Письма в ЖЭТФ, том 51, вып. 11, стр. 541 – 543 *10 июня 1990 г.*

КВАНТОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЧАСТИЦЫ С КРУЧЕНИЕМ: К РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ АНИОНА

Дам Тхань Шон, С.Ю.Хлебников

Показано, что квантовая частица с кручением в псевдоевклидовом трехмерном пространстве характеризуется неквантованным значением спина (анион) и бесконечным набором внутренних возбуждений.

В последнее время большой интерес привлекают теории частиц и струн, содержащие в действии высшие производные динамических величин [1, 2]. Для трехмерной точечной частицы существует особый инвариант такого рода – кручение

$$T = \int \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda}\dot{x}_\mu \ddot{x}_\nu \dddot{x}_\lambda}{[\dot{x}, \ddot{x}]^2} \sqrt{\dot{x}^2}\, d\tau . \tag{1}$$

В евклидовом случае квантовая теория частицы с кручением строилась с помощью интеграла по траекториям [3] (мера интегрирования подробно обсуждается в [4]). При определенных значениях коэффициента, с которым (1) входит в действие, происходит трансмутация спина.

В данной работе мы рассматриваем частицу с кручением в псевдоевклидовом пространстве, действие есть

$$S = -m \int \sqrt{\dot{x}^2}\, d\tau + cT, \tag{2}$$

где $x_\mu(\tau)$, $\mu = 0, 1, 2$ – времениподобная траектория, $c > 0$. Наши результаты таковы. Каноническое квантование по Дираку [5] приводит, после переопределения скобок Пуассона, к спиновой алгебре группы $SU(1,1)$. Волновая функция частицы удовлетворяет уравнению

$$(k^\mu S_\mu - cm)\psi = 0, \tag{2}$$

где k^μ – оператор энергии-импульса, а S_μ – генераторы представления $SU(1, 1)$ (точнее, ее универсальной накрывающей) с $S^2 = c(c-1)$. Это уравнение описывает частицу с неквантованным спином c (релятивистская версия аниона [6]). Поскольку представление бесконечномерно, частица характеризуется бесконечным спектром внутренних возбуждений. В евклидовом варианте параметр c квантован, а (3) превращается в уравнение дираковского типа с конечным спектром.

Для канонической формулировки теории (2) введем единичные времени- и пространственно-подобные вектора e_μ и n_μ, такие что $\dot{x}_\mu = qe_\mu$, $\dot{e}_\mu = Qn_\mu$, и перейдем к действию

$$S' = \int d\tau \, (-mq + c\epsilon^{\mu\nu\lambda} e_\mu n_\nu \dot{n}_\lambda - k^\mu(\dot{x}_\mu - qe_\mu) - p^\mu(\dot{e}_\mu - Qn_\mu) + \alpha(e^2-1) + \beta(n^2+1)), \tag{4}$$

где k_μ, p_μ, α, β – лагранжевы множители. Видно, что (x_μ, k_μ) и (e_μ, p_μ) являются каноническими парами.

Полная система связей (первичных и вторичных) при ненулевой кривизне $\zeta = Q/q \neq 0$ есть

$$\alpha = \pi_\alpha = 0, \;\; \beta = \pi_\beta = 0, \;\; Q - c^{-1} q\epsilon^{\mu\nu\lambda} e_\mu n_\nu k_\lambda = 0, \;\; \pi_Q = 0,$$

$$n^2 + 1 = 0, \;\; e^\mu n_\mu = 0, \;\; k^\mu n_\mu = 0, \;\; \pi_n^\mu + c\epsilon^{\mu\nu\lambda} e_\nu n_\lambda = 0,$$

$$e^2 - 1 = 0, \quad p = 0,$$

$$\pi_q = 0 \tag{5}$$

$$k^\mu e_\mu - m = 0, \tag{6}$$

где π обозначают канонические импульсы. С помощью этой системы исключаются (λ, π_λ), (μ, π_μ), (Q, π_Q). Кроме того, можно выразить (n_μ, π_n^μ) через оставшиеся переменные, но, поскольку и n_μ и π_n^μ отличны от нуля, переопределение скобок Пуассона в этом случае нетривиально. Вычислим каноническую 2-форму на подпространстве, определяемом связями, в параметризации $e_\mu = (\mathrm{ch}\theta, \mathrm{sh}\theta\cos\varphi, \mathrm{sh}\theta\sin\varphi)$.

$$dp^\mu \wedge de_\mu + d\pi_n^\mu \wedge dn_\mu = -c\,\mathrm{sh}\theta\, d\theta \wedge d\varphi, \tag{7}$$

откуда $\{\theta, \varphi\} = -(c\,\mathrm{sh}\theta)^{-1}$, или, эквивалентно,

$$\{e_\mu, e_\nu\} = -c^{-1} \epsilon_{\mu\nu\lambda} e^\lambda . \tag{8}$$

(В евклидовом пространстве вместо (7) получим $c\sin\theta d\theta \wedge d\varphi$). Итак, мы заключаем, что частица описывается гамильтонианом $H = q(m - k^\mu e_\mu)$, со связями первого рода (5), (6) и алгеброй (8) для компонент единичного вектора e_μ.

Можно показать, что классическая траектория частицы представляет собой спираль. Сохраняющимися величинами являются энергия-импульс k^μ и угловой момент M^μ. Момент равен

$$M^\mu = \epsilon^{\mu\nu\lambda}(x_\nu k_\lambda + e_\nu p_\lambda + n_\nu \pi_{n\,\lambda}) = \epsilon^{\mu\nu\lambda} x_\nu k_\lambda + ce^\mu , \tag{9}$$

т.е. частица приобретает спин, равный c, в направлении скорости. В классической теории из системы связей следует соотношение $k^2 = m^2 - c^2\zeta^2$, где ζ – постоянная кривизна траектории. Это соотношение было получено другим способом в [7], и предполагалось, что оно означает присутствие тахиона в квантовой теории. Мы увидим ниже, что это не так.

Фазовое пространство системы представляет собой прямое произведение плоского пространства переменных (x, k) и двумерного гиперболоида (или сферы в евклидовом случае). Квантование на гиперболоиде производится с помощью когерентных состояний группы $SU(1,1)$ [8]. Величины $S_\mu = ce_\mu$ становятся генераторами группы, а связь (6) превращается в уравнение (3). Пусть вектор состояния ψ принадлежит унитарному представлению, базисные векторы которого перечисляются неотрицательным целым числом n

$$S_0 \,|\, c, n\rangle = (c + n) \,|\, c, n\rangle . \tag{10}$$

Тогда спектр масс есть

$$E_n = \frac{cm}{c+n}, \qquad n = 0, 1 \quad \ldots \quad . \tag{11}$$

Заметим, что спектр не обрывается даже при целых и полуцелых c, когда возможно евклидово квантование.

Таким образом, мы показали, что квантовая теория (2) в псевдоевклидовом трехмерном пространстве описывает релятивистскую частицу с неквантованным спином c и бесконечным набором внутренних возбуждений. Кажется возможным построить вторично-квантованную версию теории, заменяя в (3) ψ операторной функцией.

Литература

1. *Polyakov A.M.* Nucl. Phys. B, 1986, **268**, 406.
2. *Pisarsky R.D.* Phys. Rev. D, 1986, **34**, 670.
3. *Polyakov A.M.* Mod. Phys. Lett. A, **1988, 3**, 325.
4. *Iso S. et al.* Phys. Lett., B, 1990, **236**, 287.
5. *Дирак П.А.М.* Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968.
6. *Wilczek F.* Phys. Rev. Lett. 1982, **48**, 1144; **49**, 957.
7. *Plyushchay M.S.* Phys. Lett. B, 1990, **235**, 47.
8. *Berezin F.A.* Comm. Math. Phys., 1975, **40**, 153; *Переломов А.М.* Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987.

Институт ядерных исследований
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
17 апреля 1990 г.