Письма в ЖЭТФ, том 51, вып. 9, стр. 446 – 449 10 мая 1990 г.

ЗАМКНУТЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ ВСЕХ СПИНОВ

М.А.Васильев

Сформулированы замкнутые уравнения движения взаимодействующих калибровочных полей всех спинов в 3 + 1 измерении.

В последние годы наметился определенный прогресс в направлении построения непротиворечивой теории калибровочных полей всех спинов, взаимодействуюших друг с другом и с гравитацией в 3 + 1 измерении. В [1], где эта задача была решена в кубическом приближении, выяснилось, что неудача предшествовавших попыток [2–4] введения гравитационного взаимодействия калибровочных высших спинов объясняется главным образом тем, что это взаимодействие содержит отрицательные степени космологической постоянной, не допуская, тем самым, разложения над плоским фоном, использовавшегося в [2–4]. Динамику высших спинов оказалось удобным описывать [5, 6, 1] в терминах калибровочных полей, отвечающих супералгебрам высших спинов, введенным в [6–9]. Эти супералгебры бесконечномерны, и соответствующие калибровочные теории высших спинов содержат бесконечные цепочки полей с неограниченно возрастающими спинами.

В [10–11] был предложен подход к уравнениям движения высших спинов, использующий разложение по степеням кривизн (0-форм Вейля) и позволяющий выйти за рамки кубического приближения по взаимодействию. В [12] были получены все члены вплоть до второго порядка по степеням 0-форм Вейля, что отвечает членам до пятого порядка по взаимодействию на уровне действия. Ниже мы сформулируем полностью совместные уравнения движения калибровочных полей всех спинов (во всех порядках по взаимодействию). Эти уравнения явно общекоординатно инвариантны, содержат уравнения Эйнштейна, обладают всеми необходимыми калибровочными симметриями и сводятся к свободным уравнениям безмассовых полей всех спинов в линеаризованном приближении.

Для формулировки динамики калибровочных полей всех спинов будем использовать "производящие функции" $W(Z, Y; K|x)$ и $B(Z, Y; K|x)$, которые являются, соответственно, 1- и 0-формами по отношению к пространственно-временным координатам[1)] x^ν. Твисторные переменные $Z := (z_\alpha; \bar{z}_{\dot\alpha})$, $Y = (y_\alpha; \bar{y}_{\dot\alpha})$ (спинорные индексы α, β и $\dot\alpha$, $\dot\beta$ принимают значения 1, 2) и "операторы Клейна" $K = (k, \bar{k})$, играющие роль вспомогательных переменных, удовлетворяют соотношениям

$$ky_\alpha = -y_\alpha k, \quad kz_\alpha = -z_\alpha k, \quad k^2 = 1, \quad [k, \bar{y}_{\dot\alpha}] = [k, \bar{z}_{\dot\alpha}] = 0; \tag{1}$$

$$\bar{k}\bar{y}_{\dot\alpha} = -\bar{y}_{\dot\alpha}\bar{k}, \quad \bar{k}\bar{z}_{\dot\alpha} = -\bar{z}_{\dot\alpha}\bar{k}, \quad \bar{k}^2 = 1, \quad [\bar{k}, y_\alpha] = [\bar{k}, z_\alpha] = 0, \quad [k, \bar{k}] = 0 \tag{2}$$

(переменные z_α, $\bar{z}_{\dot\alpha}$, y_α и $\bar{y}_{\dot\alpha}$ коммутируют друг с другом).

Основной результат работы состоит в том, что полные уравнения движения безмассовых полей всех спинов могут быть приведены к следующему виду

$$dW(Z, Y_0; K) = \int d^4 Y_1 d^4 Y_2 \exp\Big(-i\Big[\sum_{\substack{n>m \\ n,m = 0-2}} (-1)^{n+m}(Y_m, Y_n)\Big] \tag{3}$$
$$W(Z, Y_1; K) \wedge W(Z + Y_0 - Y_2, Y_2; K),$$

---

1) То есть $W = dx^\nu W_\nu(\ldots)$. Зависимость от пространственно-временных координат x^ν будет в дальнейшем опускаться. Общекоординатная инвариантность всей постановки гарантируется использованием формализма внешней алгебры дифференциальных форм. При этом внешний дифференциал $d = dx^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ является единственным оператором, действующим на координаты.

$$dB(Z, Y_0; K) = \int d^4 Y_1\, d^4 Y_2 \exp\Big(-i\Big[\sum_{\substack{n>m \\ n,m=0-2}} (-1)^{n+m}(Y_m, Y_n)\Big]\Big) \tag{4}$$

$$[W(Z, Y_1; K) B(Z + Y_0 - Y_2, Y_2; K) -$$
$$- B(Z, Y_1; K) W(Z + Y_0 - Y_2, Y_2; K)]$$

$$\frac{\partial}{\partial z^\alpha} W(Z, Y_0; K) = \mu \int d^4 Y_1 d^4 Y_2 d^4 U \delta(\bar{u}) \exp\Big(-i\Big[\sum_{\substack{n>m \\ n,m=0-2}} (-1)^{n+m}(Y_m, Y_n) + 2\sum_{n=0}^{2}(-1)^n (U, Y_n)\Big]\Big) \tag{5}$$

$$\times \{\nabla_\alpha(z + y_0 + u, y_0 + u) W((-z - 2y_0 - 2u; \bar{z}), Y_1; K)$$

$$-\nabla_\alpha(z + y_0 + u, y_2 - u) W(Z, Y_1; K)\} B((-z - y_0 - y_2; \bar{z} + \bar{y}_0 - \bar{y}_2), Y_2; K) k$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\dot\alpha}} W(\ldots) = \ldots, \quad \frac{\partial}{\partial z^\alpha} B(\ldots) = \ldots, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\dot\alpha}} B(\ldots) = \ldots, \tag{6}$$

где уравнения (6) получаются из уравнений (5) заменой $W \to B$ и (или) заменой спиноров с точкой спинорами без точки и наоборот с одновременной заменой $\mu \leftrightarrow \bar{\mu}$ (μ – произвольный комплексный параметр деформации). Мы используем обозначения

$$(Y_n, Y_m) = y_{\alpha n} y_m^\alpha + \bar{y}_{\dot\alpha n} \bar{y}_m^{\dot\alpha}, \tag{7}$$

$$\nabla_\alpha(z, y) = (y_\alpha - z_\alpha) \int_0^1 d\beta \beta \delta(\beta z + (1 - \beta) y), \tag{8}$$

где $\delta(y)$ обозначает двумерную δ-функцию Дирака от спинорного аргумента y_α.

На уравнение (3) можно смотреть как на уравнение нулевой напряженности для определенной бесконечномерной супералгебры[2)] Ли g. Уравнение (4) в этом случае имеет смысл условия ковариантного постоянства 0-форм, принимающих значения в присоединенном представлении g. Эти уравнения становятся динамически нетривиальными благодаря уравнениям (5), (6). Чтобы убедиться в этом, покажем, что в первом порядке разложения по 0-формам Вейля, отвечающего разложению по степеням параметров μ и $\bar{\mu}$, уравнения (3)–(6) воспроизводят уравнения движения высших спинов работы [11].

В нулевом порядке по μ и $\bar{\mu}$, из уравнений (5), (6) следует, что $W(Z, Y; K) = \omega(Y; K)$ и $B(Z, Y; K) = C(Y; K)$, где ω и C – соответственно 1- и 0-формы, использовавшиеся в [10, 11]. Решая уравнения (5) в первом порядке по μ, нетрудно показать, что

$$W(Z, Y_0; K) = \omega(Y_0; K) + \int d^4 Y_1 d^4 Y_2 d^4 U \exp\Big(-i\Big[\sum_{\substack{n>m \\ n,m=0-2}} (Y_m, Y_n) + 2\sum_{n=0}^{2}(-1)^n (U, Y_n)\Big]\Big) \times$$

---

2) Используя формализм символов операторов Березина [13, 14] (см. также [7]), несложно убедиться, что g есть алгебра всевозможных функций от операторов $\hat{Y}, \hat{Z}, \hat{K}$, подчиненных соотношениям $[\hat{y}_\alpha, \hat{y}_\beta] = 2i\epsilon_{\alpha\beta}$, $[\hat{z}_\alpha, \hat{y}_\beta] = -i\epsilon_{\alpha\beta}$, $[\hat{z}_\alpha, \hat{z}_\beta] = 0$, $\{\hat{k}, \hat{y}_\alpha\} = \{\hat{k}, \hat{z}_\alpha\} = 0$, $\hat{k}^2 = I$ (предполагается, что образующие $\hat{\bar{y}}_{\dot\alpha}, \hat{\bar{z}}_{\dot\alpha}, \hat{\bar{k}}$ подчинены аналогичным условиям, причем наборы $(\hat{y}_\alpha, \hat{z}_\alpha, \hat{k})$ и $(\hat{\bar{y}}_{\dot\alpha}, \hat{\bar{z}}_{\dot\alpha}, \hat{\bar{k}})$ взаимно сопряжены и взаимно коммутативны). Правая часть формулы (3) описывает произведение символов в базисе, в котором операторы $\hat{Y}$ стоят справа, а операторы $\hat{Z}$ – слева, причем предполагается полностью симметричная расстановка операторов $\hat{Y}$. Отметим, что алгебры такого типа обсуждались в контексте теории высших спинов в старших размерностях в [15] и в контексте конформных теорий высших спинов в 3 + 1 измерений в [16].

$$\times\, \omega(Y_1;K)C(Y_2;K)\,(\mu k\delta(\bar{u})\,\Delta(z+y_0+u,\,y_0+u,\,y_2-u)+ \tag{9}$$

$$+\,\bar{\mu}\bar{k}\delta(u)\,\Delta(\bar{z}+\bar{y}_0+\bar{u},\,\bar{y}_0+\bar{u},\,\bar{y}_2-\bar{u}))+O(\mu^2,\mu\bar{\mu},\bar{\mu}^2),$$

где функция трех спинорных аргументов $\Delta(a,\,b,\,c)$ была введена в [11] и может быть задана соотношением

$$\Delta(a,\,b,\,c)=\int d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3\,\theta(\beta_1)\theta(\beta_2)\theta(\beta_3)\delta(1-\sum_{n=1}^{3}\beta_n)(a_\alpha b^\alpha+b_\alpha c^\alpha-a_\alpha c^\alpha)\,\delta(\beta_1 a+\beta_2 b+\beta_3 c)\,. \tag{10}$$

Для получения формулы (9) достаточно учесть легко проверяемое соотношение

$$\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\,\Delta(z,\,y,\,x)=\nabla_\alpha(z,\,x)-\nabla_\alpha(z,\,y). \tag{11}$$

Несложно убедиться, что подстановка выражения (9) в уравнение (3) при $Z=0$ приводит в точности к уравнениям движения работы [11]. Аналогично выводятся уравнения работы [11] для C.

Подчеркнем, что важнейшими свойствами системы уравнений (3) – (6), являются ее формальная совместность (симметрия вторых производных) и тот факт, что она правильно воспроизводит свободные уравнения высших спинов. Второе свойство мы доказали сведением уравнений (3) – (6) к уравнениям работы [11] (поправки старших степеней по μ и $\bar{\mu}$ влияют на члены со взаимодействием). Первое свойство проверяется непосредственно. Отметим, что совместность уравнений (3) – (6) в частности гарантирует, что после того, как решены уравнения (5), (6), которые являются алгебраическими по отношению к пространственно-временным координатам, уравнения (3), (4) при $Z\neq 0$ не содержат никакой дополнительной информации по сравнению с теми же уравнениями при $Z=0$.

Важным свойством уравнений (3) – (6) является то, что они остаются совместными, если все величины W и B принимают значения в произвольной ассоциативной алгебре (проверка совместности требует лишь ассоциативности закона произведения W и B). Как подчеркивалось в [10], это свойство дает возможность рассматривать различные системы полей с нетривиальными внутренними симметриями (полный список таких систем содержится в [9]).

В заключение отметим, что мы привели лишь наиболее компактную форму уравнений высших спинов, которая оказывается не самой удобной с точки зрения анализа непротиворечивых усечений (автоморфизмов) и условий эрмитовости. Другие возможные формы уравнений высших спинов связаны с уравнениями (3) – (6) нелинейными заменами переменных и динамически эквивалентны им по крайней мере по теории возмущений. Не имея возможности останавливаться здесь на этом более подробно, отметим, что существует такая модификация уравнений (3) – (6), которая обладает явной инвариантностью относительно антиавтоморфизма ρ и закона эрмитового сопряжения $\dagger$, работы [10]. Это означает, что все качественные результаты работ [9-11] сохраняют силу во всех порядках по взаимодействию.

Литература

1. *Васильев М.А., Фрадкин Е.С.* Письма в ЖЭТФ, 1986, **44**, 484; Phys. Lett. B, 1987, **189**, 89; Nucl. Phys. B, 1987, **291**, 141.
2. *Aragone C., Deser S.* Phys. Lett. B, 1979, **86**, 161.
3. *Berends F.A. et al.* J. Phys. A, 1980, **13**, 1643.
4. *De Wit B., Freedman D.Z.* Phys. Rev. D, 1980, **21**, 358.
5. *Васильев М.А.* ЯФ, 1987, **45**, 1792; Fortschr. Phys., 1987, **35**, 741.

6. *Fradkin E.S., Vasiliev M.A.* Ann. of Phys. (N.Y.), 1987, 177, 63.

7. *Vasiliev M.A.* Fortschr. Phys., 1988, **36**, 33.

8. *Fradkin E.S., Vasiliev M.A.* Int. J. Mod. Phys. A, 1988, **3**, 2983.

9. *Konstein S.E., Vasiliev M.A.* Lebedev Institute preprint № 58, 1989, Nucl. Phys. B – in press.

10. *Vasiliev M.A.* Phys. Lett. B, 1988, **209**, 89; Ann. of Phys. (N.Y.), 1989, **190**, 59.

11. *Vasiliev M.A.* Nucl. Phys. B, 1989, **324**, 503.

12. *Vasiliev M.A.* Preprint ICTP/89/201 (Phys. Lett. B, 1990, in press).

13. *Березин Ф.А.* Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.

14. *Berezin F.A., Marinov M.S.* Ann. of Phys. (N.Y.), 1977, **104**, 336.

15. *Vasiliev M.A.* Nucl. Phys. B, 1988, **301**, 26.

16. *Fradkin E.S., Linetsky V.Ya.* Phys. Lett. B, 1989, **231**, 97.

Физический институт им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
4 апреля 1990 г.