Письма в ЖЭТФ, том 51, вып. 10, стр. 493–495 *25 мая 1990 г.*

НОВОЕ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ МАССЫ

В.С.Манько, Ш.А.Хакимов

Получено точное асимптотически плоское решение вакуумных уравнений Эйнштейна, описывающее внешнее гравитационное поле вращающейся осесимметричной массы и обладающее статическим шварцшильдовским пределом. Оно содержит известную метрику Керра как частный случай.

В [1] впервые было получено отличное от метрики Керра [2] асимптотически плоское стационарное решение вакуумных уравнений Эйнштейна, имеющее своим статическим пределом метрику Шварцшильда. В настоящей работе рассмотрено новое осесимметричное решение, которое обобщает решение [1], а также содержит как частный случай метрику Керра; при этом, благодаря дополнительному параметру, в нашем решении квадрупольный момент Q источника гравитационного поля может быть произвольным, не зависящим строго от полной массы M и углового момента J (для керровского решения, как известно, $Q = J^2/M$ [3]). Рассматриваемая метрика обладает горизонтом событий.

Решение, полученное нами методом нелинейной суперпозиции (см., например, [4]), определяется комплексным потенциалом Эрнста [5] вида

$$\epsilon = \frac{R_+ + R_- - 2k}{R_+ + R_- + 2k} \frac{A_-}{A_+};$$

$$A_\mp = 16 r_+^2 r_-^2 - \alpha^2 (r_+ + r_- \mp 2kl)(r_+ + r_- \pm 2kl)^3 ab +$$

$$+ 4i\alpha (r_+ + r_- \pm 2kl)[r_+^2 (r_+ - r_- \mp 2kl) a + r_-^2 (r_+ - r_- \pm 2kl) b];$$

$$a = \frac{\rho^2 + (z-k)(z-kl) + r_- R_-}{\rho^2 + (z+k)(z-kl) + r_- R_+}; \qquad b = \frac{\rho^2 + (z+k)(z+kl) + r_+ R_+}{\rho^2 + (z-k)(z+kl) + r_+ R_-}; \tag{1}$$

$$R_\pm^2 = \rho^2 + (z \pm k)^2; \qquad r_\pm^2 = \rho^2 + (z \pm kl)^2,$$

где ρ и z – канонические координаты Вейля–Папапетру, а α, k, l – действительные постоянные.

Соответствующие неизвестные функции f, γ и ω, входящие в метрику Папапетру

$$ds^2 = f^{-1}[e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2] - f(dt - \omega d\varphi)^2, \tag{2}$$

которая описывает стационарные осесимметричные гравитационные поля, могут быть построены по известному ϵ с помощью методики, разработанной в [6-8]; результатом являются следующие выражения

$$f=\frac{4(R_+ + R_- - 2k)B}{(R_+ + R_- + 2k)C}\,; \qquad \exp(2\gamma)=\frac{(R_+R_- + \rho^2 + z^2 - k^2)B}{32(1-\alpha^2)^2 R_+R_- r_+^4 r_-^4}\,;$$

$$\omega=\frac{4\alpha k l}{\alpha^2-1}-\frac{\alpha(R_+ + R_- + 2k)(r_+ + r_- - 2kl)D}{(R_+ + R_- - 2k)B}\,; \tag{3}$$

$$B=[4r_+^2r_-^2-\alpha^2(r_+r_- + \rho^2 + z^2 - k^2l^2)^2ab]^2-16\alpha^2k^2l^2\rho^2(r_+^2a+r_-^2b)^2\,;$$

$$C=[8r_+^2r_-^2-\alpha^2(r_+r_- + \rho^2 + z^2 - k^2l^2)(r_+ + r_- - 2kl)^2ab]^2+$$

$$+4\alpha^2(r_+ + r_- - 2kl)^2[(r_+ - r_- + 2kl)r_+^2a+(r_+ - r_- - 2kl)r_-^2b]^2\,;$$

$$D=8r_+^3r_-^3[(r_+ - r_- - 2kl)r_-b-(r_+ - r_- + 2kl)r_+a]-$$

$$-\alpha^2(r_+r_- + \rho^2 + z^2 - k^2l^2)(r_+ + r_- - 2kl)^2\ [(r_+ - r_- - 2kl)r_-^3b-(r_+ - r_- + 2kl)r_+^3a]ab.$$

Соотношения (3), (1) полностью определяют новую стационарную метрику. Ее статическим пределом (который достигается, если положить $\alpha=0$) является сферически-симметричная метрика Шварцшильда.

С помощью системы аналитических вычислений Reduce 3.3 нами были вычислены первые четыре мультипольных момента M_l и J_l по Герочу–Хансену [9,10], характеризующих соответственно распределение массы и углового момента источника

$$M_0\equiv M=k(1+2\alpha^2l-\alpha^2)(1-\alpha^2)^{-1};\ M_1=M_3=0;$$

$$M_2\equiv Q=2\alpha^2k^3l[(\alpha^4+6\alpha^2-3)l^2-2(\alpha^2+2)(\alpha^2-1)l+(\alpha^2-1)^2](\alpha^2-1)^{-3}\,; \tag{4}$$

$$J_0=J_2=0;\quad J_1\equiv J=-2\alpha k^2l[(3\alpha^2-1)l-2\alpha^2+2](\alpha^2-1)^{-2}\,;$$

$$J_3=2\alpha k^4l^2[(5\alpha^6+11\alpha^4-9\alpha^2+1)l^2-2(5\alpha^2-1)(\alpha^4-1)l+(\alpha^2-1)^2(5\alpha^2+1)](\alpha^2-1)^{-4},$$

откуда, из равенства нулю монопольного члена J_0, сразу же следует, что метрика (3) является асимптотически плоской.

Частными случаями полученного решения являются:

1) Метрика Керра, которая отвечает выбору $l=1$; вводя $p=(1-\alpha^2)/(1+\alpha^2)$, $q=2\alpha/(1+\alpha^2)$, $p^2+q^2=1$, ее нетрудно привести к стандартному виду. Отметим, что из (4) при $l=1$ получается уже отмечавшаяся раньше специальная зависимость между мультипольными моментами M_2, J_1 и M_0.

2) Случаю $l=-1$ соответствует двупараметрическое решение, найденное в [1].

3) При $\alpha=0$ (отсутствие вращения) происходит переход к метрике Шварцшильда, и полная масса M_0 становится равной k; то, что этот переход осуществляется также и при равенстве нулю "квадрупольного" параметра l, означает очевидный с физической точки зрения факт, согласно которому первоначально покоящийся сферически-симметричный источник при вращении неизбежно будет испытывать деформации.

4) Наконец, при $k = 0$ (равенство нулю полной массы) пространство–время становится плоским.

В общем же случае рассмотренное решение описывает внешнее гравитационное поле вращающегося источника, полная масса, угловой и квадрупольный моменты которого определяются соотношениями (4).

Важным физическим свойством метрики (3) является то, что она имеет горизонт событий, который задается гиперповерхностью

$$R_+ + R_- - 2k = 0 \tag{5}$$

(это утверждение несложным образом доказывается по аналогии с [11]). Горизонт является регулярным в случае решения Керра ($l = 1$) и решения Шварцшильда ($\alpha = 0$ или $l = 0$). При $|l| > 1$ горизонт содержит только одну особенность, расположенную на оси симметрии (в сфероидальных координатах $r = M + (R_+ + R_-)/2$, $\cos\vartheta = (R_+ - R_-)/(2k)$ ей соответствует точка $r = M + k$, $\vartheta = 0$); при $|l| < 1, l \neq 0$ на горизонте появляются две дополнительные кольцевые сингулярности, соответствующие значениям $\cos\vartheta = \pm l$. В частном случае решения [1], когда $l = -1$, сингулярными оказываются только два полюса $\cos\vartheta = \pm 1$. Расчет площади гиперповерхности (5) в общем случае затруднителен, однако при $l = -1$ вычисления приводят к следующему компактному выражению

$$A = 16\pi k^2 (1 - \alpha^2)^{-1}, \tag{5}$$

которое переходит при $\alpha = 0$ в известный результат для площади горизонта шварцшильдовской метрики.

Что касается других сингулярностей решения при $l \neq 1$, то они определяются уравнениями $R_+ + R_- + 2k = 0$ и $C = 0$, причем действительные корни второго уравнения лежат на поверхности предела стационарности $B = 0$. Из теоремы Робинсона [12] следует также, что не все они спрятаны под горизонтом, а часть из них должна находиться во внешней области.

В заключение отметим, что рассмотренная метрика относится к типу I по классификации Петрова, вырождаясь в тип D только при значениях параметров $\alpha = l = 0$ и $l = 1$; она хорошо иллюстрирует предвидение Эрнста [13] относительно возможной большой физической значимости метрик этого типа.

Литература

1. *Gutsunaev Ts.I., Manko V.S.* Class. Quant. Grav., 1989, **6**, L137.
2. *Kerr R.P.* Phys. Rev. Lett., 1963, **11**, 237.
3. *Hernandez W.* Phys. Rev., 1967, **159**, 1070.
4. *Gutsunaev Ts.I., Manko V.S.* Gen. Relat. Grav., 1988, **20**, 327.
5. *Ernst F.J.* Phys. Rev., 1968, **167**, 1175.
6. *Yamazaki M.* J. Math. Phys., 1981, **22**, 133.
7. *Cosgrove C.M.* J. Math. Phys., 1980, **21**, 2417.
8. *Dietz W., Hoenselaers C.* Proc. R. Soc. Lond., 1982, **a382**, 221.
9. *Geroch R.* J. Math. Phys., 1970, **11**, 2580.
10. *Hansen R.O.* J. Math. Phys., 1974, **15**, 46.
11. *Castejon-Amenedo J. et al.* Class. Quant. Grav., 1989, **6**, L211.
12. *Chandrasekhar S.* The Mathematical Theory of Black Holes. Oxford: Oxford University Press, 1983.
13. *Ernst F.J.* J. Math. Phys., 1976, **17**, 52.

Университет дружбы народов
им. Патриса Лумумбы

Поступила в редакцию
19 марта 1990 г.