

Поперечная компрессия двухфотонных волновых пакетов

М. В. Чехова¹⁾, О. А. Шумилкина

МГУ им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, 119991 ГСП 1 Москва, Россия

Поступила в редакцию 19 мая 2010 г.

Рассматривается способ генерации двухфотонных волновых пакетов (бифотонов) с малой шириной пространственной корреляционной функции интенсивности (радиусом корреляции). Предлагается готовить двухфотонные волновые пакеты, неоднородно уширенные по углу за счет спонтанного параметрического рассеяния в неоднородном кристалле. Такие бифотоны не будут дифракционно-ограниченными в том смысле, что их радиус корреляции будет значительно больше обратной ширины пространственного спектра. Однако при распространении такого бифотона в свободном пространстве его радиус корреляции будет уменьшаться, и на некотором удалении от кристалла наступит поперечная компрессия – бифотон станет дифракционно-ограниченным.

Одно из фундаментальных свойств двухфотонных волновых пакетов, или бифотонов, – это коррелированность двух фотонов пары в пространстве. Если один из фотонов пары регистрируется в некоторой точке пространства, то второй можно зарегистрировать в сравнительно малой пространственной области, поперечный размер которой можно назвать *радиусом корреляции*. С фундаментальной точки зрения, интересен вопрос о минимальной величине радиуса корреляции. С точки зрения приложений, уменьшение радиуса корреляции бифотона важно для осуществления взаимодействий двухфотонных состояний с единичными квантовыми объектами (молекулами и атомами) [1], реализации двухфотонных процессов в бифотонном поле (квантовая литография) [2], а также некоторых задач квантовой метрологии [3].

В работе предлагается метод генерации двухфотонных волновых пакетов с малым радиусом корреляции. Идея метода заключается в том, чтобы сначала приготовить бифотон с широким угловым спектром за счет параметрического рассеяния в кристалле с пространственной неоднородностью определенного вида, а затем осуществить компрессию такого бифотона за счет его распространения в свободном пространстве.

Задача о генерации бифотонов с малым радиусом корреляции аналогична задаче о генерации бифотонов с малым временем корреляции [4–6], однако в литературе рассматривалась меньше. Наиболее простой способ приготовления таких бифотонов – это спонтанное параметрическое рассеяние (СПР) в очень коротком однородном кристалле [7]. При этом радиус корреляции определяется обратной шириной углового спектра бифотонного поля, которая велика

в силу малости длины кристалла. Однако этот способ неперспективен из-за низкой скорости генерации фотонных пар в коротком кристалле. Так как малость радиуса корреляции неизбежно означает большую ширину углового спектра, следует обратиться к методам уширения углового спектра без уменьшения длины кристалла. В литературе рассматривалось использование кристаллов с аperiodичностью доменной структуры [8], приводящей к уширению как частотного, так и углового спектров СПР. Заметим, что неоднородность периода доменной сверхрешетки – это лишь один из видов пространственной неоднородности кристалла. Изменение по длине кристалла других его параметров, влияющих на выполнение условий фазового синхронизма, – как, например, температуры или величины приложенного внешнего поля, – также приводит к уширению частотного и углового спектров [9]. Тем не менее, широкий угловой спектр не обязательно означает малость радиуса корреляции бифотона – аналогично тому, как световой пучок с большой угловой расходимостью не обязательно фокусируется в пятно малого размера. При уширении углового спектра СПР за счет пространственной неоднородности кристалла амплитуда бифотона приобретает фазу, нелинейно зависящую от угла, что и препятствует достижению малого радиуса корреляции бифотона. Однако, как показано ниже, при определенном характере пространственной неоднородности эта фаза компенсируется просто за счет распространения бифотона в свободном пространстве.

Рассмотрим пространственные свойства бифотона в предположении, что частоты сигнального и холостого фотонов заданы. Вектор состояния бифотона имеет вид [10]

$$|\Psi\rangle = |vac\rangle + c \iint dk_i dk_s F(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) |\mathbf{k}_i\rangle |\mathbf{k}_s\rangle, \quad (1)$$

¹⁾ e-mail: drquantum@hotmail.com

где $F(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s)$ – амплитуда бифотона, то есть амплитуда вероятности того, что сигнальный фотон имеет волновой вектор \mathbf{k}_s , а холостой фотон – волновой вектор \mathbf{k}_i . Коэффициент c , $|c|^2 \ll 1$ определяет долю двухфотонного состояния по отношению к вакууму. Фурье-образ амплитуды $F(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s)$, который можно назвать амплитудой бифотона в координатном представлении,

$$F(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_s) \equiv \iint d\mathbf{k}_i d\mathbf{k}_s F(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) e^{-i\mathbf{k}_i^{\text{out}} \mathbf{r}_i - i\mathbf{k}_s^{\text{out}} \mathbf{r}_s}, \quad (2)$$

определяет амплитуду вероятности зарегистрировать сигнальный фотон с координатой \mathbf{r}_s , а холостой фотон – с координатой \mathbf{r}_i [10]. Индекс “out” обозначает здесь, что значение волнового вектора берется вне кристалла. Квадрат модуля амплитуды бифотона дает глауберовскую корреляционную функцию интенсивности второго порядка, $G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_s) \sim |F(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_s)|^2$, ширину которой по одному из аргументов (например, \mathbf{r}_i) при фиксированном втором (\mathbf{r}_s) можно назвать радиусом корреляции δr_i . При этом $\delta r_i \leq \Delta r_i$, где Δr_i – размер области пространства, где можно обнаружить холостой фотон.

Амплитуда бифотона может быть записана как произведение двух функций, одна из которых определяется пространственным спектром накачки, а вторая – условиями фазового синхронизма в кристалле [11]:

$$F(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) = F_p(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) F_c(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s), \\ E_p(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) = E_p(\mathbf{k}_{i\perp} + \mathbf{k}_{s\perp}), \quad (3)$$

$$F_c(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) = e^{-i\Delta k_z L/2} \int_{-L/2}^{L/2} dz \chi(z) e^{i\Delta k_z z}.$$

Здесь $E_p(\mathbf{k})$ – пространственная спектральная амплитуда накачки (для пространственно-одномодовой накачки – фурье-образ поперечного распределения ее поля в кристалле), $\mathbf{k}_{i\perp}$, $\mathbf{k}_{s\perp}$ – поперечные компоненты волновых векторов сигнального и холостого фотонов, L – длина кристалла, z – координата вдоль волнового вектора накачки, отсчитываемая от центра кристалла, $\chi(z)$ – квадратичная восприимчивость, $\Delta k_z \equiv k_p - k_{iz} - k_{sz}$ – продольная волновая расстройка.

Рассмотрим сначала амплитуду бифотона, генерируемого в однородном кристалле. Если частоты сигнального и холостого фотонов фиксированы, то при заданных условиях эксперимента амплитуда бифотона (3) зависит только от поперечных волновых векторов $\mathbf{k}_{i\perp}$, $\mathbf{k}_{s\perp}$. В общем случае как радиус корреляции, так и ширина пространственного распределения интенсивности сигнального и холостого излучений зависят и от свойств накачки (распределения

$F_p(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s)$), и от условий синхронизма (распределения $F_c(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s)$). Однако если одно из этих распределений значительно уже второго, то зависимости “расцепляются”. Например, если пучок накачки очень широкий, а кристалл короткий, так что выполняется условие $a \gg L |\tan \vartheta_{0i,s}|$ (здесь a – диаметр пучка накачки, а ϑ_{0i} , ϑ_{0s} – центральные углы рассеяния внутри кристалла для холостого и сигнального излучений, обычно противоположные по знаку), то в ближней зоне (сразу после кристалла) $\Delta r_i \approx \Delta r_s \sim a$, а $\delta r_{i,s} \sim L |\tan \vartheta_{0i} - \tan \vartheta_{0s}|$. Подчеркнем, что в ближней зоне фазовый множитель в (3) меняется на ширине линии незначительно. Поэтому радиус корреляции бифотона будет определяться обратной шириной его углового спектра. По аналогии с пучками, такой бифотон можно назвать *дифракционно-ограниченным*. Заметим, что это определение отличается от стандартного определения в классической оптике, по которому дифракционная ограниченность сигнального или холостого пучков по отдельности означает, что $a\vartheta_{i,s} \sim \lambda_{i,s}$.

По мере распространения бифотона от кристалла его амплитуда будет приобретать фазу, нелинейно зависящую от поперечного волнового вектора. Что приводит к формированию устойчивой формы корреляционной функции $G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_s)$ – эффект, аналогичный дифракции. С удалением от кристалла и радиус корреляции, и область локализации будут расти; в дальней зоне $\delta r_{i,s}$ будут определяться диаметром пучка накачки, а $\Delta r_{i,s}$ – длиной кристалла.

Если двухфотонный свет генерируется в кристалле с продольной пространственной неоднородностью, то расстройка Δk_z зависит от z . Похожий эффект возникает, если от z зависит период доменной структуры [5]. При линейной зависимости вектора обратной решетки от z квадратичная восприимчивость меняется вдоль кристалла как

$$\chi(z) = \chi_0 e^{i[K_0 - \alpha z]z}, \quad (4)$$

где K_0 обеспечивает выполнение условий квазисинхронизма первого порядка в центре кристалла, а параметр α характеризует неоднородность (линейный чирп) сверхрешетки.

Пусть СПР происходит в плоскости xz , и $k_{i\perp} \equiv k_{ix}$, $k_{s\perp} \equiv k_{sx}$. Пусть накачка – гауссовский пучок, тогда

$$F_p(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) \propto \exp\{-(k_{ix} + k_{sx})^2 a^2\}, \quad (5)$$

$$F_c(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) \propto \exp\{i(k_{iz} + k_{sz})L/2\} \times \\ \times \int_{-L/2}^{L/2} \exp\{-i\alpha z^2 - i(k_{iz} + k_{sz})z\} dz. \quad (6)$$

Будем считать чирп доменной структуры большим, так что

$$\alpha L^2 \gg \pi^2/4. \quad (7)$$

Это условие означает, что уширение частотно-углового спектра СПР за счет чирпа велико [5]. При этом интегрирование в (6) дает

$$F_c(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) \propto \exp\{i(k'_{iz} + k'_{sz})\frac{L}{2} + \frac{i}{4\alpha}(k'_{iz} + k'_{sz})^2\} \Pi(k'_{iz} + k'_{sz}, -L|\alpha|, L|\alpha|), \quad (8)$$

где мы ввели “прямоугольную функцию”

$$\begin{aligned} \Pi(x, a_1, a_2) &\equiv 1 \quad a_1 \leq x \leq a_2, \\ &\equiv 0 \quad x < a_1, \quad x > a_2, \end{aligned} \quad (9)$$

и определили отстройки от точного синхронизма $\mathbf{k}'_{i,s}$ как $\mathbf{k}_{i,s} = \mathbf{k}_{i,s0} + \mathbf{k}'_{i,s}$. Положим также $a \gg L \tan \vartheta_{0i,s}$; тогда полная амплитуда бифотона $F(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s)$ представляет собой произведение “широкой” функции (8) и “узкой” функции (5). Между отстройками $k'_{i,sx}$ и $k'_{i,sz}$ имеется связь:

$$(k_{i,sx0} + k'_{i,sx})^2 + (k_{i,sz0} + k'_{i,sz})^2 = k_{i,sx0}^2 + k_{i,sz0}^2,$$

$$k_{i,sx0} = t_{i,s} k_{i,sz0}, \quad t_{i,s} \equiv \tan \vartheta_{0i,s}.$$

Запишем эту связь с точностью до второго порядка по $k'_{i,sx}$ (мы считаем, что ширина углового спектра сигнального и холостого полей мала по сравнению с углом рассеяния, так что $k_{i,sx} \gg k'_{i,sx}$):

$$k'_{i,sz} = -t_{i,s} k'_{i,sx} - \frac{1 + t_{i,s}^2}{2k_{i,sz0}} k_{i,sx}^2. \quad (10)$$

С учетом этого, амплитуда бифотона в представлении по волновым векторам запишется как (здесь и далее $\kappa_{i,s} \equiv k'_{i,sx}$)

$$\begin{aligned} F(\kappa_i, \kappa_s) &\propto \\ &\propto \exp\left\{-i\left(\frac{1 + t_i^2}{2k_{iz0}} \kappa_i^2 + \frac{1 + t_s^2}{2k_{sz0}} \kappa_s^2\right)\frac{L}{2} + \frac{i}{4\alpha}(t_i \kappa_i + t_s \kappa_s)^2\right\} \times \\ &\quad \times \exp\{-(\kappa_i + \kappa_s)^2 a^2\} \times \\ &\quad \times \Pi\left(\frac{t_i \kappa_i + t_s \kappa_s + \frac{1 + t_i^2}{2k_{iz0}} \kappa_i^2 + \frac{1 + t_s^2}{2k_{sz0}} \kappa_s^2}{2\alpha}, -\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь опущены линейные по κ_i, κ_s компоненты фазового множителя. Нелинейные (квадратичные) компоненты приводят к тому, что бифотон не является дифракционно-ограниченным.

Форма и ширина углового спектра сигнального и холостого излучений по отдельности будет определяться широкой “прямоугольной” функцией в (11), то есть угловой спектр будет прямоугольным. В пренебрежении малыми квадратичными членами по κ_i, κ_s ширина углового спектра составит $\Delta \vartheta_{i,s} = \lambda_{i,s} L \alpha / |\pi(t_i - t_s)|$, что примерно в αL^2 раз больше, чем ширина углового спектра однородного кристалла. Угловая ширина корреляционной функции, напротив, будет определяться шириной “узкого” гауссовского распределения в (11) и составит $\delta \vartheta_{i,s} = \lambda_{i,s} / 4\pi a$, как и для однородного кристалла.

Амплитуду бифотона в координатном представлении в ближней зоне можно найти по формуле (2), где, так как геометрия одномерная, а частоты сигнального и холостого фотонов фиксированы, интегрирование будет вестись только по переменным κ_i, κ_s с учетом связи (10). Из-за нелинейной фазы, входящей в (11), ширина пространственной КФ – радиус корреляции – не будет, как можно было бы ожидать, в αL^2 меньше, чем в однородном кристалле. Более того, радиус корреляции на выходе из кристалла при наличии неоднородности оказывается в точности таким же, как на выходе однородного кристалла. При этом в данном случае условие (7) и условие $a \gg L t_{i,s}$ не требуются. В самом деле, рассмотрим амплитуду бифотона в представлении волновых векторов в виде произведения (5) и (6). С учетом разложения по малым отстройкам и условия (10) в пренебрежении вторым слагаемым

$$\begin{aligned} F(\kappa_i, \kappa_s) &\propto \exp\{-(\kappa_i + \kappa_s)^2 a^2\} \times \\ &\quad \times \int_{-L/2}^{L/2} \exp\left\{-i\alpha z^2 + i(t_i \kappa_i + t_s \kappa_s)\left(z - \frac{L}{2}\right)\right\} dz. \end{aligned} \quad (12)$$

Амплитуда бифотона в координатном представлении (см. (2)) будет фурье-образом (12). Переходя к координатам $\kappa_{\pm} \equiv (\kappa_i \pm \kappa_s) / \sqrt{2}$, проводя сначала интегрирование (12) по этим координатам, а затем по z , получим

$$\begin{aligned} F(x_i, x_s) &\propto \exp\left\{-i\alpha \left[\frac{x_i - x_s}{t_i - t_s} + \frac{L}{2}\right]^2\right\} \times \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{(x_s t_i - x_i t_s)^2}{4a^2(t_i - t_s)^2}\right\} \Pi(x_i - x_s, 0, L[t_i - t_s]). \end{aligned} \quad (13)$$

Фазовый множитель в (13) не влияет на пространственную КФ, которая, таким образом, определяется произведением гауссовской и прямоугольной функциями. Эти функции от α не зависят и оказываются

такими же, как в однородном кристалле. В частности, в случае $a \gg Lt_{i,s}$ радиус корреляции в ближней зоне определяется прямоугольной функцией и равен $\delta x = L(t_i - t_s)$, а ширина распределения интенсивности определяется гауссовской функцией и составляет $\Delta x = a$. Однако фазовый множитель в (12) приводит к тому, что амплитуда фурье-образа $F(x_i, x_s)$, $|F(\kappa_i, \kappa_s)|$ уширена в αL^2 раз по сравнению со случаем однородного кристалла.

При удалении от кристалла амплитуда бифотона $F(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s)$ будет за счет распространения приобретать фазовый множитель $\exp\{-i\mathbf{k}_i^{\text{out}}\mathbf{r}_i - i\mathbf{k}_s^{\text{out}}\mathbf{r}_s\}$. В рассматриваемом двумерном случае он сведется к выражению $\exp\{-ik_{ix}x_i - ik_{sx}x_s - ik_{iz}^{\text{out}}z_i - ik_{sz}^{\text{out}}z_s\}$. Оставляя здесь лишь малые отстройки волновых векторов (так как постоянные величины k_{i0}, k_{s0} не будут влиять на амплитуду бифотона) и учитывая связь (10), получим, что если холостой и сигнальный фотоны регистрируются на расстояниях z_i, z_s от кристалла, соответственно, то амплитуда бифотона равна

$$F\left(\kappa_i, \kappa_s, \frac{L}{2} + z_i, \frac{L}{2} + z_s\right) = F\left(\kappa_i, \kappa_s, \frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right) \times \exp\left\{-i\kappa_i(x_i - t_i^{\text{out}}z_i) - i\kappa_s(x_s - t_s^{\text{out}}z_s) + i\frac{1 + t_i^{\text{out}2}}{2k_{iz0}^{\text{out}}}\kappa_i^2 z_i + i\frac{1 + t_s^{\text{out}2}}{2k_{sz0}^{\text{out}}}\kappa_s^2 z_s\right\}. \quad (14)$$

Здесь, как и выше, обозначение $t_{i,s}^{\text{out}}$ показывает, что значения тангенсов берутся вне кристалла. Квадратичные по κ_i, κ_s слагаемые в фазе (14) могут компенсировать нелинейную фазу в (11), если знак чирпа α отрицательный. Выпишем условие компенсации:

$$\frac{1 + t_i^{\text{out}2}}{2k_{iz0}^{\text{out}}}\kappa_i^2 \left(z_i - \frac{L}{2}\right) + \frac{1 + t_s^{\text{out}2}}{2k_{sz0}^{\text{out}}}\kappa_s^2 \left(z_s - \frac{L}{2}\right) = -\frac{1}{4\alpha}(t_i\kappa_i + t_s\kappa_s)^2. \quad (15)$$

При условии $a \gg Lt_{i,s}$ в амплитуде бифотона (12) гауссовская часть представляет собой очень узкую функцию, что приводит к связи $\kappa_i = -\kappa_s$. При этом условие (15) выполнимо для некоторых значений z_i, z_s , при которых и реализуется пространственная компрессия двухфотонного волнового пакета. В точке компрессии нелинейная фаза в (11) скомпенсирована (с точностью до квадратичных слагаемых), и бифотон становится дифракционно-ограниченным. При этом его радиус корреляции равен $\delta x_0 = \pi(t_i - t_s)/L\alpha$, что в $\alpha L^2/\pi$ меньше, чем на выходе из кристалла.

Таким образом, при $\alpha < 0$ с удалением от кристалла радиус корреляции бифотона будет уменьшаться, достигая минимального значения в точке “компрессии”. Далее он будет снова увеличиваться. Такое поведение радиуса корреляции напоминает фокусировку пучка после линзы. Заметим, что ширина пространственного распределения интенсивности сигнального и холостого излучений по отдельности с удалением от кристалла будет только увеличиваться. При $\alpha > 0$ как ширина распределения интенсивности сигнального и холостого излучений, так и радиус корреляции с удалением от кристалла будут монотонно расти.

Ниже приведены результаты численного расчета эволюции двухфотонного волнового пакета при его распространении от кристалла. В качестве конкретного примера рассмотрен кристалл ниобата лития длиной 2.5 мм, в котором имеется аperiodическая доменная решетка с параметрами $\alpha = -1810 \text{ см}^{-1}$, $\Lambda_0 \equiv -1/K_0 = 6.94 \text{ мкм}$, что означает изменение периода доменной структуры от 6.77 до 7.12 мкм. При этом величина αL^2 составляет 113, и соотношение (7) выполняется. Длина волны накачки равна 458 нм. При ориентации волнового вектора накачки перпендикулярно оптической оси обеспечивается условие частотно-вырожденного неколлинеарного квазисинхронизма первого типа (ооe) с центральными углами рассеяния $\vartheta_{0i} = \vartheta_{0s} = 10^\circ$.

Угловой спектр СПР в таком кристалле, рассчитанный численно, показан на рис.1 сплошной кривой.

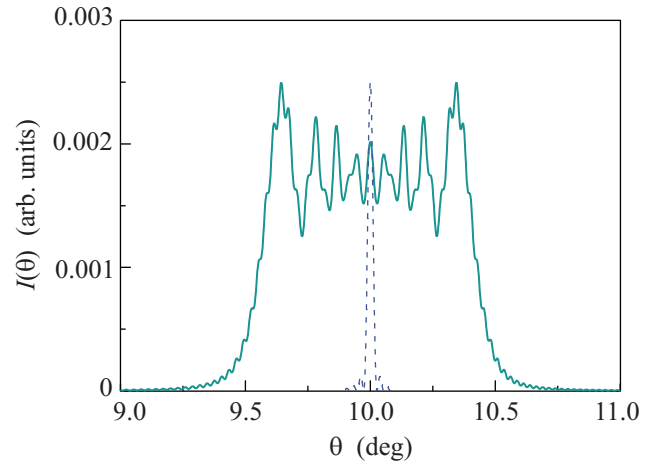


Рис.1. Угловой спектр СПР в аperiodически (сплошная кривая) и периодически (штриховая кривая) поляризованном кристалле

Там же для сравнения штриховой кривой показан угловой спектр СПР кристалла с периодической доменной структурой (с периодом $\Lambda = 6.94 \text{ мкм}$). Видно,

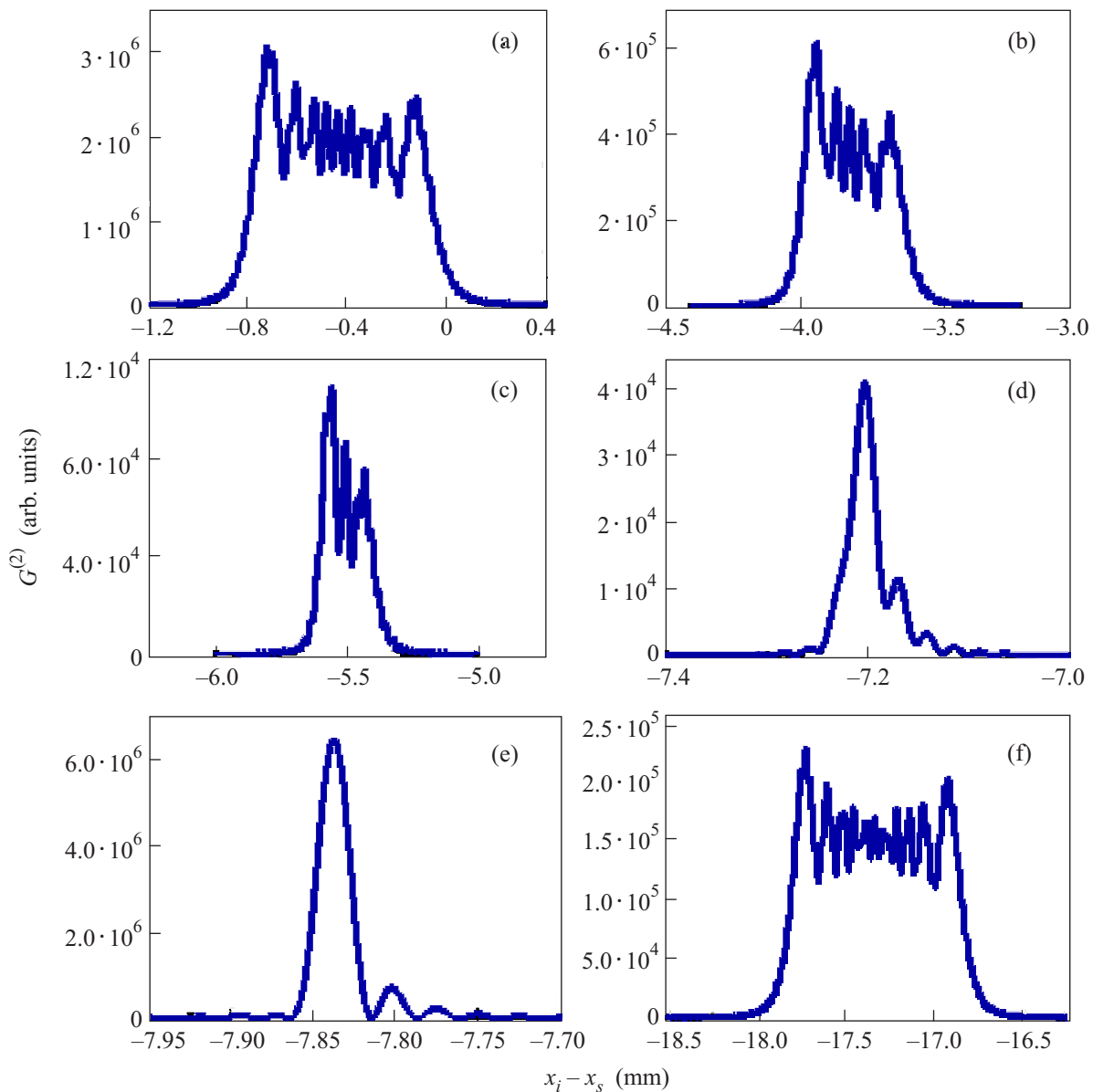


Рис.2. Корреляционная функция интенсивности второго порядка на различных расстояниях от кристалла: (а) – 0 см, (b) – 0.4 см, (с) – 0.6 см, (d) – 0.8 см, (е) – 0.925 см (точка компрессии), (f) – 2 см

что в чирпированном кристалле угловой спектр значительно уширен.

Рис.2 показывает эволюцию пространственной корреляционной функции интенсивности второго порядка при удалении от выходной грани кристалла. Сразу же на выходе из кристалла (рис.2а) КФ такая же, как и в нечирпированном образце. По мере удаления от кристалла КФ сужается (рис.2b–d); в точке компрессии (рис.2е), на расстоянии 0.925 см от кристалла, ширина ее достигает минимума и форма становится похожей на функцию “sinc”. При дальнейшем увеличении расстояния от кристалла (рис.2f) ширина КФ снова растёт.

Зависимость ширины КФ на полувысоте (радиуса корреляции) от суммы координат $z_i + z_s$ показана на рис.3. Видно, что в точке компрессии ширина КФ уменьшается почти на порядок. Интересно, что условие компрессии определяется не величинами z_i и z_s по отдельности, а их суммой.

Таким образом, при СПР в кристалле с линейным чирпом доменной структуры (линейно меняющимся по длине вектором обратной решетки) генерируется двухфотонный свет с неоднородно уширенным угловым спектром. В ближней зоне (сразу после кристалла) и распределение интенсивности, и пространственная КФ оказываются такими же, как и в нечирпи-

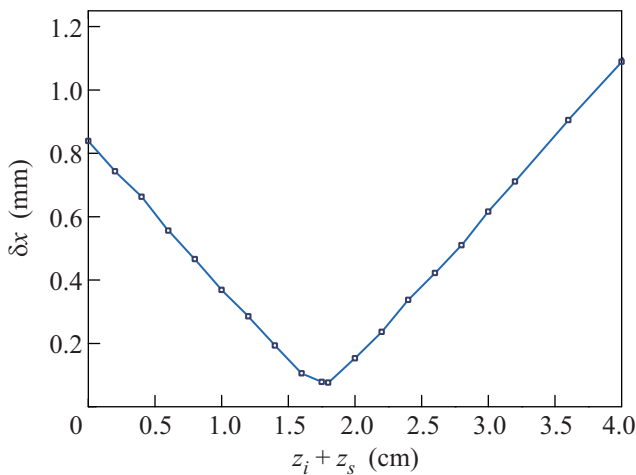


Рис.3. Зависимость радиуса корреляции от суммарного расстояния до кристалла от точек регистрации сигнального и холостого фотонов

рованном (периодически поляризованном) кристалле. Это означает, что бифотон на выходе из кристалла не является дифракционно-ограниченным: его радиус корреляции значительно превышает обратную ширину пространственного спектра. При распространении двухфотонного света от образца с отрицательным знаком чирпа происходит “фокусировка”, или “компрессия”, КФ, и на некотором расстоянии от кристалла бифотон становится дифракционно-ограниченным.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты # 08-02-00555, 08-02-00741, # 10-02-00202) и Федерального агентства по науке и инновациям (Роснаука), Госконтракт 02.740.11.0223.

1. B. Dayan, A. Pe'er, A. Friesem, and Y. Silberberg, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 023005 (2004).
2. M. D'Angelo, M. V. Chekhova, and Y. H. Shih, *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 013602-1 (2001).
3. A. Valencia, G. Scarcelli, and Y. Shih, *Appl. Phys. Lett.* **85**, 13 (2004).
4. S. E. Harris, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 063602 (2007).
5. Г. Х. Китаева, М. В. Чехова, О. А. Шумилкина, *Письма в ЖЭТФ* **90**, 190 (2009).
6. G. Brida, M. V. Chekhova, I. P. Degiovanni et al., *Phys. Rev. Lett.* **103**, 193602 (2009).
7. J. Howell, R. Bennink, S. Bentley, and R. Boyd, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 210403 (2004).
8. M. Nasr, S. Carrasco, B. Saleh et al., *Phys. Rev. Lett.* **100**, 183601 (2008).
9. Д. А. Калашников, К. Г. Катамадзе, С. П. Кулик, *Письма в ЖЭТФ* **89**, 264 (2009).
10. A. V. Belinsky and D. N. Klyshko, *Laser Physics* **4**, 663 (1994).
11. A. V. Burlakov, M. V. Chekhova, D. N. Klyshko et al., *Phys. Rev. A* **56**, 3214 (1997).