

Вклад блока рассеяния света на свете в уровни энергии легких мюонных атомов

С. Г. Каршенбойм¹⁾²⁾, Е. Ю. Корзинин, В. Г. Иванов³⁾, В. А. Шелюто

ГНЦ РФ “Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии им. Д.И. Менделеева”
190005 Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 28 мая 2010 г.

Найден полный вклад диаграмм, содержащих блок рассеяния света на свете, в лэмбовский сдвиг в мюонном водороде, дейтерии и ионе гелия. Результаты получены в приближении статического мюона и отдельная часть статьи посвящена обоснованию этого приближения и анализу его точности.

Исследования уровней энергии в мюонном водороде имеют долгую историю, но до последнего времени успешных прецизионных измерений не было. Недавно были получены первые результаты по лэмбовскому сдвигу в мюонном водороде и дейтерии [1], и аналогичные измерения планируются для мюонного иона гелия.

Лэмбовский сдвиг в легких мюонных двухчастичных атомах – это расщепление уровней $2s$ и $2p$, которые вырождены в нерелятивистском рассмотрении кулоновской задачи (как, например, и в обычном водороде). Эффекты электронной поляризации вакуума в мюонных атомах снимают это вырождение и приводят к расщеплению порядка $\alpha(Z\alpha)^2 m_\mu$, появляющемуся уже в нерелятивистских вычислениях. (Мы используем релятивистскую систему единиц $\hbar = c = 1$, Z – заряд ядра, α – постоянная тонкой структуры.)

Имеются и более “тонкие” расщепления и, в частности, уровни в легких мюонных атомах, имеют тонкую и сверхтонкую структуры, которые проявляются в релятивистских вычислениях и оказываются значительно меньше лэмбовского сдвига (в отличие от обычного водорода).

Спецификой легких мюонных атомов является то, что характерный атомный импульс составляет $Z\alpha m_\mu$, то есть сравним с массой электрона ($\alpha m_\mu \simeq 1.5 m_e$). В то же время, атомные энергии существенно ниже m_e . Это позволяет рассматривать поправки с замкнутыми электронными петлями как нерелятивистские. Эффекты поляризации вакуума вплоть до нерелятивистских вкладов в лэмбовский

сдвиг порядка $\alpha^5 m_\mu$ рассматривались в целом ряде работ (см., например, [2–5]).

При вычислении вкладов порядка $\alpha^5 m_\mu$ в упомянутых работах ядро рассматривалось как точечное. Эффекты конечного размера ядра в легких мюонных атомах можно, при необходимости, рассмотреть как отдельное возмущение.

В порядке $\alpha^5 m_\mu$ появляются и вклады, связанные с блоком рассеяния света на свете (см. рис.1), которые и рассматриваются в данной работе. Атом-

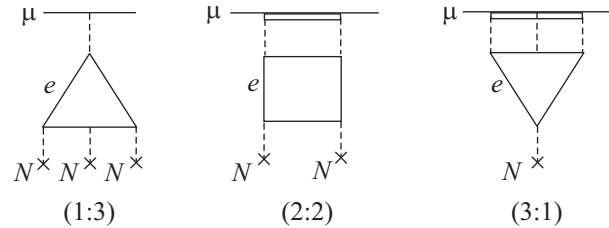


Рис.1. Три типа диаграмм для вклада рассеяния света на свете в лэмбовский сдвиг в легких мюонных атомах

ное ядро в диаграммах рис.1 рассматривается в приближении внешнего поля (то есть как статическое), в то же время, выражение для мюонной линии содержит кулоновскую функцию Грина мюона, обозначенную на рисунке двойной линией,

$$S_C(E, \mathbf{p}, \mathbf{p}') = i \sum_{\lambda} \frac{|\lambda(\mathbf{p})\rangle \langle \lambda(\mathbf{p}')|}{E - E_{\lambda} + i0}. \quad (1)$$

Сумма берется по всем промежуточным состояниям λ дискретного и непрерывного спектра.

Все фотоны, как соединяющие мюонную линию и электронную петлю, так и для внешнего поля ядра, – кулоновские, то есть вклад дает только компонента D_{00} фотонного пропагатора. В кулоновской калибровке D_{00} не зависит от энергии, однако энергия переносится по фотонам, соединяющим мюонную линию и электронную петлю. По линиям внешнего поля энергия, конечно, не переносится.

¹⁾ Также: Max-Planck-Institut für Quantenoptik, 85748 Garching, Germany.

²⁾ e-mail: s.g.karshenboim@vniim.ru

³⁾ Также: Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, 196140 Санкт-Петербург, Россия.

Вообще говоря, поскольку мюонные атомные импульсы – порядка электронных петлевых импульсов, то явный вид функций $|\lambda(\mathbf{p})\rangle$ существенно различен для свободных и связанных (кулоновских) волновых функций (см., например, [6]).

Вычисления с кулоновскими функциями Грина, даже в нерелятивистском приближении, оказываются достаточно сложными; подобное вычисление не было проведено ни для одного из соответствующих вкладов.

Можно, однако, показать, что вычисления можно осуществить в простом приближении – приближении статического мюона (см. рис.2).

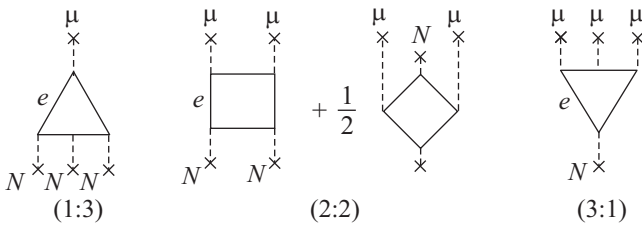


Рис.2. Диаграммы для вычисления вклада в лэмбовский сдвиг в приближении статического мюона

В этом приближении выражения для отдельных вкладов в энергию уровня ζ приобретают вид

$$\Delta E_{1:3}(\zeta) = (4\pi\alpha)(-4\pi Z\alpha)^3 \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \times \\ \times \int \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2 \mathbf{k}_3^2 \mathbf{k}_4^2} \mathcal{F}_\zeta(\mathbf{k}_1) \cdot \mathcal{L}, \quad (2)$$

$$\Delta E_{2:2}(\zeta) = (4\pi\alpha)^2 (-4\pi Z\alpha)^2 \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \times \\ \times \int \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2 \mathbf{k}_3^2 \mathbf{k}_4^2} \times \\ \times \left[\mathcal{F}_\zeta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) + \frac{1}{2} \mathcal{F}_\zeta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) \right] \cdot \mathcal{L}, \quad (3)$$

$$\Delta E_{3:1}(\zeta) = (4\pi\alpha)^3 (-4\pi Z\alpha) \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \times \\ \times \int \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2 \mathbf{k}_3^2 \mathbf{k}_4^2} \mathcal{F}_\zeta(\mathbf{k}_4) \cdot \mathcal{L}, \quad (4)$$

где атомный множитель (формфактор)

$$\mathcal{F}_\zeta(\mathbf{q}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \Psi_\zeta^*(\mathbf{p}) \Psi_\zeta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \quad (5)$$

для $2p - 2s$ расщепления равен

$$\mathcal{F}_{2p-2s}(\mathbf{q}) = \frac{2\gamma^4 \mathbf{q}^2 (\gamma^2 - \mathbf{q}^2)}{(\gamma^2 + \mathbf{q}^2)^4}, \quad (6)$$

$\gamma = Z\alpha m_r$, а m_r – приведенная масса мюона в атоме.

Множитель $\mathcal{L}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ отвечает одной диаграмме блока рассеяния света на свете с импульсами выходящих фотонов $k_i = (0, \mathbf{k}_i)$ для $i = 1, 2, 3$ и $k_4 = -(k_1 + k_2 + k_3)$ (см. рис.3). Все перестановки

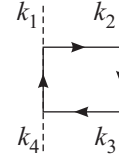


Рис.3. Диаграмма блока рассеяния света на свете $\mathcal{L}(k_1, k_2, k_3, k_4)$

фотонов, как будет показано ниже, уже учтены явно.

Отметим полное исчезновение как кулоновских функций Грина, так и интегрирований по энергии фотонов, которые присутствуют в полных выражениях. Напомним, что энергия не передается по фотонным линиям в статическом приближении, но переносится по фотонам, соединяющим мюон и электрон.

Приближение статического мюона качественно меняет вид выражений и существенно упрощает расчеты.

Доказательство его применимости для легких мюонных атомов проведем в предположении, что энергией связи состояния ζ , по которому вычисляется энергия, и промежуточных состояний λ можно пренебречь. Законность этого предположения обсудим отдельно.

Стандартная кулоновская функция Грина мюона входит в вычисления со следующими аргументами:

$$S_C(E_\zeta \pm \omega, \mathbf{p}, \mathbf{p}'),$$

где ω – частота фотона или комбинация таких частот. В отличие от приближения статического мюона (см. рис.2), в полном выражении (см. рис.1) эти частоты не равны нулю.

Пренебрегая энергией состояний и учитывая полноту базиса, можно убедиться, что сумма по λ оказывается тривиальной:

$$\sum_\lambda \frac{|\lambda(\mathbf{p})\rangle \langle \lambda(\mathbf{p}')|}{E_\zeta \pm \omega - E_\lambda + i0} \rightarrow \sum_\lambda \frac{|\lambda(\mathbf{p})\rangle \langle \lambda(\mathbf{p}')|}{\pm \omega + i0} = \\ = \frac{(2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{\pm \omega + i0}. \quad (7)$$

Выражения с кулоновскими функциями Грина мюона отличаются от выражений в приближении статического мюона тремя дополнительными элементами:

1) суммой по промежуточным состояниям;

2) интегрированием по импульсу (распространение мюона в кулоновском поле происходит при сохранении энергии мюона, но его импульс не сохраняется);

3) интегрированием по частотам фотонов (напомним, что виртуальные фотоны, соединяющие мюон и электрон на рис.1, переносят энергию, а фотоны в статическом приближении на рис.2 – нет).

Нужно также учесть вклад всех возможных перестановок фотонных линий. Мы рассматриваем в качестве блока рассеяния света на свете только одну диаграмму рис.3, а все перестановки в наших вычислениях сводятся к учету нескольких вкладов в мюонный фактор с переставленными линиями входящих в него фотонов.

Преобразование (7) позволяет успешно избавиться как от суммы по промежуточным состояниям, так и от “лишних” интегрирований по импульсу. Единственное, что теперь отличает выражения (3) и (4) от кулоновских, – это интегрирования по энергии фотонов (выражение (2) для вклада 1:3 совпадает с полным выражением, так как изначально не содержит кулоновской функции Грина).

Рассмотрим структуру интегрирований по ω . Внутри диаграмм с кулоновской функцией Грина имеет место обмен энергией между мюоном и электроном, но полная переданная энергия от ядра к электрону равна нулю, а поэтому обращается в нуль и сумма энергий всех фотонов, соединяющих электрон и мюон. Так, в случае вклада 2:2, обозначив через ω энергию первого фотона k_{10} , так что $k_{20} = -\omega$, убеждаемся, что сумма прямой и перекрестной диаграммы для мюонного фактора (см. рис.4) приводит к дельта-функции

$$\frac{i}{\omega + i0} + \frac{i}{-\omega + i0} = 2\pi\delta(\omega), \quad (8)$$

снимающей единственное оставшееся “лишнее” интегрирование. В результате, получаем выражение (3).

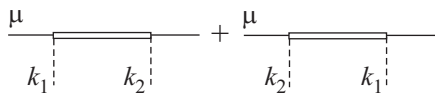


Рис.4. Мюонный фактор для вклада 2:2

Структура диаграмм 3:1 несколько сложнее. Обозначая энергии фотонов как $k_{10} = \omega_1$, $k_{20} = \omega_2$ (при этом $k_{30} = -(\omega_1 + \omega_2)$), и явно выписывая все шесть перестановок для мюонного фактора (см. рис.5), находим

$$\begin{aligned} & \frac{i}{\omega_1 + i0} \frac{i}{\omega_1 + \omega_2 + i0} + \frac{i}{\omega_2 + i0} \frac{i}{\omega_1 + \omega_2 + i0} + \\ & + \frac{i}{\omega_1 + i0} \frac{i}{-\omega_2 + i0} + \frac{i}{-\omega_1 - \omega_2 + i0} \frac{i}{-\omega_2 + i0} + \\ & + \frac{i}{\omega_2 + i0} \frac{i}{-\omega_1 + i0} + \frac{i}{-\omega_1 - \omega_2 + i0} \frac{i}{-\omega_1 + i0} = \\ & = \left(\frac{i}{\omega_1 - i0} - \frac{i}{\omega_1 + i0} \right) \left(\frac{i}{\omega_2 - i0} - \frac{i}{\omega_2 + i0} \right) = \\ & = 2\pi\delta(\omega_1) \times 2\pi\delta(\omega_2). \end{aligned} \quad (9)$$

Дельта-функции снимают интегрирования по энергии и приводят к статическому выражению (4).

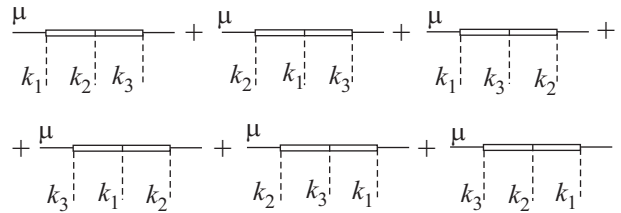


Рис.5. Мюонный фактор для вклада 3:1

Таким образом, пренебрегая энергией состояний в кулоновской функции Грина мюона (7), действительно можно перейти от кулоновских диаграмм рис.1 к диаграммам рис.2 со статическим мюоном. Осталось убедиться, что пренебрегать отброшенными членами действительно допустимо, а также оценить ошибку этой процедуры.

Структура интеграла по энергии фотона для отдельных диаграмм имеет в случае 2:2 вид

$$\mathcal{I}(\epsilon) = \int d\omega \frac{1}{\pm\omega + \epsilon + i0} \mathcal{L}(\omega), \quad (10)$$

где через $\epsilon \ll m_e$ обозначена та комбинация энергий, которой мы хотели бы пренебречь.

Первый множитель отвечает мюонному фактору и он разный для разных вкладов, а второй, $\mathcal{L}(\omega)$, отвечающий блоку рассеяния света на свете, – универсален.

Первый множитель при комбинировании с другими диаграммами даст дельта-функцию при нулевой частоте (ср. (8) и (9)), и поэтому разлагать его, вообще говоря, нельзя. Нетрудно увидеть, что можно сделать замену переменной путем сдвигки $\omega \rightarrow \omega' = \omega \pm \epsilon$, так что интеграл приобретет вид

$$\mathcal{I}(\epsilon) = \int d\omega' \frac{1}{\pm\omega' + i0} \mathcal{L}(\omega' \pm \epsilon). \quad (11)$$

Это выражение уже можно разлагать по ϵ .

Ясно, что при интегрировании блока рассеяния света на свете характерный масштаб петлевых энер-

гий в $\mathcal{L}(\omega)$ – порядка массы электрона (или выше) и параметр разложения равен

$$\frac{\epsilon}{m_e} \sim \frac{(Z\alpha)^2 m_\mu}{m_e} \simeq 0.01 \cdot Z^2 .$$

Нетрудно убедиться, что аналогичный прием с заменой переменной проходит и для вклада 3:1. Так, например, для первого слагаемого в (9) можно написать

$$\int d\omega_1 \int d\omega_2 \frac{1}{\omega_1 + \epsilon_1 + i0} \frac{\mathcal{L}(\omega_1, \omega_2)}{\omega_1 + \omega_2 + \epsilon_2 + i0} = \int d\omega'_1 \int d\omega'_2 \frac{1}{\omega'_1 + i0} \frac{\mathcal{L}(\omega'_1 - \epsilon_1, \omega'_2 - \epsilon_2 + \epsilon_1)}{\omega'_1 + \omega'_2 + i0} ,$$

после чего разложение по ϵ не составляет проблемы.

Следует отметить, что если бы в диаграммах рис.1 вместо кулоновской функции Грина мюона стояла бы свободная функция Грина, то в результате выражения также были бы сведены к приближению статического мюона с той же самой точностью. Видно (см. (7)), что при разложении функции Грина нам необходима только полнота базиса собственных состояний, а при должной сходимости интеграла характерные энергии промежуточных состояний, как свободного, так и кулоновского спектров, оказываются одного порядка.

Одним из немедленных следствий приближения статического мюона и симметрий выражений (2) и (4) по отношению к перестановке фотонных импульсов является соотношение [5]

$$\Delta E_{3:1} = \frac{1}{Z^2} \Delta E_{1:3} . \quad (12)$$

Вклад 3:1 оставался до недавнего времени единственным абсолютно неизвестным вкладом в уровни энергии мюонных атомов. Напротив, вклад 1:3, также называемый вкладом Вичмана-Кролла, хорошо известен (см., например, результаты для мюонного водорода [7, 8, 6], дейтерия [9] и мюонного гелия [10, 5]). Это связано с тем, что имеются удобные для вычислений приближенные представления для потенциала Вичмана-Кролла [11, 12] в виде явной функции расстояния. Также имеется и точное представление этого потенциала [13] в виде двукратного интеграла, понимаемого в смысле главного значения.

Соотношение (12) кардинально меняет ситуацию и уже само по себе улучшает точность, с которой известны вклады в лэмбовский сдвиг в мюонном водороде и мюонном дейтерии, на порядок [5], а также несколько улучшает точность для мюонного гелия.

Вследствие (12), наименее точно известным вкладом блока рассеяния света на свете становится вклад

2:2, также называемый вкладом виртуального дельбрюксовского рассеяния. Результаты для мюонного водорода [14] и дейтерия [9] получены с точностью хуже 10%, а для мюонного иона гелия-4 имеется [10] скорее оценка, чем результат.

Вклад 2:2 рассматривался в цитированных работах в так называемом приближении рассеяния, когда вначале вычислялся оператор, отвечающей фейнмановской диаграмме с внешними мюонными линиями на массовой поверхности и со свободным мюонным пропагатором, а затем – вычислялся его матричный элемент по кулоновским волновым функциям. На самом деле, перед собственно вычислением делались дополнительные приближения [15, 12], которые свели расчетные формулы к приближению статического мюона.

Оставляя в стороне вопрос, насколько обосновано применять приближение рассеяния в качестве отправной точки, мы констатируем, что непосредственные расчеты проводились в [14, 9, 10] в приближении статического мюона, которое является правильным для соответствующих кулоновских диаграмм рис.1 с заявленной точностью вычислений.

Вклад 2:2 является одним из наиболее сложных специфических квантовоэлектродинамических вкладов в легких мюонных атомах, и отсутствие независимых подтверждений существенно ослабляет надежность результатов [14, 9, 10].

Ниже мы вычисляем вклады 1:3 и 2:2. Первое вычисление используется для проверки аналитических выражений и численных алгоритмов, второе – направлено на улучшение точности полного вклада диаграмм рис.1 для легких мюонных атомов, поскольку точность известных результатов недостаточно велика.

Для вычисления необходимо представить множитель \mathcal{L} , который отвечает диаграмме рассеяния света на свете (см. рис.3), в удобном виде. Вычисление при помощи стандартной техники фейнмановских параметров дает результат

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}(m_e) - \mathcal{L}(M) , \\ \mathcal{L}(m) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz x^2 y \times \\ &\times \left[\frac{N_3}{2} \frac{m^4}{\Delta^2} - N_4 \left(\frac{1}{\Delta} + \frac{m^2}{\Delta^2} \right) + \frac{N_6}{2} \frac{1}{\Delta^2} \right] , \quad (13) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= m^2 - \mathbf{Q}^2 + x (\mathbf{k}_1^2 + 2y(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2) + \\ &+ y\mathbf{k}_2^2 + yz\mathbf{k}_3^2 + 2yz\mathbf{k}_3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)) , \\ \mathbf{Q} &= x (\mathbf{k}_1 + y\mathbf{k}_2 + yz\mathbf{k}_3) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_3 &= 4, \\
 N_4 &= -2 \left[(\mathbf{Q} - \mathbf{k}_2) (\mathbf{Q} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) + \right. \\
 &\quad \left. + \mathbf{Q} (\mathbf{Q} - \mathbf{k}_1) - \mathbf{k}_1 (\mathbf{Q} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \right], \\
 N_6 &= 4 \left[(\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{k}_1)) ((\mathbf{Q} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \times \right. \\
 &\quad \times (\mathbf{Q} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)) - \\
 &\quad - (\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)) \times \\
 &\quad \times ((\mathbf{Q} - \mathbf{k}_1) \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)) + \\
 &\quad + (\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)) \times \\
 &\quad \left. \times ((\mathbf{Q} - \mathbf{k}_1) \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)) \right].
 \end{aligned}$$

Здесь мы явно ввели регуляризацию Паули-Вилларса с $M \gg m_e$, которая может оказаться полезной, если интегралы по k плохо сходятся.

Дальнейшее вычисление удобно провести, объединяя фотонные знаменатели и знаменатель Δ при помощи фейнмановских параметров. После интегрирования по импульсам фотонов получаем следующее выражение:

$$\Delta E_{1:3}(\zeta) = \frac{3}{4\pi} \alpha (Z\alpha)^3 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \mathbf{q}^2} \mathcal{F}_\zeta(\mathbf{q}) \mathcal{J}_{1:3}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_{1:3}(\mathbf{q}^2) &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \int_0^1 du \int_0^1 dv \int_0^1 dw \times \\
 &\quad \times \left\{ \mathcal{A}_{1:3} \left[\ln \left(\frac{s_{1:3} \mathbf{q}^2 + m_e^2}{m_e^2} \right) - \ln \left(\frac{M^2}{m_e^2} \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\mathcal{B}_{1:3} \mathbf{q}^2}{(s_{1:3} \mathbf{q}^2 + m_e^2)} + \frac{\mathcal{C}_{1:3} \mathbf{q}^4}{(s_{1:3} \mathbf{q}^2 + m_e^2)^2} \right\}, \quad (15)
 \end{aligned}$$

а безразмерные коэффициенты $\mathcal{A}_{1:3}$, $\mathcal{B}_{1:3}$, $\mathcal{C}_{1:3}$ и $s_{1:3}$ – громоздкие функции всех фейнмановских параметров.

При вычислении вклада 1:3 интегрирование в (2) по импульсу атомного формфактора \mathcal{F} факторизуется, а оставшиеся интегрирования по импульсу логарифмически расходятся при больших импульсах, и поэтому удержание M на промежуточных стадиях оказывается полезным при вычислении отдельных членов. В частности, вклады отдельных слагаемых (13) в (14) содержат такие расходимости.

Величина $\mathcal{J}_{1:3}(\mathbf{q}^2)$ представляет собой не что иное, как вклад в зарядовый формфактор мюона, индуцированный блоком рассеяния света на свете. Мы всег-

да можем “перенормировать” вершинную функцию мюона и, проведя вычитание

$$\mathcal{J}_{1:3}(\mathbf{q}^2) \rightarrow \mathcal{J}_{1:3}(\mathbf{q}^2) - \mathcal{J}_{1:3}(0), \quad (16)$$

избавиться от логарифмической расходимости при интегрировании по k в (15).

Диаграмма рассеяния света на свете, как известно, на самом деле не перенормирует вершину, то есть $\mathcal{J}_{1:3}(0) = 0$, в чем мы убедились как численно, так и аналитически (на разных стадиях преобразований). В частности, коэффициент при логарифме $\ln(M/m_e)$ в (15) обращается в ноль:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \int_0^1 du \int_0^1 dv \int_0^1 dw \mathcal{A}_{1:3} = 0.$$

“Перенормировка” отдельных слагаемых согласно (16) сводится, на самом деле, к перегруппировке и сокращению расходящихся вкладов.

Заключительное численное интегрирование по фейнмановским параметрам и импульсу q мы провели с помощью программы VEGAS [16]. Результаты приведены в табл.1. Вклад для расщепления $2p - 2s$, приведенный в нижней строке таблицы, вычислялся не как разность вкладов уровней $2p$ и $2s$, а непосредственно.

Таблица 1

Вклады 1:3 (вклады Вичмана-Кролла) в уровни энергии в мюонном водороде, дейтерии и ионе гелия-4: $\Delta E = \alpha(Z\alpha)^4 m_\mu \cdot 10^{-3} \cdot C$

Вклад	$C(\mu\text{H})$	$C(\mu\text{D})$	$C(\mu^4\text{He})$
$2s$	0.5704(5)	0.6263(5)	1.0815(10)
$2p$	0.10468(3)	0.12405(3)	0.5108(7)
$2p - 2s$	-0.4649(5)	-0.5015(5)	-0.5702(10)

Результаты для лэмбовского сдвига $2p - 2s$ (см. ниже также табл.3) прекрасно согласуются с ранее известными значениями для мюонного водорода ($-0.00103(2)$ мэВ [8, 6]) и дейтерия ($-0.00111(2)$ мэВ [9]). Для иона гелия наш результат находится в согласии с $-0.0198(4)$ мэВ [5] и -0.02 мэВ [10], но противоречит результату 0.135 мэВ [17]. Погрешность результатов [8, 9] не приведена в оригинальных работах и оценена согласно [5].

Вычисление интегралов по импульсам для вклада 2:2 проводим аналогичным образом. Нетрудно убедиться, что поведение интегралов при интегрировании по большим импульсам позволяет сразу положить $M = \infty$. После введения фейнмановских па-

раметров и интегрирования по импульсам фотонов получаем

$$\Delta E_{2:2}(\zeta) = \frac{3}{4\pi} \alpha(Z\alpha)^3 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \mathcal{F}_\zeta(\mathbf{q}) \mathcal{J}_{2:2},$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{2:2}(\mathbf{q}^2) = & \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \int_0^1 du \int_0^1 dv \int_0^1 dw \int_0^1 dt \times \\ & \times \sum_{k=1,2} \left\{ \frac{\mathcal{B}_{2:2}^{(k)}}{\left(s_{2:2}^{(k)} \mathbf{q}^2 + m_e^2\right)} + \frac{\mathcal{C}_{2:2}^{(k)} \mathbf{q}^2}{\left(s_{2:2}^{(k)} \mathbf{q}^2 + m_e^2\right)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\mathcal{D}_{2:2}^{(k)} \mathbf{q}^4}{\left(s_{2:2}^{(k)} \mathbf{q}^2 + m_e^2\right)^3} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Коэффициенты $\mathcal{B}_{2:2}^{(k)}$, $\mathcal{C}_{2:2}^{(k)}$, $\mathcal{D}_{2:2}^{(k)}$ и $s_{2:2}^{(k)}$ представляют собой громоздкие безразмерные функции фейнмановских параметров. Заметим, что знаменатели для лестничной ($k=1$) и нелестничной ($k=2$) диаграмм несколько различны.

Интегрирование по импульсу q и фейнмановским параметрам проводилось численно. Результаты приведены в табл.2. Как и в случае вклада 1:3, вклад для расщепления $2p-2s$, приведенный в таблице, был найден численным интегрированием непосредственно.

Таблица 2

Вклады 2:2 (виртуального дельбрюковского рассеяния) в уровни энергии в мюонном водороде, дейтерии и ионе гелия-4 в приближении статического мюона: $\Delta E = \alpha^2(Z\alpha)^3 m_\mu \cdot 10^{-3} \cdot C$

Вклад	$C(\mu\text{H})$	$C(\mu\text{D})$	$C(\mu^4\text{He})$
$2s$	-0.8201(15)	-0.9000(15)	-1.5615(25)
$2p$	-0.2937(9)	-0.3355(9)	-0.908(2)
$2p-2s$	0.5264(12)	0.5645(12)	0.652(2)

Результаты для $2p-2s$ в приближении статического мюона, будучи несколько ниже и обладая существенно большей точностью, согласуются в целом с ранее известными результатами. Так, для мюонного водорода получаем 0.001151(4) мэВ (ср. с 0.00135(15) мэВ [14]), для дейтерия - 0.001234(4) мэВ (ср. с 0.00147(16) мэВ [9]) и иона гелия - 0.01140(4) мэВ (ср. с 0.02 мэВ [10]).

Окончательно вклады диаграмм рис.1 в лэмбовский сдвиг $2p-2s$ собраны в табл.3. В отличие от табл.2, где приведена погрешность численных расчетов в приближении статического мюона, мы учли

здесь ошибку самого приближения статического мюона, которая и доминирует.

Таблица 3

Вклады эффектов рассеяния света на свете (рис.1) в лэмбовский сдвиг ($2p-2s$) в мюонном водороде, дейтерии и ионе гелия-4

Вклад	$\Delta E(\mu\text{H})$ [мэВ]	$\Delta E(\mu\text{D})$ [мэВ]	$\Delta E(\mu^4\text{He})$ [мэВ]
1:3	-0.001018(4)	-0.001098(4)	-0.01995(6)
2:2	0.00115(1)	0.00124(1)	0.0114(4)
3:1	-0.00102(1)	-0.00110(1)	-0.0050(2)
Всего	-0.00089(2)	-0.00096(2)	-0.0136(6)

В заключение отметим малость численных коэффициентов в табл.1 и 2, характерную для не зависящих от спинов нерелятивистских вкладов рассеяния света на свете в уровни энергии.

Как мы отметили, полученные в данной работе результаты для вклада 2:2 (см. табл.2) несколько ниже результатов работ Бори (Borie) [14, 9, 10]. Разность для мюонного водорода и дейтерия находится на уровне 20% и составляет не более полутора стандартных отклонений. В случае мюонного гелия наш результат (0.01140(2) мэВ) также находится ниже результата Бори (0.02 мэВ), однако последний приведен в [10] в таком виде, что можно оценить скорее масштаб погрешности, чем ее величину.

Подобную разницу в результатах ни в коем случае нельзя рассматривать как противоречие, однако она носит систематический характер (все наши результаты ниже результатов Бори) и, строго говоря, требует отдельных разъяснений.

В связи с этим мы провели проверку двух наиболее важных элементов наших вычислений, а именно, выражения для блока рассеяния света на свете (13) и интегрирования по импульсам k_i в (4). Проверкой представления для \mathcal{L} стало вычисление хорошо известного вклада 1:3 (см. табл.1), а также исследование выражения (13) для блока рассеяния света на свете в случае, когда один из фотонов имеет нулевой импульс.

Чтобы убедиться в отсутствии возможной систематической ошибки при интегрировании по импульсам при помощи фейнмановских параметров, мы провели независимые расчеты вклада 2:2, в котором интегралы по импульсам k_i в соответствующем выражении (4) брались непосредственно. Результаты имеют точность 4% для мюонного водорода и 3% для мюонного гелия и находятся в прекрасном согласии с результатами табл.2.

Проведенные проверки позволяют, в целом, считать наши результаты надежными.

Работа выполнена при поддержке DFG (грант GZ 436 RUS 113/769/0-3), а Е.Ю.К. был также поддержан фондом Династия.

1. R. Pohl, A. Antognini, F. Nez et al., *Nature*, в печати (2010).
2. T. Kinoshita and M. Nio, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3240 (1999).
3. V. G. Ivanov, E. Yu. Korzinin, and S. G. Karshenboim, *Phys. Rev. D* **80**, 027702 (2009); см. также: eprint arXiv:0905.4471.
4. T. Kinoshita and M. Nio, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 079901 (2009) (errata).
5. S. G. Karshenboim, V. G. Ivanov, E. Yu. Korzinin, and V. A. Shelyuto, *Phys. Rev. A* **81**, 060501 (2010); см. также: eprint arXiv:1005.4879.
6. M. I. Eides, H. Grotch, and V. A. Shelyuto, *Theory of Light Hydrogenic Bound States*, Springer Tracts Mod. Phys. **222**, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.
7. K. Pachucki, *Phys. Rev. A* **53**, 2092 (1996).
8. M. I. Eides, H. Grotch, and V. A. Shelyuto, *Phys. Rep.* **342**, 63 (2001).
9. E. Borie, *Phys. Rev. A* **72**, 052511 (2005).
10. E. Borie and G. A. Rinker, *Phys. Rev. A* **18**, 324 (1978).
11. P. Vogel, *At. Data Nucl. Data Tables* **14**, 599 (1974).
12. E. Borie and G. A. Rinker, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 67 (1982).
13. K. Blomquist, *Nucl. Phys. B* **48**, 95 (1972).
14. E. Borie, *Phys. Rev. A* **71**, 032508 (2005).
15. E. Borie, *Nucl. Phys. A* **267**, 485 (1976).
16. P. Lepage, *J. Comput. Phys.* **27**, 192 (1978); preprint CLNS-80/447.
17. A. P. Martynenko, *Phys. Rev. A* **76**, 012505 (2007).