

Оптимизация протокола статистического восстановления поляризационных кубитов

Ю. И. Богданов, С. П. Кулик⁺, Е. В. Морева^{*∇}, И. В. Тихонов⁺, А. К. Гавриченко

Физико-технологический институт РАН, 117218 Москва, Россия

⁺ Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 119992 Москва, Россия

^{*} Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, 115409 Москва, Россия

[∇] Международный учебно-научный лазерный центр МГУ им. М.В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 28 апреля 2010 г.

Предложен операциональный метод оценки эффективности протоколов статистического восстановления квантовых состояний с дискретными переменными. Метод основан на оценке качества протокола посредством универсального асимптотического распределения характеристики точности восстановления квантового состояния (fidelity). Для специально сконструированной матрицы измерений вводится число обусловленности, которое принимает минимальное значение для оптимального протокола. Проведена верификация метода посредством численного моделирования и реальных экспериментов, выполненных с поляризационными кубитами. Показано, что оптимальный выбор поляризационного преобразователя позволяет радикально улучшить качество восстановления состояний.

1. Введение. Среди экспериментальных методов квантовой информации и квантовой связи большую роль играют методы статистического восстановления квантовых состояний (СВКС)¹⁾ или квантовая томография. В основе протоколов²⁾ квантовой томографии лежат три “кита”: унитарные преобразования входного состояния, их измерения и математическая обработка полученных данных по определенному алгоритму, вообще говоря, зависящему от двух предыдущих процедур. Пусть, например, входное (чистое) состояние описывается вектором $|\Psi\rangle$, а m унитарных преобразований – операторами \hat{G}_j ($j = 1, \dots, m$), и пусть осуществляется проекционное измерение на фиксированное состояние $|\Psi_0\rangle$. В результате получаем набор из m вероятностей $P_j = |\langle \varphi_j | \Psi \rangle|^2$, где $\langle \varphi_j | = \langle \Psi_0 | \hat{G}_j$. Входными данными для процедуры математической обработки являются m случайных чисел, k_j – количество событий в схеме регистрации, ожидаемые значения которых пропорциональны вероятностям P_j .

Результаты измерений приближенно задают m условий на компоненты квантового состояния. В гильбертовом пространстве размерности s чистое квантовое состояние задается посредством $2s - 2$ действительных параметров, а смешанное состояние пол-

ного ранга – посредством $s^2 - 1$ действительных параметров. Отсюда следует, что минимальное число проекционных измерений, необходимое для полного определения чистого состояния, составляет $2s - 1$, а для смешанных состояний – s^2 (заметим, что требуется одно дополнительное условие для обеспечения нормировки). Реализация предложенной программы требует наличия достаточного числа копий входного состояния [1].

Подчеркнем, что статистический характер квантовых измерений обуславливает зависимость качества восстановленного состояния от полного числа регистрируемых событий или статистики. Однако в реальных условиях безграничное увеличение статистики не имеет смысла из-за так называемых инструментальных ошибок, вызванных неидеальностью экспериментальной процедуры [2]. Предельное число событий, как и ряд других факторов (полное число измерений, время измерения, удобство реализации и проч.), зависит от выполняемого протокола. Поэтому возникает вопрос об оптимальности выбора того или иного протокола СВКС до начала проведения эксперимента. Фактически речь идет о нахождении критерия оценки эффективности протоколов, который можно использовать при подготовке эксперимента с учетом имеющихся в распоряжении экспериментатора ресурсов. Представляется, что предлагаемый подход окажется эффективным в контексте проблемы оптимизации квантовых измерений, в частности, поляризационных со-

¹⁾ В англоязычной литературе эти процедуры называются quantum state tomography и quantum process tomography.

²⁾ Под протоколом понимается заранее определенная последовательность действий, которая приводит к заданному результату.

стояний, активно обсуждающейся в последнее время [3–6].

В настоящей работе верифицируется подход, основанный на сингулярном разложении специальной матрицы измерений, позволяющий осуществить анализ полноты и адекватности протокола квантовых измерений [7, 8]. Выбран удобный в реализации протокол СВКС поляризационных кубитов на девяти преобразованиях, выполняемых при помощи одной фазовой пластинки, которая последовательно поворачивается с фиксированным шагом. Параметром задачи выступает общее число зарегистрированных событий. Показано, что оптимальный выбор оптической толщины пластинки позволяет радикально снизить число обусловленности в задаче псевдо-инверсии и, в итоге, обеспечить качество восстановления состояния на уровне лучших протоколов СВКС.

2. Описание объекта и метода оптимизации.

2.1. Поляризационные кубиты. Произвольное поляризационное состояние кубита имеет вид

$$|\Psi\rangle = c_1|H\rangle + c_2|V\rangle \equiv \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где базисные векторы представляются как результат действия на вакуум операторов рождения в горизонтальной и вертикальной поляризационных модах

$$|H\rangle = a^\dagger|vac\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |V\rangle = b^\dagger|vac\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При этом коммутатор $[a, b] = 0$, а комплексные амплитуды c_i связаны условием нормировки $\sum_{i=1}^2 |c_i|^2 = 1$. Удобной параметризацией состояния (1) служит формула, допускающая визуализацию состояний на сфере Пуанкаре–Блоха [9]:

$$|\Psi\rangle = \cos(\theta/2)|H\rangle + \exp\{i\varphi\} \sin(\theta/2)|V\rangle, \\ \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (2)$$

Под восстановлением состояния кубита (1), (2) понимается процедура оценки амплитуд c_i из результатов эксперимента – как численного (при моделировании), так и физического. Среди известных на сегодняшний день протоколов СВКС кубитов отметим протоколы $R4$ [3] и $J4$ [6, 10]. В первом протоколе проецирование исходного состояния кубита осуществляется на четыре состояния, симметрично расположенные на сфере Пуанкаре–Блоха³⁾. Соответствующие

³⁾ В работах [6, 10] рассматривается обобщение этого протокола на случай проекций, определяемых центрами граней правильных многогранников.

векторы Стокса ортогональны к граням вписанного в сферу правильного тетраэдра. Во втором протоколе исходный кубит проецируется на четыре состояния в базисе Стокса: $|H\rangle, |V\rangle, |45^\circ\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\{|H\rangle + |V\rangle\}$ и $|R\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\{|H\rangle + i|V\rangle\}$. Оба эти протокола обеспечивают довольно высокую точность восстановления [6]. Физически они осуществляются при помощи пары фазовых пластинок (например, четверть- и полуволновой) и поляризатора. Третий протокол ($B9$), реализуемый при помощи одной фазовой пластинки и поляризатора, составляет предмет обсуждения настоящей работы. Измерения проводятся для каждой из 9 ориентаций пластинки (относительно вертикали) с шагом 20° . Заметим, что если в первых двух протоколах состояния, на которые осуществляется проецирование, фиксированы, то в последнем они зависят от параметров пластинки – ее оптической толщины $\delta = \pi h \Delta n / \lambda$ и угла ориентации α относительно вертикали (Δn – двупреломление материала пластинки на данной длине волны λ , h – ее геометрическая толщина). Параметры этого протокола могут быть выбраны, исходя из задач исследования, ограниченности ресурсов или соображений оптимальности (см. ниже).

2.2. Потери точности и число обусловленности. Вероятность обнаружить квантовую систему в состоянии $|\varphi_j\rangle$ при условии, что она была приготовлена в состоянии $|\Psi\rangle$, записывается в виде $P_j = |\langle\varphi_j|\Psi\rangle|^2$. Согласно принципу дополнительности Бора, различные проекционные измерения образуют совокупность взаимно-дополнительных измерений, матричное представление которых описывает протокол квантовых измерений:

$$M_j = X_{jl}c_l \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

По повторяющемуся индексу l в (3) предполагается суммирование. Такой протокол в общем виде задается m проекциями квантового состояния, поэтому имеет m строк. M_j – это амплитуда вероятности j -й проекции, а вероятности соответствующих измерений задаются квадратами модулей амплитуд:

$$P_j = |M_j|^2. \quad (4)$$

Матрица с компонентами X_{jl} , имеющая m строк и s столбцов, называется *аппаратной матрицей* протокола квантовых измерений. В экспериментах, связанных с регистрацией фотонов, элементарным событием является возникновение/учет импульса на выходе счетного фотоприемника и (4) описывает относительную интенсивность различных измеряемых про-

екций. В общем случае смешанного состояния с матрицей плотности ρ соответствующая интенсивность регистрации событий (ожидаемое число отсчетов в единицу времени), отвечающая j -й строке протокола, есть $\lambda_j = \text{tr}(\Lambda_j \rho)$, где $\Lambda_j = X_j^+ X_j$ – оператор интенсивности квантового процесса, а X_j – это j -я строка аппаратной матрицы X . Традиционное условие нормировки $\text{tr}(\rho) = 1$ здесь заменяется условием $\sum_{j=1}^m \lambda_j t_j = n$, где n – суммарное по всем строкам протокола ожидаемое число событий и t_j – время экспозиции для j -го измерения (строки).

Каждой строке X_j ($j = 1, \dots, m$) длины s сопоставим строку длины s^2 , которая является тензорным произведением $(X_j^* \otimes X_j)$ строки X_j и комплексно сопряженной строки X_j^* . Припишем каждой такой строке B_j вес, определяемый соответствующим временем экспозиции t_j : $B_j = t_j \cdot X_j^* \otimes X_j$. Составим из таких строк матрицу B размерности $m \times s^2$, которую будем называть *матрицей измерений* для томографического протокола. Будем предполагать, что $m \geq s^2$. Теперь все результаты протокола могут быть компактно записаны в матричном виде:

$$T = B\rho, \tag{5}$$

где ρ – матрица плотности, записанная в форме одного столбца: второй столбец исходной матрицы плотности расположен ниже первого и т.д. Будем использовать то же обозначение ρ для нового объекта. Вектор-столбец T длины m служит для записи числа регистрируемых событий. Если ρ – точная теоретическая матрица плотности, то элементы столбца T отвечают ожидаемому числу событий, которые будут зарегистрированы. Алгоритм решения уравнения (6) удобно сформулировать в терминах сингулярного разложения матриц (singular value decomposition – *svd*) [11]. *Svd*-разложение дает основу для решения обратной задачи посредством так называемой псевдоинверсии или обращения Мура – Пенроуза [12] – общего инструмента прикладной математики, позволяющего решать обратные задачи. Представим матрицу B в виде *svd*-разложения: $B = USV^+$, где U и V – унитарные матрицы с размерностями $n \times m$ и $s^2 \times s^2$, соответственно, а S – диагональная неотрицательно определенная матрица ($m \times s^2$), диагональные элементы которой и называют сингулярными значениями. Введем новые переменные: вместо независимой переменной-столбца ρ будем рассматривать унитарно связанную с ней переменную f , которую назовем *столбцом факторов* $f = V^+ \rho$. Аналогично, вместо исходного столбца измерений T будем рассматривать унитарно связанный с ним стол-

бец Q , который назовем *характеристическим столбцом* $Q = U^+ T$. В новых обозначениях рассматриваемая система элементарна, поскольку S – диагональная матрица

$$Sf = Q. \tag{6}$$

Метод псевдоинверсии обеспечивает приближенное решение (нулевое приближение) для оцениваемых параметров квантового состояния. Оптимизация параметров в смысле поиска наиболее близких к параметрам точного состояния обеспечивается посредством решения уравнения, возникающего в рамках метода максимального правдоподобия [2]. Кроме того, метод псевдоинверсии предполагает введение так называемого числа обусловленности K , определяемого как отношение между максимальным и минимальным сингулярными значениями:

$$K = b_{\max}/b_{\min}. \tag{7}$$

Физический смысл числа K определяется условием полноты томографического протокола: если хотя бы одно из сингулярных значений b_j окажется равным нулю, то $K \rightarrow \infty$, система (6) не будет иметь единственного решения, и квантовое состояние, в общем случае, окажется неопределенным. Следовательно, чем меньше K , тем лучше протокол. Идеальной ситуации отвечало бы равномерное распределение сингулярных собственных значений, когда $K \rightarrow 1$, однако в реальных физических моделях всегда $K > 1$ [13]. Использование числа обусловленности (7) в качестве “меры качества” протокола было апробировано в работе [8] для пар поляризационных кубитов (куквартов).

Подчеркнем, что вектор состояния, восстановленный методом максимального правдоподобия, определяется конечной статистикой и поэтому флуктуирует. Статистические флуктуации приводят к различию между восстановленным вектором состояния и его точным значением. Знание матрицы полной информации, введенной в [2, 14], позволяет рассматривать произвольные функции от флуктуаций параметров квантового состояния. Одной из важнейших функций такого рода является так называемая вероятность совпадения точного и восстановленного квантового состояния (fidelity) $F = (\text{Tr} \sqrt{\rho_0^{1/2} \rho \rho_0^{1/2}})^2$, где ρ_0 и ρ отвечают точной и восстановленной матрицам плотности. На основе метода максимального правдоподобия можно вычислить статистическое распределение F , которое будет справедливо при условии отсутствия инструментальных ошибок [14]. Формально флуктуации F можно учесть, вводя так

называемые потери точности $1 - F$ – случайную величину, асимптотическое распределение которой представляет собой неоднородное χ^2 -распределение⁴⁾:

$$1 - F = \sum_{j=1}^{j_{\max}} d_j \xi_j^2, \quad (8)$$

где ξ_j – случайная величина с нулевым средним значением и единичной дисперсией, а параметры d_j извлекаются из полной матрицы информации [15] и оказываются обратно пропорциональными общему числу зарегистрированных событий n , то есть $d_j \sim 1/n$ при $j_{\max} = 2s - 2$ для чистых состояний и $j_{\max} = s^2 - 1$ для смешанных состояний полного ранга.

В качестве параметра, характеризующего качество протокола квантовых измерений, из (8) удобно ввести величину, которая не зависит от объема выборки n :

$$L = n \langle 1 - F \rangle = n \sum_{j=1}^{j_{\max}} d_j. \quad (9)$$

Значение введенного параметра (9), в отличие от числа обусловленности K , зависит от восстанавливаемого состояния, то есть $L = L(\theta, \varphi)$. Использование соотношения (9), а также параметра (7) лежит в основе экспериментов, рассмотренных ниже.

2.3. Численное моделирование. На рис.1 показаны расчетные зависимости числа обусловленности K

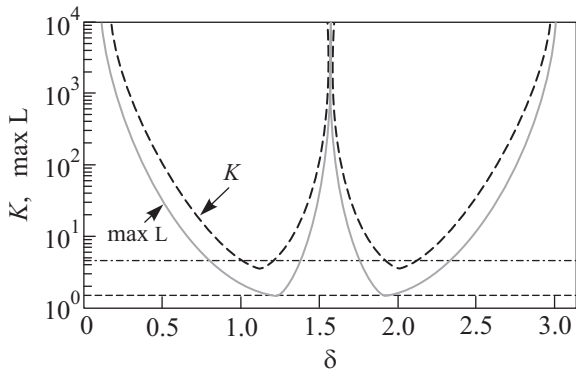


Рис.1. Расчетные зависимости числа обусловленности K и максимальных потерь на сфере Пуанкаре–Блоха $\max L$ от оптической толщины δ фазовой пластинки для протокола $B9$. Пунктирной линией показано значение $\max L$ для протокола $R4$, штрихпунктирной – для протокола $J4$

и максимальных потерь на сфере Пуанкаре–Блоха $\max L$ от оптической толщины δ фазовой пластинки

для изучаемого в настоящей работе протокола $B9$. Зависимости имеют периодический характер с периодом π . Плохая обусловленность имеет место при $\delta = 0, \pi/2, \pi$. В этих точках обе рассматриваемые величины K и L обращаются в бесконечность.

Оптимальным по параметру потерь назовем такой протокол, в котором максимальные по сфере Пуанкаре–Блоха потери принимают минимальное значение (принцип минимакса). Оптимум достигается в точках $\delta \approx 0.391\pi, 0.609\pi$ и составляет величину $L_{\text{opt}} = \min_{\delta, \theta, \varphi} (\max L) \approx 1.47$. Соответствующие потери несколько ниже по сравнению с протоколом $R4$, для которого $\max L = 1.5$ и значительно ниже по сравнению с протоколом $J4$, для которого $\max L \approx 4.52$.

Оптимальное (минимальное) число обусловленности для протокола $B9$ составляет примерно $K_{\min} \approx 1.85$ и достигается в точках $\delta \approx 0.356\pi, 0.644\pi$. Протокол $R4$ имеет более низкое число обусловленности ($K_{R4} = \sqrt{3} \approx 1.73$), а протокол $J4$ – более высокое ($K_{J4} \approx 3.23$).

Физические эксперименты проводились с тремя фазовыми пластинками следующих толщин⁵⁾: $h_1 = 312.7$ мкм ($\delta \approx 0.713\pi, \max L \approx 3.12, K \approx 2.7$); $h_2 = 824.4$ мкм ($\delta \approx 0.515\pi, \max L \approx 64.2, K \approx 14.9$); $h_3 = 358$ мкм ($\delta \approx 0.961\pi, \max L \approx 8611, K \approx 183.9$).

Представленные результаты расчетов показывают, что наилучшей по потерям и числу обусловленности является первая фазовая пластинка, вторая характеризуется завышенными значениями этих параметров, а у третьей рассматриваемые величины являются экстремально высокими. Для этой пластины потери могут превышать оптимальные практически на четыре порядка, что говорит о возможном низком качестве статистического восстановления квантовых состояний. Представленные априорные оценки хорошо подтверждаются результатами физических экспериментов, рассмотренными в следующем разделе.

На рис.2 построены развертки сферы и показаны семейства состояний, на которые проецируется исходный кубит для каждой из выбранных фазовых пластинок. Мы перешли от стандартного представления (3) к более наглядному графическому представлению: если $\varphi > \pi$, то делается преобразование $\varphi = \varphi - \pi, \theta = 2\pi - \theta$, которое оставляет состояние неизменным с точностью до несущественного знака.

Три замкнутые линии (сплошная, штрихпунктирная и штриховая) описывают полные

⁴⁾ При $d_j = 1$ распределение (9) переходит в обычное χ^2 -распределение.

⁵⁾ В реальном эксперименте выбор пластинок ограничен их наличием.

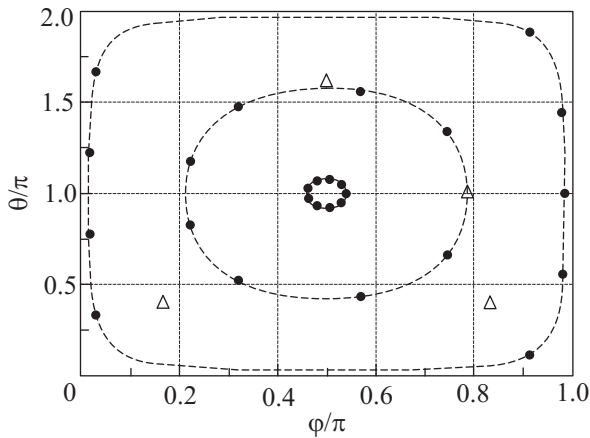


Рис.2. Развертки сферы Пуанкаре – Блоха. Показаны семейства состояний, на которые проецируется исходный кубит для каждой из выбранных фазовых пластинок: 357.9 мкм – сплошная линия, 824.4 мкм – штриховая, 312.7 мкм – штрих-пунктирная. Светлые треугольники – состояния, на которые осуществляется проецирование в симметричном протоколе R_4

преобразования⁶⁾, кружки обозначают фиксированные состояния по протоколу с шагом 20° . Видно, что траектория сильно зависит от толщины пластинки. Так, штриховая линия, соответствующая пластинке с толщиной 824.4 мкм ($\delta \approx 0.515\pi$), практически охватывает сферу Пуанкаре – Блоха по меридиану. Сплошная линия, задающая преобразования пластинкой 357.9 мкм ($\delta \approx 0.961\pi$), сосредоточена около полюса сферы. Светлые треугольники – состояния, на которые осуществляется проецирование в симметричном протоколе R_4 . Из рис.2 следует, что траектория, отвечающая преобразованию, выполняемому пластинкой 312.7 мкм, расположена ближе всего к этим точкам. Этот результат также прямо следует из факта, что данной пластинке соответствует минимальное из трех пластинок значение числа обусловленности K .

Исходя из (9), можно смоделировать процесс восстановления произвольного состояния кубита. Введем случайную величину $z = -\lg(1 - F)$, определяющую число девяток в десятичной записи параметра F (например, $z = 3$ соответствует $F = 0.999$). На рис.3 представлены плотности распределений $P(z)$ для трех рассматриваемых фазовых пластинок и одного из квантовых состояний, восстановление которых проводилось в эксперименте. Рассматриваемые состояния получались при повороте “задающей” фазовой пластинки на угол $\phi_0 = 0^\circ$, $\phi_2 = 30^\circ$ и $\phi_3 = 45^\circ$

⁶⁾ Если бы шаг поворота стремился к нулю, а число измерений – к бесконечности.

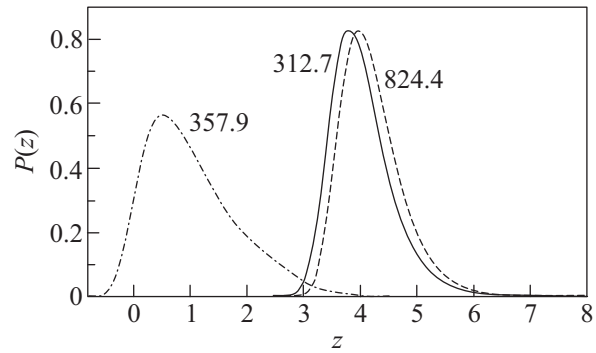


Рис.3. Плотности распределений $P(z)$ для трех фазовых пластинок и восстанавливаемого состояния $|\Psi_2\rangle = (0.345 - 0.496i)|H\rangle - 0.813i|V\rangle$

(см. следующий раздел): $|\Psi_1\rangle = |H\rangle$, $|\Psi_2\rangle = (0.345 - 0.469i)|H\rangle - 0.813i|V\rangle$, $|\Psi_3\rangle = 0.345|H\rangle - 0.939i|V\rangle$, соответственно.

Представленные графики отвечают состоянию $|\Psi_2\rangle$ и построены для фиксированного объема выборки $n = 10^4$. Пересчет к любому другому объему выборки осуществляется по простому правилу: увеличение выборки в a раз приводит к сдвигу графика на $\lg(a)$ единиц вправо, уменьшение выборки в a раз приводит к сдвигу графика на $\lg(a)$ единиц влево. Проведенные расчеты, аналогичные представленным рис.3, показали, что пластинка 357.9 мкм наилучшим образом восстанавливает состояние $|\Psi_1\rangle$, но непригодна для $|\Psi_2\rangle$ и $|\Psi_3\rangle$. Это является следствием плохой обусловленности и высоких потерь. Пластинка 824.4 мкм дает существенно заниженное качество для состояния $|\Psi_1\rangle$, но результаты лучше, чем в предыдущем случае. Наконец, пластинка 312.7 мкм для всех состояний показывает неплохие (но необязательно наилучшие) результаты – в этом суть хорошей обусловленности и принципа минимакса.

3. Эксперимент и обсуждение результатов.

Экспериментальная установка показана на рис.4.

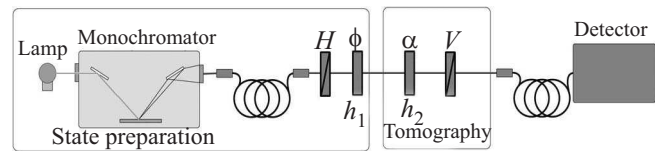


Рис.4. Схема экспериментальной установки. H, V – поляризаторы, h_1 – “задающая” фазовая пластинка, ориентированная под углом ϕ , h_2 – “измерительная” пластинка (312.7 мкм, 357.9 мкм и 824.4 мкм), ориентированная под углом α

Источником света служила лампа с галогенным циклом. Монохроматор МДР-41 выделял излучение с

| Пластика 312.7 мкм | | | Пластика 824.4 мкм | | | Пластика 357.9 мкм | | |
|--|---------|-------|--------------------|---------|-------|--------------------|--------|---------|
| n | F | U | n | F | U | n | F | U |
| Состояние $ \Psi_1\rangle = H\rangle$ | | | | | | | | |
| 46 | 0.9733 | 0.084 | 98 | 0.9812 | 0.848 | | | |
| 100 | 0.9986 | 0.743 | 175 | 0.96782 | 0.721 | 327 | 0.9992 | 0.00009 |
| 151 | 0.9923 | 0.095 | 254 | 0.97632 | 0.712 | | | |
| 288 | 0.9970 | 0.170 | 444 | 0.99137 | 0.771 | | | |
| 587 | 0.9994 | 0.477 | 866 | 0.96219 | 0.381 | | | |
| 1109 | 0.9990 | 0.106 | 1685 | 0.98023 | 0.376 | | | |
| | | | 6795 | 0.9909 | 0.227 | | | |
| | | | 13464 | 0.9957 | 0.243 | | | |
| Состояние $\Psi_2 = (0.345 - 0.469i) H\rangle - 0.813i V\rangle$ | | | | | | | | |
| 161 | 0.9946 | 0.580 | 145 | 0.9929 | 0.386 | 2300 | 0.74 | 0.650 |
| 395 | 0.9987 | 0.724 | 355 | 0.9952 | 0.212 | 23000 | 0.7712 | 0.173 |
| 792 | 0.9997 | 0.860 | 725 | 0.9999 | 0.934 | | | |
| 1621 | 0.9992 | 0.447 | 1485 | 0.99992 | 0.894 | | | |
| 8710 | 0.9993 | 0.030 | 11107 | 0.9996 | 0.022 | | | |
| Состояние $\Psi_3 = 0.345 H\rangle - 0.939i V\rangle$ | | | | | | | | |
| 106 | 0.9906 | 0.637 | 60 | 0.9503 | 0.061 | 3000 | 0.6029 | 0.675 |
| 170 | 0.9918 | 0.535 | 131 | 0.9938 | 0.458 | 4465 | 0.6124 | 0.612 |
| 428 | 0.9870 | 0.100 | 355 | 0.9974 | 0.413 | 48000 | 0.6205 | 0.098 |
| 779 | 0.9951 | 0.196 | 779 | 0.9988 | 0.408 | | | |
| 1628 | 0.99428 | 0.026 | 1488 | 0.9979 | 0.054 | | | |
| 6638 | 0.9984 | 0.017 | 5458 | 0.9995 | 0.077 | | | |
| 9982 | 0.9991 | 0.029 | | | | | | |

центральной длиной волны 1.55 мкм и спектральной шириной ~ 1 нм. Параллельный пучок света формировался при помощи одномодового волокна SMF28, на входе и выходе которого устанавливались микрообъективы F240FC-1550. Поляризационная призма Глана–Томпсона (H), выделяющая горизонтальную поляризацию, и фазовая пластинка h_1 (толщиной 436 мкм), установленная под углом ϕ , служили для задания начального поляризационного состояния, подлежащего последующему восстановлению. Измерительная часть установки включала в себя одну из пластинок h_2 с толщинами 312.7 мкм, 824.4 мкм и 357.9 мкм, ориентированную под углом α , анализатор (призма Глана–Томпсона, пропускающая вертикальную поляризацию) и однофотонный детектор на основе лавинного фотодиода с оптоволоконным входом и внутренним формирователем строба [16]. При фиксированной мощности источника света изменение полного числа регистрируемых событий варьировалось путем изменения частоты запуска детектора при фиксированной длительности строба 10 нс.

Для трех выбранных фазовых пластин проводилось восстановление трех состояний $|\Psi_1\rangle$, $|\Psi_2\rangle$ и $|\Psi_3\rangle$, указанных выше. Протокол измерения состоял в подсчете числа импульсов детектора при девяти ори-

ентациях каждой из трех измерительных пластинок ($\alpha = 0^\circ \div 160^\circ$, шаг $\alpha = 20^\circ$). При этом эксперименты проводились при разных объемах выборки, то есть варьировалось полное число импульсов детектора за фиксированное время.

Основные результаты сведены в таблицу, где приводятся объем выборки n , fidelity F и уровень значимости U . Под уровнем значимости понимается вероятность получения значения параметра F , не превышающего экспериментальное значение. Эта величина характеризует степень согласия между теоретическим распределением и экспериментальными данными. Согласие считается удовлетворительным, если U превышает некоторую заданную величину (например, 0.01).

Наблюдается хорошее согласие между экспериментом и априорными расчетными ожиданиями точности каждого из исследованных протоколов (см. п.2.3.). Явно просматривается тенденция увеличения F с ростом объема выборки с выходом на насыщение, вызванное инструментальными погрешностями.

Заметим, что обсуждаемые в работе критерии оптимизации, основанные на минимизации числа обусловленности и максимальных потерь, неоднозначны. Видно, что минимумы двух кривых на рис.1,

хотя и близки, но соответствуют разным δ . Однако максимальные значения K и L отвечают одним и тем же δ . Таким образом, оба критерия позволяют выделить области параметров протоколов, которые будут заведомо приводить к плохим результатам. Например, большие значения K указывают, что имеется семейство состояний, которое не может быть восстановлено с высокой точностью из-за плохой обусловленности. Однако это не означает, что нет таких состояний, которые будут восстановлены с удовлетворительной точностью. К сожалению, при увеличении размерности пространства восстанавливаемых состояний сканирование значений L становится трудной в вычислительном отношении задачей. Поэтому для оптимизации таких протоколов предлагается использовать параметр K .

4. Заключение. Обсуждаемый в настоящей работе протокол $B9$ удобен с практической точки зрения: он реализуется при помощи лишь одной фазовой пластинки, ориентация которой принимает ряд последовательных дискретных значений. Кроме того, оптимальный выбор параметров фазовой пластинки позволяет обеспечить высокое качество восстановления для произвольного квантового состояния. Отметим, что число измерений в обсуждаемом протоколе легко увеличить, уменьшив шаг поворота пластинки.

Развиваемый в работе подход является общим в отношении информационных квантовых технологий, которые, как правило, предполагают дискретное представление. К дискретизации приводит и учет конечного числа событий/отсчетов, то есть статистики, а также конечной матрицы информации и т.п. Это выгодно отличает данный подход от, например, классического преобразования Радона, где (как и в методе регуляризации Тихонова) эти вопросы явно не оговариваются. Подход легко обобщается на протоколы СВКС любой конечной размерности гильбертова пространства. Предложенные методы для оценки числа обусловленности K и потерь точности L являются удобными количественными показателями протокола. Они позволяют еще до проведения эксперимента, с учетом имеющихся ресурсов, оптимальным образом выбрать время экспозиции, параметры

устройств, общее число регистрируемых событий и т.п. с тем, чтобы обеспечить требуемую точность восстановления квантового состояния.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (Роснаука), Госконтракт 02.740.11.0223, грантов Российского фонда фундаментальных исследований # 10-02-00204а, # 10-02-00414-а и # 08-07-00481а.

1. G. M. D'Ariano, P. Mataloni and M. F. Sacchi, Phys. Rev. A **71**, 062337 (2005).
2. Yu. Bogdanov, M. Chekhova, L. Krivitsky et al., Phys. Rev. A **70**, 042303 (2004).
3. J. Rehacek, B.-G. Englert, and D. Kaszlikowski, Phys. Rev. A **64**, 052312 (2001).
4. A. Ling, A. Lamas-Linares, K. P. Soh, and C. Kurtsiefer, Phys. Rev. A **74**, 022309 (2006).
5. A. Ling, A. Lamas-Linares, and C. Kurtsiefer, quant-ph.0807.0991.
6. M. D. de Burgh, N. K. Langford, A. C. Doherty, and A. Gilchrist, Phys. Rev. A **78**, 052122 (2008).
7. Yu. I. Bogdanov, A. Yu. Bogdanov, S. A. Nuianzin, and A. K. Gavrichenko, Quantum Computers and Computing **8**, 6 (2008); quant-ph. 0812.4808
8. E. V. Moreva, Yu. I. Bogdanov, A. K. Gavrichenko et al., Applied Mathematics & Information Sciences **3**(1), 1 (2009).
9. У. Шерклифф, *Поляризованный свет*, Пер. с англ., М.: Мир, 1965.
10. D. F. James, P. G. Kwiat, W. J. Munro et al., Phys. Rev. A **64**, 052312 (2001).
11. В. В. Воеводин, Вл. В. Воеводин, *Энциклопедия линейной алгебры*, Электронная система ЛИНЕАЛ. СПб.: БХВ-Петербург, 2006.
12. R. Penrose, Proc. of Cambridge Philosophical Soc. **51**, 406 (1955).
13. Yu. Bogdanov, G. Brida, S. Kulik et al., quant-ph. 1002.3477
14. Yu. I. Bogdanov, quant-ph.0312042.
15. Ю. И. Богданов, ЖЭТФ **135**, 1068 (2009).
16. С. Н. Молотков, С. П. Кулик, А. И. Климов, *Устройство для регистрации слабых оптических импульсов*, Патент РФ №2339919, от 15.06.2007.