n_i/n_0))$. Очевидно, что эффект достигает максимума при “приливном” антисимметричном характере вариаций n в плечах:

$$\Delta\nu_{fsr} = \nu_{fsr,1} - \nu_{fsr,2} = \frac{c}{2L_0 n_0^2} 2\delta n \equiv \nu_{fsr} \frac{2\delta n}{n_0}$$

$$(\delta n = \delta n_1 = -\delta n_2);$$

в дальнейшем используется также обозначение $h_t = 2(\delta n/n_0)$.

Фазовый сдвиг отраженных волн будет пропорционален разности плечевых собственных частот $\Delta\Omega_g$, возникшей за счет вариаций показателя преломления:

$$\Delta\Omega_g \cong 2\pi\nu_0 \frac{2\delta n}{n_0} \simeq 4\pi\nu_{fsr} \frac{L}{\lambda} \frac{\delta n}{n_0}, \quad (2)$$

$$\Delta\varphi_g \cong \frac{2}{1-r} \frac{1}{\nu_{fsr}} \Delta\Omega_g \simeq \frac{4\pi L}{(1-r)\lambda} \frac{2\delta n}{n_0}.$$

Вариации фазы, вызванные изменением показателя преломления будем также называть “гравитационным” эффектом, приписывая соответствующим переменным индекс g (как в (2)).

Суммарный фазовый сдвиг отраженных от ФП зеркал волн будет содержать оба члена: статический $\sim \Delta L$ и динамический $\sim \delta n/n_0$:

$$\Delta\varphi_\Sigma \simeq \frac{1}{1-r} \left(2\pi \frac{\Delta L}{L_0} + \frac{4\pi L_0}{\lambda} \frac{2\delta n}{n_0} \right). \quad (3)$$

Поля, интерферирующие на фотодетекторе, имеют следующие ЭМ компоненты: несущую ν_0 , соседнюю засвеченную моду $\nu_1 = \nu_0 \pm \nu_{fsr}$ и радио-боковую $\nu_2 = \nu_0 \pm \nu_r$. Как уже упоминалось, подбором плеч $l_x \sim l_y \ll L_0$ обеспечивается работа в “темном пятне”, то есть поле на частоте ν_0 исчезает, и интерферируют лишь компоненты на частотах ν_1 и ν_2 . Передаточную функцию интерферометра (см. рисунок) тогда можно записать в компактной комплексной форме:

$$\tilde{H}(\omega) = 2j \exp\{j\psi\} \sin \theta, \quad (4)$$

где

$$\psi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{\omega}{c}(l_x + l_y); \quad \theta = \frac{1}{2}\Delta\varphi_\Sigma - \frac{\omega}{c}\delta l.$$

4. Выходной сигнал ГВ – интерферометра.

Пусть излучение накачки имеет амплитуду несущей E_0 , тогда по порядку величины амплитуда радиобоковой компоненты $E_2 = E_0 J_1(m)$, где m – индекс модуляции, $J_1(\cdot)$ – функция Бесселя 1-го порядка. Амплитуду второй засвеченной моды обозначим через E_1 . Вычисление суммарного поля на фотодетекторе несложно выполнить с помощью передаточной функции (4). С учетом нулевого поля по несущей фототок оказывается пропорционален квадрату модуля двух компонент на частотах ν_1 и ν_2 ($\omega = 2\pi\nu$):

$$I_\Sigma = |\tilde{E}(\omega_1) \exp\{j\omega_1 t\} + \tilde{E}(\omega_2) \exp\{j\omega_2 t\}|^2. \quad (5)$$

Несложное, но громоздкое вычисление фототока (5) с использованием передаточной функции интерферометра (4) дает следующее выражение после фильтрации радиочастот $\nu \ll \nu_0, \nu_1$:

$$I_\Sigma \simeq 8E_1 E_2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta + \Delta\varphi_\Sigma}{2} \times \\ \times \cos((\Omega_r - \Omega_{fsr})t - \theta), \quad \alpha = \frac{2\Omega_r \delta l}{c}; \quad (6)$$

$$\beta = \frac{2\Omega_{fsr} \delta l}{c}; \quad \theta = (\alpha - \beta) \frac{l_x}{\delta l} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta + \Delta\varphi_g}{2},$$

где $\delta l = (l_x - l_y)$, разность $\Delta\varphi_\Sigma$ определена формулой (3).

Последняя техническая процедура обработки (отмеченная на рисунке) – гетеродинирование фототока (6) с опорной радиочастотой ν_r и фильтрация низкочастотных компонент $\nu \ll \nu_r$ дает “наблюдаемую переменную” в виде напряжения $V(t)$, содержащую, кроме рабочей области частот ГВ антенны ($10^2 \div 10^3$) Гц, дополнительную гармонику на частоте Ω_{fsr} , чья амплитуда и фаза оказываются модулированными квазистатическими изменениями показателя преломления $\delta n(t)/n$, то есть

$$V(t) \simeq 4E_1 E_2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta + \Delta\varphi_\Sigma}{2} \times \\ \times \sin(\Omega_{fsr} t + \theta) + \text{медленные компоненты}. \quad (7)$$

Оценим порядок величин $\alpha, \beta, \varphi_\Sigma$, используя параметры установки LIGO из работ [6, 7]: $\delta l \approx 30$ см, $\Delta L \cong 2$ см, $\Omega_r/2\pi = 25$ МГц, $\Omega_{fsr}/2\pi \approx 37$ кГц. Находим, что $\beta \approx 4 \cdot 10^{-4}$, $\alpha \approx 2 \cdot 10^{-2}$, $\Delta\varphi_\Sigma \approx 2 \cdot 10^{-3}$, откуда следует замена синусов углами. Оценочная формула для амплитуды гармоники Ω_{fsr}

$$|V(t)| \simeq E_1 E_2 \alpha \Delta \varphi_{\Sigma} = E_1 E_0 J_1(m) \alpha \frac{2\pi}{(1-r)} \left(\frac{\Delta L}{L_0} + \frac{4L_0}{\lambda} \frac{\delta n(t)}{n_0} \right) \quad (8)$$

содержит относительно большую постоянную часть $\sim \Delta L$ и малую добавку, меняющуюся с темпом изменения показателя преломления $\delta n(t)$.

5. Приливная гравитационная рефракция.

Чтобы получить величину приливного эффекта, наблюдаемого на антеннах LIGO, требуется отождествить феноменологически введенную вариацию показателя преломления $(\delta n(t)/n_0)$ с приливной вариацией гравитационного потенциала ΔU_t . Как и в работе [11], примем релятивистский эффект изменения показателя преломления в соответствии с формулой ОТО $|\delta n(t)/n_0| \simeq \Delta U_t/2c^2$. Нас будет интересовать горизонтальная компонента приливного ускорения в плоскости интерферометра $g_{\parallel}(x) \simeq x \cdot (\partial g_t/\partial x)$, где $(\partial g_t/\partial x) = (\partial^2 U_t/\partial x^2)$ есть горизонтальный градиент приливного ускорения. Соответствующая разность потенциалов будет иметь вид

$$\Delta U_t = \int_0^L \frac{\partial g_t}{\partial x} x dx.$$

Учитывая малость базы интерферометра по сравнению с земным радиусом, горизонтальный градиент можно считать постоянным на длине плеч, тогда $\Delta U_t = (\partial g_t/\partial x) \cdot (L^2/2)$.

Хорошо известна оценка приливных вариаций по порядку величины: $g_{\parallel t} \simeq (\partial g_t/\partial x)L \simeq 10^{-7}g_0$, откуда имеем $\Delta U_t \simeq 10^{-7}g_0(L/2)$, где g_0 – ускорение силы тяжести.

В итоге $|\delta n/n_0| \simeq (\Delta U_t/2c^2) \simeq 10^{-7}g_0(L_0/4c^2)$, откуда для второго слагаемого в формуле (8) получаем

$$\frac{4L_0}{\lambda} \left| \frac{\delta n}{n_0} \right| = \frac{4L_0}{\lambda} \cdot 10^{-7}g_0 \frac{L_0}{4c^2} \simeq 10^{-7}g_0 \frac{L_0^2}{\lambda c^2}. \quad (9)$$

Возвращаясь к формуле (8), запишем выражение для индекса приливной модуляции по мощности P и по амплитуде A гармоники ν_{fsr} :

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{2\Delta A}{A} = \frac{8L_0^2}{\lambda \Delta L} \cdot h_t = 10^{-7}g_0 \frac{2L_0^3}{\lambda \Delta L c^2}. \quad (10)$$

Формула(10) справедлива, пока статический член в (8) много больше динамического, то есть $\Delta L \gg \gg 4(L/\lambda)Lh_t$. Используя формулы (8), (9), (10), можно дать теоретическую оценку “эффекта приливной гравитационной модуляции” и сравнить ее с наблюдениями LIGO в серии $S5$.

Численная оценка параметра “эквивалентной приливной деформации” есть $h_t \simeq 2 \cdot 10^{-7}g_0L_0/c^2 \simeq \simeq 10^{-19}$, откуда для индекса модуляции по мощности имеем (9): $\Delta P/P \simeq 0.001$, то есть относительная величина эффекта порядка десятой процента, что меньше индекса наблюдаемого в [6, 7]. Таким образом, объяснение “феномена приливной модуляции” выходного сигнала на частоте циркуляции фотонов с помощью релятивистской гравитационной вариации оптического пути, качественно не противоречит эксперименту. Для вычисления абсолютной величины эффекта требуется знание амплитуд E_0 и E_1 , а также учет рециркуляции.

Отметим, что при однородном и изотропном характере временных вариаций наземного гравитационного поля сигнал на выходе интерферометра исчезает. Для его появления существенен приливной характер пространственной структуры поля: разные знаки возмущений в плечах интерферометра. Вероятно, по этой причине в работах [6, 7] данный эффект рассматривался также, как способ детектирования низкочастотных ГВ (этому препятствует, однако, высокий уровень помех в низкочастотной части $\nu < 0.1$ Гц шумового спектра). Важно, что при приливном характере гравитационных возмущений поля отсутствует сигнал автоподстройки частоты лазера, пропорциональный сумме оптических длин плеч, который в иной конфигурации возмущений привел бы к компенсации полезного эффекта.

В качестве последнего замечания укажем, что амплитуда модуляции и отношение сигнал – шум могли бы значительно вырасти при инжекции в интерферометр независимой накачки на частоте соседней моды ν_1 (или следующих). Это не повлияло бы заметно на операции извлечения ГВ-сигнала по основной гармонике ν_0 . По-видимому, в этом заключен технический резерв инструмента LIGO и VIRGO как крупномасштабных гравитационных градиентометров.

Авторы приносят свою искреннюю благодарность проф. Адриано Милессиносу (Университет Рочестера, США) за полезные дискуссии по технике извлечения информации на больших гравитационно-волновых интерферометрах.

1. <http://www.ligo.caltech.edu>.
2. <http://Virgo.infn.it>.
3. А. В. Копаев, В. Н. Руденко, Письма в ЖЭТФ 630 (1994).
4. V. N. Rudenko, Phys. Letters A **223**, 421 (1996).
5. L. Grishchuk, V. Kulagin, V. Rudenko et al., Class.& Quantum Gravity. **22**, 245(2005).

6. A. Meliassinos, *Talk at Marcel Grossman Meeting*, – 12, Paris, July 12–18, 2009; [http:// xxx.lanl.gov/PS, cache/arxiv/pdf/1001/1001.558 v.2.pdf](http://xxx.lanl.gov/PS/cache/arxiv/pdf/1001/1001.558_v2.pdf).
7. C. V. Forrest, *Tidal effects on laser gravitational wave detectors*, Thesis Univ. of Rorester, LIGO Document P09 0000-v1. (2009).
8. R. W. P Drever et al., *Appl. Phys. B* **31**, 97 (1983).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, М.: Наука, 1988, §90, с.333.
10. Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уиллер, *Гравитация*, т.3. М.: Мир, (C. W. Misner, K. S. Torn, and D. A. Wheeler, *Gravitation*, W.H.Freeman QCo San Francisco, 1973).
11. М. Е. Герценштейн, В. И. Пустовойт, *ЖЭТФ* **43**, 605 (1962).
12. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, М.: Наука, 1970 (M. Born and E. Wolf, *Principles of optics*, Pergamon Press, Oxford, 1964).