Письма в ЖЭТФ, том 51, вып. 9, стр. 440 – 443 *10 мая 1990 г.*

ЭФФЕКТИВНАЯ КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ СИЛЬНО КОРРЕЛИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Н.И.Карчев

Рассматривается модель типа $2D$ Хаббарда в пределе сильного кулоновского отталкивания. Учитывая спиновые флуктуации, получена эффективная калибровочная теория с членом Черна–Саймонса и с фермионами дираковского типа описывающая динамику носителей заряда.

В последние годы, как один из альтернативных механизмов сверхпроводимости [1], активно обсуждается спонтанное нарушение электромагнитной симметрии, индуцированное топологически массивным калибровочным полем [2–9]. Естественно, возникает вопрос о микроскопическом происхождении этих теорий [2,4,6,8]. В данной работе рассматривается модель типа $2D$ Хаббарда в пределе сильного кулоновского отталкивания. Введены бесспиновое заряженное фермионное и спиновое незаряженное бозонное поля описывающие спиновые и зарядовые степени свободы системы. Интегрируя по спиновым полям в приближении среднего поля и учитывая только флуктуации составных калибровочных полей, получена эффективная калибровочная теория типа Черна–Саймонса с дираковскими фермионами. Она описывает динамику носителей заряда.

Исходный гамильтониан модели имеет вид

$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle} [C^+_{i\sigma} C_{j\sigma} + \text{h.c.}] + J_1 \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - \mu \sum_i C^+_{i\sigma} C_{i\sigma} \tag{1}$$

Операторы рождения (уничтожения) $C^+_{i\sigma}(C_{i\sigma})$ $(\sigma = \uparrow, \downarrow)$ спроектированы на подпространство, задаваемое в каждом узле двухмерной квадратной решетки векторами $(|0\rangle_i, |\uparrow\rangle_i, |\downarrow\rangle_i)$. Через $\langle i, j \rangle$ обозначено суммирование по ближайшим соседям, $\langle\langle i, j \rangle\rangle$ – суммирование по ближайшим по диагонали соседям, а $\mathbf{S}_i = \frac{1}{2} C^+_i \vec{\sigma} C_i$, где $\vec{\sigma}$ – матрицы Паули.

Удобно ввести операторы Хаббарда $X^{ab}_i = |a\rangle_i {}_i\langle b|$. Они удовлетворяют (анти)перестановочным соотношениям супералгебры $SU(2/1)$, и с их помощью можно построить когерент-

ные состояния

$$|\xi, Z\rangle = \exp \sum_i [\xi_i X_i^{0\uparrow} + Z_i X_i^{\downarrow\uparrow}]\,|\uparrow\rangle,$$

где Z_i-с-числовые, а ξ_i грассмановы комплексные переменные, $|\uparrow\rangle = \otimes\ |\uparrow\rangle_i$. Следуя общей схеме, можно построить действие полевой теории исходной модели (1)

$$A = \int_0^\beta d\tau \{ \sum_i [\varphi_i^{\sigma+} \dot{\varphi}_i^\sigma + \psi_i^+ \dot{\psi}_i - iB_i (\varphi_i^{\sigma+}\varphi_i^\sigma + \psi_i^+\psi_i - 1)] + h(\tau)\}, \tag{3}$$

где гамильтониан имеет вид

$$h(\tau) = t \sum_{\langle i,j\rangle} [\psi_i^+ \psi_j (\varphi_i^\sigma \varphi_j^{\sigma+}) + \text{h.c.}] + J_1 \sum_{\langle i,j\rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + J_2 \sum_{\langle\langle i,j\rangle\rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - \mu \sum_i (1 - \psi_i^+ \psi_i) \tag{4}$$

где $\mathbf{S}_i = \frac{1}{2} \varphi_i^+ \vec{\sigma} \varphi_i$. Поля $\varphi_i^\sigma(\tau)$-бозонные незаряженные, а $\psi_i(\tau)$ фермионные. Они описывают соответственно спиновые и зарядовые степени свободы. Варьируя по множителю Лагранжа $B_i(\tau)$, получим связь $\varphi_i^{\sigma+}\varphi_i^\sigma + \psi_i^+ \psi_i = 1$. Лагранжиан является $U(1)$ калибровочно инвариантным. Накладывая калибровочное условие $\arg \varphi_i^1(\tau) = 0$ и решая связь, получим лагранжиан в терминах полей $Z_i(\tau)$, $\xi_i(\tau)$ (2).

Сделаем преобразование Хаббарда–Стратановича и введем коллективные координаты $U_{ij}(\tau)$ и $V_{ij}(\tau)$. Гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} h(\tau) = &- \frac{2t}{J_1} \sum_{\langle i,j\rangle} [\psi_j^+ U_{ji} \psi_i + \psi_i^+ U_{ij} \psi_j] + \frac{2t^2}{J_1} \sum_{\langle i,j\rangle} \psi_i^+ \psi_i \psi_j^+ \psi_j - \\ &- \sum_{\langle i,j\rangle} [\frac{2}{J_1} U_{ij}^+ U_{ij} - U_{ij}^+ \varphi_i^\sigma \varphi_j^{\sigma+} - U_{ij} \varphi_i^{\sigma+} \varphi_j^\sigma] \\ &- \sum_{\langle\langle i,j\rangle\rangle} [\frac{2}{J_2} V_{ij}^+ V_{ij} - V_{ij} \varphi_i^\sigma \varphi_j^{\sigma+} - V_{ij} \varphi_i^{\sigma+} \varphi_j^\sigma] - \mu \sum_i (1 - \psi_i^+ \psi_i). \end{aligned} \tag{5}$$

Члены вида $(|\varphi_i^1|^2 + |\varphi_i^2|^2)(|\varphi_j^1|^2 + |\varphi_j^2|^2)$ не выписаны, так как они приводят к перенормировке четырехфермионного взаимодействия и химического потенциала. По спиновым полям $\varphi_i^\sigma(\tau)$ интеграл является гауссовским. Интегрирование по полям $U_{ij}(\tau)$ и $V_{ij}(\tau)$ выполним по методу быстрейшего спуска. Положим

$$U_{ij}(\tau) = \rho_1 \exp i[\delta_{ij} + B_{ij}(\tau)], \qquad V_{ij}(\tau) = \rho_2 \exp i[\alpha_{ij} + A_{ij}(\tau)], \tag{6}$$

где ρ_1, ρ_2 параметры по которым будем варьировать. Фазы задаются потенциалом $\mathbf{B}$ однородного магнитного поля, перпендикулярного решетке, поток которого через один плакет равен π : $\delta_{ij} = \int_i^j \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$. Фазы α_{ij} имеют вид [9,10]

$$\begin{aligned} \alpha(i_x, i_y; i_x + a, i_y + a) &= \alpha(i_x, i_y; i_x - a, i_y - a) = \frac{\pi}{2}(-1)^{i_x/a} \\ \alpha(i_x, i_y; i_x + a, i_y - a) &= \alpha(i_x, i_y; i_x - a, i_y + a) = -\frac{\pi}{2}(-1)^{i_x/a}, \end{aligned} \tag{7}$$

где a – длина ребра решетки. Поля $B_{ij}(\tau)$ и $A_{ij}(\tau)$ – калибровочные поля, которые входят в эффективный лагранжиан.

Гамильтониан для спиновых полей $(\varphi_i^\sigma(\tau))$ можно диагонализировать (в случае $A_{ij}(\tau) = 0$, $B_{ij}(\tau) = 0$) и спектр имеет вид [10, 11]

$$E^{\pm} = \pm\epsilon(k) = \pm 2[\rho_1^2(\sin^2 k_x a + \sin^2 k_y a) + 4\rho_2^2 \cos^2 k_x a \cos^2 k_y a]^{1/2}, \tag{8}$$

где $-\frac{\pi}{a} \leqslant k_x,\ k_y \leqslant \frac{\pi}{a}$. Тогда для свободной энергии спиновых степеней свободы получим

$$F = -\frac{4\rho_1^2}{J_1} - \frac{4\rho_2^2}{J_2} + \frac{2a^2}{\beta}\int d^2k\,(e^{\frac{1}{2}\beta\epsilon} - e^{-\frac{1}{2}\beta\epsilon}). \tag{9}$$

Уравнения статфазы $\partial F/\partial\rho_1 = 0$, $\partial F/\partial\rho_2 = 0$ имеют только ненулевые решения.

Энергия (8) имеет минимум в изолированных точках $(k_x^*, k_y^*) = (0, 0)$, $(0, \pi/a)$, $(\pi/a, 0)$, $(\pi/a, \pi/a)$, если $\rho_1 > 2\rho_2$. В окрестности этих точек спектр является релятивистским и в низкоэнергетическом пределе эффективный лагранжиан для спиновых полей имеет вид [10]

$$Z_{\text{эфф}} = \sum_{\alpha=1}^{4}\left[\frac{1}{v}\bar{\varphi}_\alpha \tilde{\gamma}_\mu(\partial_\mu - iB_\mu)\varphi_\alpha + m\bar{\varphi}_\alpha\varphi_\alpha\right], \tag{10}$$

где

$$v = 2a\rho_1, \quad m = \frac{2\rho_1}{a\rho_2}; \quad \tilde{\gamma}_1 = \sigma_2; \quad \tilde{\gamma}_2 = \sigma_3; \quad \tilde{\gamma}_3 = v\sigma_3. \tag{11}$$

Особенность здесь в том, что спиновые поля $\varphi^\sigma(x)$ являются бозонными, но поскольку входят в (10) как дираковские, то интегрируя по ним, получим член Черна–Саймонса. Коэффициент перед кинетическим членом пропорционален длине решетки и в непрерывном пределе не дает вклада. Не дает вклада в этом пределе и калибровочное поле $A_{ij}(\tau)$.

Рассмотрим фермионный сектор. Гамильтониан заряженных полей имеет вид прыжкового гамильтониана во внешнем однородном магнитном поле. Хорошо известно, что спектр этого гамильтониана имеет нули в изолированных точках редуцированной зоны Бриллюэна (в нашем случае их две). В окрестности этих точек спектр является релятивистским и низкоэнергетический эффективный лагранжиан содержит две дираковские частицы с нулевыми массами, взаимодействующие с калибровочными полями $B_\mu(x)$ [12].

Суммируя сказанное получим, что эффективное действие, описывающее динамику носителей заряда, имеет вид

$$A_{\text{эфф}} = \int d^3x\Big[\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{1}{w}\bar{\psi}_\alpha\hat{\gamma}_\mu(\partial_\mu - iB_\mu)\psi_\alpha + i\frac{1}{2\pi}\epsilon_{\mu\nu\lambda}B_\mu\partial_\nu B_\lambda +$$
$$+ \frac{4t^2}{J_1}[(\bar{\psi}\sigma_2\tau_0\psi)(\bar{\psi}\sigma_2\tau_0\psi) - (\bar{\psi}\tau_2\psi)(\bar{\psi}\tau_2\psi)] + \mu\bar{\psi}_\alpha\sigma_2\psi_\alpha\Big] \tag{12}$$

где

$$w = \frac{4t\rho_1 a}{J_1}; \quad \hat{\gamma}_1 = \sigma_1; \quad \hat{\gamma}_2 = \sigma_2; \quad \hat{\gamma}_3 = w\sigma_3; \quad \tau_0 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}; \quad \tau_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$$

Я благодарен Хвещенко Д.В. за полезные обсуждения.

Литература

1. *Anderson P.W.* Science, 1987, **235**, 1196.
2. *Kalmeyer V., Laughlin R.B.* Phys. Rev. Lett., 1987, **59**, 2095.
3. *Dzyaloshinskii I. et al.* Phys. Lett. A, 1988, **127**, 112.
4. *Wiegmann P.* Phys. Rev. Lett., 1988, **60**, 821.
5. *Chen Y.-H. et al.* Int. J. Mod. Phys., 1989, **3**, 1001.
6. *Wen X.–G. et al.* Phys. Rev. B, 1989, **39**, 11413.
7. *Коган Я.* Письма в ЖЭТФ, 1989, **49**, 194.

8. *Коган Я., Хвещенко Д.* Письма в ЖЭТФ, 1989, **50**, 137.
9. *Haldane F.D.M.* Phys. Rev. Lett., 1988, **61**, 2015.
10. *Bander M.* Phys. Lett. A, 1989, **136**, 245 .
11. *Boyanovsky D. et al.* Nucl. Phys. B, 1987, **285**, 327.
12. *Wen X.G., Zee A.* Nucl. Phys. B, 1989, **136**, 641.

Математический институт им. В.А.Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
28 марта 1990 г.