Письма в ЖЭТФ, том 91, вып. 12, с. 762 – 768

О сверхсветовой групповой скорости и передаче информации

С. Н. Молотков

Институт физики твердого тела РАН, 142432 Черноголовка, Московская обл., Россия

Академия криптографии Российской Федерации

Факультет вычислительной математики и кибернетики, МГУ им. М.В. Ломоносова, 119992 Москва, Россия

Поступила в редакцию 11 мая 2010 г.

Приведены вычисления, которые показывают, что передача информации через среду с частотной дисперсией показателя преломления $n(\omega)$, в которой групповая скорость превышает скорость света в вакууме, всегда происходит *строго со скоростью света в вакууме.* Причем данный результат не зависит от конкретного вида функциональной зависимости $n(\omega)$.

Известно, что групповая скорость света в среде с аномальной дисперсией показателя преломления может превышать скорость света в вакууме [1]. Данный факт известен с работы Зоммерфельда [1]. Сверхсветовая групповая скорость может также наблюдаться в неравновесной оптической среде, где инверсная заселенность поддерживается внешней накачкой [2–9]. Такие системы оказались наиболее удобными для экспериментального исследования [10 – 12]. Проще всего факт превышения групповой скорости над скоростью света в вакууме можно усмотреть, если воспользоваться выражением для показателя преломления в простейшей модели двухуровневой среды (см, например, [13, 14]). Имеем

$$n(\omega) = 1 + \frac{\pi e^2 f}{m\omega_0} \cdot \frac{N_1 - N_2}{\omega_0 - \omega - i\beta}, \qquad (1)$$

где f – сила осциллятора, e, m – заряд и масса электрона, N_1, N_2 – заселенности основного и возбужденного уровней, $\omega_0 = \omega_2 - \omega_1$ – частота перехода между основным и возбужденным уровнями, β – константа затухания, c – скорость света в вакууме.

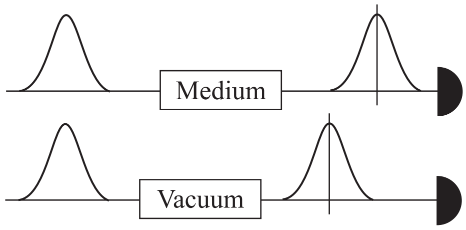
По определению групповой скорости находим

$$v_g(\omega) = \left(\frac{dk(\omega)}{d\omega}\right)^{-1} = \left(\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega n_{\mathrm{Re}}(\omega)}{c}\right)\right)^{-1} = \\ = \frac{c}{\left(n_{\mathrm{Re}}(\omega) + \omega \dfrac{dn_{\mathrm{Re}}(\omega)}{d\omega}\right)}; \qquad (2)$$

здесь $n_{\mathrm{Re}}(\omega)$ – вещественная часть показателя преломления. Далее, вводя обозначения $w = (N_2 - N_1)N$, N – число атомов в единице объема и $\omega_p^2 = \pi N e^2 f/m$, окончательно, при $(\omega_0 - \omega)^2 \gg \beta^2$ получаем

$$v_g(\omega) = c\left(1 - \frac{\omega_p^2 w}{(\omega_0 - \omega)^2}\right)^{-1} > c; \qquad (3)$$

если $w > 0$, имеет место инверсная заселенность уровней ($N_2 > N_1$). Сигнал с достаточно плавной формой огибающей в вакууме $E(t - x/c)$ при прохождении через такую среду на длине L становится равным $E(t - L/v_g(\omega_c))$, где групповая скорость вычисляется на несущей (центральной) частоте сигнала [15]. Неформально такое поведение сигнала означает, что вершина огибающей сигнала, прошедшего через среду, обгоняет вершину сигнала, прошедшего через вакуум. Такое поведение неоднократно было продемонстрировано экспериментально при прохождении света через неравновесную оптическую среду, причем форма сигнала *почти* не меняется [15] (см. рисунок).



Вопрос о невозможности передачи информации быстрее скорости света имеет вполне прагматический оттенок, поскольку он связан с вопросом о стойкости релятивистских систем квантовой криптографии (квантового распределения ключей через открытое пространство) [16]. Применительно к таким системам невозможность передачи информации быстрее скорости света означает невозможность недектируемого подслушивания при передаче криптографических ключей [16].

Сверхсветовая групповая скорость не является чем-то экзотическим. Существует множество примеров физических систем, как правило, находящихся в неустойчивом равновесии, от теории поля до квантовой оптики, в которых групповая скорость элементарных возбуждений превышает скорость света в вакууме [17–21].

Во всех работах, посвященных данной тематике, всегда отмечается, что превышение групповой скорости не противоречит принципу релятивистской причинности, поскольку групповая скорость не является скоростью передачи информации. Аргументация обычно сводится к тому, что правила обхода полюсов в комплексной плоскости в функции отклика среды [22] либо в пропагаторе [20] выбираются так, чтобы удовлетворять соотношениям причинности – Крамерса-Кронига. Строго говоря, соотношения Крамерса-Кронига утверждают лишь то, что отклик *по времени* не может возникнуть раньше причины, вызвавшей его. Из этого условия фактически и выбираются правила обхода полюсов в комплексной плоскости. Однако напрямую, насколько нам известно, не было явно показано, что невозможна передача информации со сверхсветовой скоростью. Точнее, что невозможно передать информацию между пространственно-временными точками, разделенными пространственно-подобным интервалом, между которыми находится среда, где имеет место $v_g(\omega) > c$.

В данной работе будут приведены вычисления, которые показывают, что передача информации через среду, в которой групповая скорость превышает скорость света в вакууме, всегда передается *строго со скоростью света в вакууме*.

По-видимому, впервые вопрос о связи сверхсветовой групповой скорости с релятивистской причинностью обсуждался Зоммерфельдом и вслед за ним Бриллюэном (см. [1]). Было показано, что идеально резкий фронт бесконечно протяженного сигнала (типа ступенчатой θ-функции) распространяется через среду с аномальной дисперсией строго со скоростью света в вакууме. Во многих последующих работах тот факт, что идеально резкий фронт бесконечно протяженного сигнала распространяется через среду со скоростью света в вакууме, интерпретируется как скорость передачи информации.

Такая точка зрения не вполне удовлетворительна. Для передачи информации необходимо иметь алфавит, по крайней мере, состоящий из двух символов (формально 0 и 1). С одним символом в алфавите никакой информации передать нельзя. Неявно подразумевается, что одному из символов соответствует сигнал с идеально резким фронтом и бесконечной протяженностью, а второму, например, отсутствие такого сигнала. Однако приготовление бесконечно протяженного сигнала, пусть даже с резким фронтом, требует бесконечного времени (резкий фронт является атрибутом всего бесконечно протяженного сигнала.). Если приготовление сигнала требует бесконечного времени, то вопрос о скорости передачи информации, строго говоря, теряет смысл.

Для специальной теории относительности принципиальным моментом является процедура синхронизации часов между двумя пространственно-удаленными наблюдателями, которую в принципе можно сделать с любой точностью. Основной постулат специальной теории относительности гласит, что невозможно сделать синхронизацию (передать сигнал) быстрее скорости света в вакууме. Синхронизация часов подразумевает, что в одной пространственно-временной точке можно приготовить сигнал и передать его в другую точку, где он будет зарегистрирован, то есть подразумевается, что сигнал *в точке* может быть приготовлен мгновенно, и в другой *точке* зарегистрирован мгновенно. Причем скорость передачи такого сигнала не может превышать скорость света в вакууме. Поэтому фактически нужно показать, что скорость распространения таких коротких (в пределе с нулевой протяженностью, см. ниже) сигналов никогда не превышает скорость света в вакууме, через какую бы среду они не распространялись.

Более правильная постановка сводится к тому, что 1 отвечает идеально локализованный по времени сигнал, по крайней мере, в пределе по какому-то физическому параметру, а 0 – отсутствие такого сигнала. На приготовление идеально локализованного сигнала в пределе по такому параметру, требуется нулевое время. При синхронизации часов происходит передача информации, то есть фактически используются два символа. Например, 0 отвечает отсутствие сигнала, а 1 – бесконечно короткий сигнал. Когда регистрируется 0 (нет сигнала) второй наблюдатель ничего не делает, а когда приходит 1 (сигнал) запускаются или останавливаются часы. В этом случае вопрос о скорости передачи информации приобретает четкий смысл.

Физическим параметром, отвечающим за степень локализации по времени, является ширина спектра сигнала 2Ω. В частотном представлении функция $E(\omega)$, описывающая сигнал, определена на положительной полуоси, $\omega \in [0,\infty)$. Для таких функций имеются ограничения, диктуемые теоремой Винера-Пэли [23], на скорость убывания на бесконечности их фурье-образа по времени $E(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-i\omega t}E(\omega)d\omega$. Функция $E(t)$ должна удовлетворять условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\ln|E(t)||}{1+t^2}dt<\infty. \qquad (4)$$

Как видно отсюда временные "хвосты" сигнала при $t\to\pm\infty$ не могут спадать экспоненциально быстро, поскольку, если $|E(t)|\propto e^{-|t|}$, то при $t\to\pm\infty$ интеграл логарифмически расходится. Сигнал может спадать не быстрее, чем $|E(t)|\propto e^{-\gamma|t|/\ln|t|}$ ($\gamma>0$ – произвольная постоянная).

Для того чтобы показать, что информация не может передаваться быстрее скорости света в вакууме, необходимо доказать, что при любых наперед заданных δ и ε ($\delta,\varepsilon\to 0$) найдется сигнал, локализованный по времени в окрестности $(t_0-\delta,t_0+\delta)$, такой, что (по поводу предела см. ниже)

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}|E(t,x_0)|^2dt>1-\varepsilon,$$
$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \Omega\delta\to\infty}}\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}|E(t,x_0)|^2dt=1. \qquad (5)$$

После прохождении через среду, расположенную, например, на длине x_1-x_0, в которой групповая скорость превышает скорость света в вакууме, будет иметь место

$$\int_{t_1-\delta}^{t_1+\delta}|E(t,x_1)|^2dt>1-\varepsilon,$$
$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \Omega\delta\to\infty}}\int_{t_1-\delta}^{t_1+\delta}|E(t,x_1)|^2dt=1, \qquad (6)$$
$$\text{если}\quad t_1-t_0\geq(x_1-x_0)/c,$$

$$\int_{t_1-\delta}^{t_1+\delta}|E(t,x_1)|^2dt<\varepsilon,$$
$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \Omega\delta\to\infty}}\int_{t_1-\delta}^{t_1+\delta}|E(t,x_1)|^2dt=0, \qquad (7)$$
$$\text{если}\quad t_1-t_0<(x_1-x_0)/c.$$

Условие (6) означает, что сигнал может быть зарегистрирован в пространственно-временной точке (x_1,t_1), мгновенно, в пределе $\delta,\varepsilon\to 0$, если точки (x_1,t_1) и (x_0,t_0) разделены пространственно-временным интервалом. А условие (7) означает, что сигнал никогда не может быть зарегистрирован в точке (t_1,x_1), если точки (x_1,t_1) и (x_0,t_0) разделены пространственно-подобным интервалом.

Данные условия будут означать невозможность передачи информации быстрее скорости света в вакууме. Далее увидим, что всегда имеет место $t_1-t_0=(x_1-x_0)/c$, то есть точка (x_1,t_1) всегда лежит на ветви светового конуса, выпущенного из точки (x_0,t_0).

Казалось бы, что технически достаточно взять гауссову форму сигнала в частотном представлении $E(\omega)\propto e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\Omega^2}}$ (ω_0 – центральная несущая частота), соответственно, во временном представлении сигнал $E(t)\propto e^{-t^2\Omega^2}$. Далее, пропуская такой сигнал через среду с дисперсией и устремляя ширину частотного спектра бесконечности ($\Omega\to\infty$), необходимо убедиться, можно ли такой сигнал зарегистрировать раньше, чем сигнал, проходящий через вакуум. Такое гауссово приближение для огибающей сигнала очень часто используется в различных задачах квантовой оптики, где оно может быть вполне оправдано. Однако для выяснения принципиальных вопросов оно не является удовлетворительным, поскольку интенсивность сигнала при $t\to\infty$ слишком быстро (экспоненциально) убывает, что противоречит условию (4). Причина кроется в том, что при гауссовой форме сигнала в частотном представлении функция $E(\omega)$ залезает "хвостами", хоть и экспоненциально слабо, в область отрицательных частот. Поэтому "закрыть глаза" на это логическое противоречие уже в исходной постановке задачи нельзя. Данная скрытая логическая неувязка может привести к неправильным выводам, *поскольку уже изначально заложена более сильная локализация сигнала по времени, чем это допустимо математикой.*

Поэтому, чтобы избежать логических противоречий, поступим следующим образом. Выберем функцию $E(\omega)$ в частотном представлении, носитель которой задан в конечной частотной полосе $\mathrm{supp}(E(\omega))\in[\omega_0-\Omega,\omega_0+\Omega]\in[0,\infty)$, где 2Ω – ширина частотной полосы. Для дальнейшего удобно считать, что интенсивность сигнала нормирована на единицу, $\int_0^\infty|E(\omega|^2d\omega=1$. Нужно выбрать $E(\omega)$ таким образом, чтобы сигнал как функция времени $E(t)$ был максимально локализован во временном окне $(t_0-\delta,t_0+\delta)$, то есть

$$\max_{\{E(\omega)\}}\left\{\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}|E(t)|^2dt\right\},\quad\text{при}$$
$$\mathrm{supp}(E(\omega))\in[\omega_0-\Omega,\omega_0+\Omega]\in[0,\infty). \qquad (8)$$

Решение данной вариационной задачи приводит к функциям вытянутого сфероида (prolate spheroidal wave functions) [24–26], хорошо известных в теории информации [27]. Эти функции удовлетворяют следующему интегральному уравнению:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\omega_0-\Omega}^{\omega_0+\Omega}\frac{\sin\delta(\omega-\omega')}{\omega-\omega'}E_n(\omega')d\omega'=\lambda_n(\Omega\delta)E_n(\omega),$$

$$\lambda_0(\Omega\delta)>\lambda_1(\Omega\delta)>...,\quad n=0,1,2...\infty. \tag{9}$$

Функции удовлетворяют также сопутствующему дифференциальному уравнению, если его рассматривать как задачу на собственные значения [25]:

$$(1-\xi^2)\frac{d^2u_n(\xi)}{d\xi^2}-2\xi\frac{du_n(\xi)}{d\xi}+(\lambda_n(\Omega\delta)-\xi^2)u_n(\xi)=0,$$

$$E_n(\omega)=u_n(\frac{\omega}{\Omega\delta}). \tag{10}$$

Функции (8)–(10) обладают замечательными свойствами. Они ортогональны как на отрезке $[t_0-\delta,t_0+\delta]$, так и оси $(-\infty,\infty)$

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}E_m(t)E_n(t)dt=\lambda_n(\Omega\delta)\delta_{m,n},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}E_m(t)E_n(t)dt=\delta_{m,n}, \tag{11}$$

причем для первых $n=2\Omega\delta$ собственные числа $\lambda_n(\Omega\delta)\to 1$ при $\Omega\delta\to\infty$.

Наиболее сильно локализованным является состояние, отвечающее основному с $n=0$, степень локализации во временном окне есть $\lambda_n(\Omega\delta)\ge 1-\frac{4\sqrt{\pi}8^n}{n!}(\Omega\delta)^{n+1/2}e^{-2\Omega\delta}$ при $\Omega\delta\gg 1$. В качестве $E_n(\omega)$ можно взять любую функцию из первых $n<2\Omega\delta$. Сигнал в вакууме может быть представлен как

$$E_n(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0-\Omega}^{\omega_0+\Omega}E_n(\omega)e^{-i(\omega(t-t_0)-\frac{\omega}{c}(x-x_0))}d\omega, \tag{12}$$

где волновой вектор в вакууме связан с частотой как $k(\omega)=\omega/c$. Если сигнал регистрируется в точке на световом конусе $t_0=x_0/c$ во временном окне $(t_0-\delta,t_0+\delta)$, то интенсивность сигнала в этом окне есть

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}|E(t,x_0)|^2dt= \tag{13}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{\omega_0-\Omega}^{\omega_0+\Omega}\int_{\omega_0-\Omega}^{\omega_0+\Omega}E_n(\omega)E_n(\omega')e^{-i(\omega-\omega')(t_0-\frac{x_0}{c}))}\times$$

$$\times\frac{\sin(\delta(\omega-\omega'))}{(\omega-\omega')}d\omega d\omega'=\lambda_n(\Omega\delta)>1-\varepsilon.$$

С учетом нормировки сигнала $\int_{-\infty}^{-\infty}|E(t,x_0)|^2dt=1$, вероятность обнаружить сигнал в точке x_0 вне временного окна $(t_0-\delta,t_0+\delta)$ стремится к нулю, поскольку

$$\left(\int_{-\infty}^{t_0-\delta}+\int_{t_0+\delta}^{\infty}\right)|E(t,x_0)|^2dt<\varepsilon\approx 4\sqrt{\Omega\delta}e^{-2\Omega\delta}; \tag{14}$$

поэтому интеграл в точке x_0 в любой другой интервал времени Δt такой, что $\Delta t\cap(t_0-\delta,t_0+\delta)=\emptyset$

$$\int_{\Delta t}|E(t,x_0)|^2dt\to 0, \tag{15}$$

заведомо, в пределе $\delta\to 0$, $\Omega\delta\to\infty$, равен нулю. Степень локализации сигнала по временном окне $(t_0-\delta,t_0+\delta)$ определяется собственными числами. Собственные числа зависят от безразмерного параметра – произведения ширины спектра сигнала (Ω) на временное окно регистрации (δ). Соотношения (13)–(15) означают, что при любых выбранных сколь угодно малых $(\delta,\varepsilon\to 0)$, всегда можно указать такую ширину частотной полосы[1)] – 2Ω, чтобы сигнал был сколь угодно сильно локализован во временном окне $(t_0-\delta,t_0+\delta)\to 0$ с весом $>1-\varepsilon\to 1$. При заданных δ и ε должно быть $\Omega(\delta,\varepsilon)\ge|\ln(1/\delta)|$, фактически ширина спектра зависит только от δ. Другими словами, степень локализации определяется лишь одним безразмерным параметром $\Omega\delta$. Предел

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \Omega\delta\to\infty}}\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}|E(t,x_0)|^2dt=1 \tag{16}$$

означает существование сигналов, которые могут быть мгновенно приготовлены и зарегистрированы. При помощи таких сигналов возможна синхронизация (в пределе сколь угодно точная по времени и координате) двух наблюдателей в вакууме. Причем можно показать, что соотношения (13)–(15) являются лоренц-инвариантными (см. например, [28]), поскольку (t,x) присутствуют в лоренц-инвариантом виде $(\hat{x}-\hat{x_0})\cdot\hat{p}=(\omega(t-t_0)-\frac{\omega}{c}(x-x_0))$.

Пусть среда занимает объем на отрезке $[x_0,x_1]$. Сигнал в среде на расстоянии x может быть представлен как

$$\tilde{E}_n(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0-\Omega}^{\omega_0+\Omega}\tilde{E}_n(\omega)e^{-i(\omega(t-t_0)-k(\omega)(x-x_0))}d\omega,$$

$$k(\omega)=k_{Re}(\omega)+ik_{Im}(\omega), \tag{17}$$

[1)] При этом центральная несущая частота также сдвигается в более высокие частоты, чтобы было выполнено $[-\Omega+\omega_0,\omega_0+\Omega]\in[0,\infty)$.

где $k(\omega) = \omega/cn(\omega)$ – комплексный волновой вектор. Для неравновесной среды мнимая часть показателя отрицательна, что отвечает усилению сигнала. Полная интенсивность сигнала в точке x_1, которая может быть зарегистрирована за все время измерения в точке x_1 от $(-\infty, \infty)$ равна

$$I(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}_n(t, x_1)|^2 dt =$$

$$= \int_{\omega_0-\Omega}^{\omega_0+\Omega} |\tilde{E}_n(\omega)|^2 e^{i(\tilde{k}(\omega)-\tilde{k^*}(\omega))(x_1-x_0)} d\omega, \qquad (18)$$

где введено обозначение $\tilde{k}(\omega) = \omega/c + k(\omega)$, $\tilde{E}_n(\omega)$ – фурье-компонента прошедшего в среду сигнала (конкретный вид оказывается не важным). Удобно нормировать амплитуду сигнала в конечной точке на корень из полной интенсивности сигнала в этой точке, имеем $\overline{E}_n(\omega) = \tilde{E}_n(\omega)/\sqrt{I(x_1)}$, тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\overline{E}_n(t, x_1)|^2 dt = 1. \qquad (19)$$

Вероятность зарегистрировать сигнал во временном окне $(t_1 - \delta, t_1 + \delta)$ в точке x_1 есть

$$\int_{t_1-\delta}^{t_1+\delta} |\overline{E}_n(t, x_1)|^2 dt = \qquad (20)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0-\Omega}^{\omega_0+\Omega} \int_{\omega_0-\Omega}^{\omega_0+\Omega} \overline{E}_n(\omega) \overline{E}_n(\omega') e^{i(\tilde{k}(\omega)-\tilde{k^*}(\omega'))(x_1-x_0)} \times$$

$$\times e^{-i(\omega-\omega')(t_1-t_0-\frac{x_1-x_0}{c})} \frac{\sin(\delta(\omega-\omega'))}{\omega-\omega'} d\omega d\omega'.$$

Если точки (t_1, x_1) и (t_0, x_0) лежат на ветви одного и того же светового конуса, то

$$t_1 - t_0 - \frac{x_1 - x_0}{c} = 0, \qquad (21)$$

что с учетом (19), (20) и что при $\omega = \omega'$, $\tilde{k}(\omega) - \tilde{k^*}(\omega') = 2\mathrm{Im}k(\omega)$ дает

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \Omega\delta\to\infty}} \int_{t_1-\delta}^{t_1+\delta} |\tilde{E}_n(t, x_1)|^2 dt = \qquad (22)$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \Omega\delta\to\infty}} \int_{\omega_0-\Omega}^{\omega_0+\Omega} \int_{\omega_0-\Omega}^{\omega_0+\Omega} \overline{E}_n(\omega) \overline{E}_n(\omega') \times$$

$$\times e^{i(\tilde{k}(\omega)-\tilde{k^*}(\omega'))(x_1-x_0)} \frac{\sin(\delta(\omega-\omega'))}{\omega-\omega'} d\omega d\omega' =$$

$$= \int_{\omega_0-\Omega}^{\omega_0+\Omega} \overline{E}_n(\omega) \overline{E}_n(\omega) e^{-2\mathrm{Im}(k(\omega))(x_1-x_0)} d\omega = 1.$$

Здесь использовано равенство (см., например, [29])

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \Omega\delta\to\infty}} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\Omega\delta(\xi-\xi'))}{\xi-\xi'} = \delta(\xi-\xi'), \qquad (23)$$

где сделана замена $\omega = \xi\Omega$, $\omega' = \xi'\Omega$.

То есть сигнал может быть зарегистрирован только в пространственно-временной точке (t_1, x_1), которая лежит на той же ветви светового конуса, что и пространственно-временная точка приготовления сигнала (t_0, x_0). Ни в какой другой пространственно-временной точке сигнал не может быть зарегистрирован, поскольку интеграл при любом x' и t' равен нулю (весь интеграл наберется только в окрестности – точки (t_1, x_1)).

Таким образом, принцип релятивистской причинности, запрещающий передачу информации быстрее скорости света, соблюдается. Соответственно невозможно провести синхронизацию часов между пространственно-разделенными наблюдателями быстрее скорости света в вакууме.

Кроме того, заметим, что для предельно локализованных сигналов результат не зависит от конкретного вида зависимости волнового вектора $(k(\omega))$ от частоты. Среда может быть как с затуханием $(\mathrm{Im}(k(\omega)) > 0)$ или неравновесной (инверсной) с усилением $(\mathrm{Im}(k(\omega)) < 0)$, что будет приводить к ослаблению или усилению сигнала на выходе среды $(I(x_1) < I(x_0)$ или $I(x_1) > I(x_0))$, все равно сигнал может быть зарегистрирован только в пространственно-временной точке, связанной с точкой приготовления условием релятивистской причинности (21) – лежащей на одной ветви светового конуса.

Отметим следующий интересный факт, который следует из (20). Невозможность зарегистрировать сигнал за пределами светового конуса (как внутри, так и во вне, когда $t_1 - t_0 - (\frac{x_1-x_0}{c}) \neq 0$), связана с обращением в нуль интеграла за счет быстрых осцилляций фактора $e^{-i(\omega-\omega')(t_1-t_0-\frac{x_1-x_0}{c})}$, так как функции $E_n(\omega)$ определены в (9) без этого фактора. Само математическое определение предельно локализованных функций по времени никак не связано с требованиями специальной теории относительности. Это означает, что требования теории относительности (структура выражения в экспоненте в (20)), являются в определенном смысле внешними по отношению к математическому определению, и вытекающими из физических требований согласованности с экспериментом – мировая линия фотонов является прямой. Собственно фактор в экспоненте представляет собой уравнение мировой линии фотона. Формально, если бы такое наблюдалось в эксперименте, то в экспоненте можно было бы написать любое другое выражение для мировой линии, типа $t_1-t_0 = f(x_0)-f(x_1)$, то есть использовать не группу Лоренца для преобразований пространства-времени (x,t), а какую-то другую группу. При этом сигналы передавались бы по мировой линии $t_1 - t_0 = f(x_0) - f(x_1)$. Но в реальности в природе реализуется группа Лоренца. В этом смысле требования теории относительности являются внешними.

Выше был рассмотрен случай передачи информации при помощи предельно локализованных сигналов. Возможна и другая постановка задачи, когда информация передается при помощи непрерывного во времени сигнала, который формально существует на интервале времени $(-\infty,\infty)$, а информация кодируется в изменяющуюся амплитуду сигнала в разные моменты времени, то есть происходит оцифровка непрерывного сигнала. Такие каналы в классической теории информации известны как каналы с непрерывным временем [27]. В такой постановке требование релятивистской причинности о запрете передачи информации быстрее скорости света в вакууме, также будет соблюдаться. Такая ситуация отвечает пределу $\delta\to\infty$, когда Ω фиксирована, а кодирование сигнала $E(t,x)$ происходит в амплитуды (a_n) функций $E_n(t,x)$ – $E(t,x) = \sum_{n=0}^{2\Omega\delta} a_n E_n(t,x)$.

Кроме того, выше сигнал считался классическим в том смысле, что его интенсивность достаточно велика, чтобы можно было пренебречь квантовыми шумами. При понижении интенсивности сигнала учет квантовых шумов станет принципиально важным, что может привести к новым физическим последствиям.

Например, если интенсивность сигнала (квантового состояния) понижена до уровня одного фотона – сигнал представляет собой однофотонный пакет. При пропускании такого состояния через инверсную среду, инверсность которой поддерживается внешней непрерывной накачкой, в принципе возможна ситуация, когда сигнал на выходе среды будет зарегистрирован раньше по времени, чем сигнал, прошедший со скоростью света. Однако это также не будет означать возможность передачи информации быстрее скорости света. Этот факт тесно связан с фундаментальной теоремой о запрете копирования квантового состояния [30]. Возможно как вынужденное испускание второго фотона в том же состоянии, что и внешний пробный однофотонный пакет, так и спонтанное испускание. Причем из коэффициентов Эйнштейна [13], видно что вероятность вынужденного излучения пропорциональна N_{ph}, а спонтанного – 1. Соответственно, полная вероятность излучения $\propto N_{ph}+1$ (N_{ph} – число внешних пробных фотонов, единица отвечает за вероятность спонтанного излучения). Если $N_{ph} = 1$ – случай однофотонного пакета, то вероятности вынужденного и спонтанного излучения равны. Поэтому в половине случаев из инверсной среды будет испущен фотон в произвольный момент времени, который не имеет никакого отношения к пробному. Последний может быть зарегистрирован в любой момент времени. Факт регистрации данного фотона не связан причинно-следственной связью с моментом приготовления пробного однофотонного пакета, то есть акт регистрации может иметь место в пространственно-подобной области светового конуса, выпущенного из точки (x_0,t_0), в которой приготовлено пробное состояние.

Формально такая ситуация отвечает бинарному каналу связи с вероятностью ошибки 50%, когда регистрируемый на выходе канала сигнал фактически никак на связан с его входом [27]. Вероятность ошибки в 50% является предельной. При этом, как известно, никакую информацию передать нельзя [27, 31]. Это связано с тем, что 50% ошибок уже невозможно исправить, что приводит к невозможности передачи информации (фактически это следствие математических комбинаторных теорем) [27, 31].

Иными словами, в квантовом пределе логически возможна следующая ситуация. Сигнал может регистрироваться за пределами светового конуса, но ошибка при этом должна быть гарантированно равна 50%. В противном случае ошибки можно исправить, вплоть до 50%, посылая параллельно необходимое для исправления ошибок число состояний, и тем самым передать информацию быстрее скорости света.

Из рассуждений видно, что для однофотонного пакета вероятность ошибки регистрации за световым конусом всегда равна 50%, что согласуется с невозможностью передачи информации быстрее скорости света. Однако это требование должно сохраниться и при любом N_{ph}. В чисто классической ситуации, рассмотренной выше, для предельно коротких сигналов все происходит на световом конусе. В квантовом пределе, $N_{ph} = 1$, также нельзя передавать информацию быстрее скорости света в вакууме, однако физическая картина может оказаться несколько иной.

Из приведенных выше качественных соображений видно, что в релятивистской квантовой области, по крайней мере при $N_{ph} = 1$, для обоснования невозможности передачи информации быстрее скорости света в вакууме, приходится прибегать к помощи классической теории информации, фактически к результатам из комбинаторики. Последние, естественно, не "знают" ни про скорость света, ни про квантовую механику. Поэтому вопрос о скорости передачи информации в релятивистской квантовой области может потребовать совсем других подходов. Насколько нам известно, ответы на данные вопросы на сегодняшний день отсутствуют.

Выражаю благодарность коллегам по Академии Криптографии Российской Федерации за постоянную поддержку. Работа частично поддержана проектом Российского фонда фундаментальных исследований # 08-02-00559.

---

1. A. Sommerfeld in L.Brillouin, *Wave Propagation and Group Velosity*, Academic Press, New York, London, 1960; A. Sommerfeld, Ann. Phys. **44**, 177 (1914); L. Brillouin, Ann. Phys. **44**, 203 (1914).
2. C. G. B. Garrett and D. E. McCumber, Phys. Rev. A **1**, 305 (1970).
3. S. Chu and S. Wong, Phys. Rev. Lett. **48**, 738 (1982).
4. A. M. Akulshin, S. Barreiro, and A. Lezama, Phys. Rev. Lett. **83**, 4277 (1999).
5. D. L. Fisher and T. Tajima, Phys. Rev. Lett. **71** 4338 (1993).
6. R. Y. Chiao, Phys. Rev. A **48**, R34 (1993).
7. E. L. Bolda, R. Y. Chiao, and J. C. Garrison, Phys. Rev. A **48**, 3890 (1993).
8. A. M. Steinberg and R. Y. Chiao, Phys. Rev. A **49**, 2970 (1994).
9. V. W. Mitchell and R. Y. Chiao, American J. of Phys. **66**, 14 (1998).
10. L. J. Wang, A. Kuzmich, and A. Dogariu, Nature **406**, 277 (2000).
11. M. D. Stenner, D. J. Gauthier, and M. A. Neifeld, Nature **425**, 695 (2003).
12. K. Kim, H. S. Moon, Ch. Lee et al., Phys. Rev. A **68**, 013810 (2003).
13. R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*, Clarendon Press, Oxford, 1973.
14. B. Segev, P. W. Milonni, J. F. Bab, and R. Y. Chiao, Phys. Rev. A **62**, 022114 (2000).
15. A. Kuzmich, A. Dogariu, L. J. Wang et al., Phys. Rev. Lett. **86**, 3925 (2001).
16. С. Н. Молотков, Д. И. Помозов, Письма в ЖЭТФ **85**, 569 (2007).
17. G. Feinberg, Phys. Rev. **159**, 1089 (1967).
18. А. Ю. Андреев, Д. А. Киржниц, Успехи физических наук **166**, 1135 (1996).
19. Y. Aharonov, B. Reznik, and A. Stern, Phys. Rev. Lett. **81**, 2190 (1998).
20. Y. Aharonov, A. Kumar, and L. Susskind, Phys. Rev. **182**, 1400 (1969).
21. R. Y. Chiao, A. E. Kozhekin, and G. Kurizki, Phys. Rev. Lett. **77**, 1254 (1996).
22. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, т.VIII, Москва, Наука, 1982.
23. Н. Винер, Р. Пэли, *Преобразование Фурье в комплексной области*, М.: Наука, 1964 [N. Wiener and R. Paley, *Fourier Transform in the Complex Domain*, New-York, 1934.].
24. D. Slepian and H. O. Pollak, Bell Syst. Techn. J. **XL**, 40 (1961).
25. W. H. Fuchs, J. of Mathematical Analysis and Appl. **9**, 317 (1964).
26. D. Slepian, J. Math. and Phys. **44**, 99 (1965).
27. Р. Галлагер, *Теория информации и надежная связь*, Советское радио, 1974; R. G. Gallager, *Information Theory and Reliable Communication*, Wiley, New York, 1968.
28. С. Н. Молотков, Письма в ЖЭТФ **74**, 477 (2001).
29. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, вып.1, М.: Добросвет, 2000.
30. W. K. Wooters and W. H. Zurek, Nature. **299**, 802 (1982).
31. C. E. Shannon, Bell Syst. Tech. Jour. **27**, 397; 623 (1948).