Письма в ЖЭТФ, том 51, вып. 11, стр. 543 – 546 *10 июня 1990 г.*

КРИТИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ ОДНОМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ НА РЕШЕТКЕ

А.В.Забродин

Найдены критические индексы и длинноволновая асимптотика корреляционных функций в одномерных нерелятивистских моделях теории поля на решетке.

1. Использование аппарата конформной теории поля дало эффективный метод исследования корреляционных свойств одномерных квантовых систем [1–6]. Идея этого подхода заключается в том, что подобные системы в длинноволновом пределе обладают конформной симметрией, поскольку при нулевой температуре в них происходит фазовый переход. При этом корреляционные функции спадают на больших расстояниях по степенному закону. Показатели степени (критические индексы) могут быть выражены через энергии нижайших возбуждений системы в большом, но конечном объеме [1].

Для точно решаемых моделей этот подход был развит в работах [2, 4–6]. В дальнейшем он был обобщен на континуальные модели теории поля с дальнодействием. Оказалось, что в этих случаях длинноволновые свойства системы описываются гауссовой моделью – простейшей конформной теорией с единичным центральным зарядом. Как известно, спектр размерностей гауссовой модели зависит от одного непрерывного параметра. При этом значение этого параметра для конкретных моделей (а с ним и все критические индексы) определяется характером взаимодействия на малых расстояниях и выражается универсальным образом через скорость безмассовых возбуждений в системе.

Однако для моделей на решетке подобные общие соотношения между критическими индексами и термодинамическими величинами не были известны. В этой работе мы получим универсальные формулы, выражающие критические индексы через термодинамические параметры системы.

Рассмотрим систему бесспиновых частиц на одномерной решетке с гамильтонианом

$$H = -\sum_{x=1}^{L}(\psi^+_{x+1}\psi_x + \psi^+_x\psi_{x+1} - 2\psi^+_x\psi_x) + g\sum_{x,y}\psi^+_x\psi_x V_{x-y}\psi^+_y\psi_y - \mu\sum_{x=1}^{L}\psi^+_x\psi_x, \tag{1}$$

где ψ^+_x, ψ_x – решеточные бозе- или ферми-операторы, V_{x-y} – некоторый отталкивающий потенциал парного взаимодействия ($V_x = V_{-x}$), $g > 0$ – константа связи, μ – химический потенциал. Пусть ϵ_0 – плотность энергии основного состояния системы, тогда $\rho = \partial\epsilon_0/\partial\mu$ – равновесная плотность частиц при нулевой температуре. В дальнейшем мы будем предполагать, что потенциал и плотность таковы, что щель в спектре возбуждений системы отсутствует. При этом условии наши рассуждения не зависят от явного вида V_x. Сформулировать какие-либо точные условия на V_x довольно трудно, хотя из качественных соображений ясно, что щель отсутствует для весьма широкого класса потенциалов. Граничные условия в (1) предполагаются периодическими; при этом удобно представлять себе решетку свернутой в кольцо – эта интерпретация будет использована в п. 2.

2. Как известно, масштабные размерности h примарных операторов ϕ связаны с энергиями E^ϕ_L наинизших возбуждений системы в ящике длины L (таких, что $\langle vac|\phi|\phi\rangle \neq 0$) следующим образом [1, 2]:

$$E^\phi_L - E^{vac}_L = 2\pi v L^{-1} h. \tag{2}$$

Здесь $|vac\rangle$ – физический вакуум, v – групповая скорость на поверхности Ферми (скорость звука), $E^{vac}_L = \epsilon_0 L$ – энергия основного состояния системы. Длинноволновая асимптотика одновременного коррелятора полей ϕ имеет вид

$$\langle vac|\phi(x)\phi(0)|vac\rangle \sim \cos(P_\phi x)\,x^{-2h}, \tag{3}$$

где P_ϕ – импульс состояния $|\phi\rangle$, отличный от нуля при наличии щели в спектре оператора импульса.

Итак, для того чтобы найти спектр размерностей в системе (1), достаточно с точностью L^{-1} найти энергии всех нижайших возбуждений. Начнем с тех возбуждений, которые сохраняют число частиц. Прежде всего, в случае отсутствия энергетической щели имеется простейшее возбуждение с импульсом $\pm 2\pi/L$ и энергией $2\pi v/L$ (один фонон). Отсюда размерность соответствующего оператора $h = 1$, что совпадает с канонической размерностью оператора плотности $\psi^+_x\psi_x$. Далее, в спектре $\epsilon(p)$ имеется периодическая ветвь с периодом $2\pi\rho$: $\epsilon(2m\pi\rho) = 0$. При больших, но конечных L энергии этих состояний $\epsilon^{(m)}$ уже не равны нулю: $\epsilon^{(m)} \sim L^{-1}$. Энергии $\epsilon^{(m)}$ этих состояний $|\phi_m\rangle$ нам и надо найти. В системах, обладающих галилеевой инвариантностью, состояния $|\phi_m\rangle$ соответствуют движению системы как целого [7, 8], и их энергии вычисляются тривиально: $\epsilon^{(m)} = 4\pi^2 m^2 \rho L^{-1}$. На решетке галилеева инвариантность отсутствует, и необходим другой подход.

Будем искать состояния $|\phi_m\rangle$ в виде

$$|\phi_m\rangle = \sum_{\{x_j\}} \exp(ip_m \sum_{j=1} x_j)\Psi_m(x_1,\dots,x_N) \prod_{k=1}^{N} \psi^+_{x_k}|0\rangle, \tag{4}$$

где $p_m = 2\pi m/L$, $|0\rangle$ – голый вакуум. При $m=0$ $|\phi_0\rangle = |vac\rangle$, и Ψ_0 является волновой функцией основного состояния в координатном представлении. При $m \neq 0$ Ψ_m не должна сильно отличаться от Ψ_0 из-за малости p_m.

Подействуем гамильтонианом H (1) на состояние (4) и подберем Ψ_m так, чтобы (4) являлось его собственным ст состоянием с наинизшей энергией при фиксированном полном импульсе $2\pi m\rho$. Легко убедиться, что для этого Ψ_m должна быть волновой функцией основного состояния (в N-частичном секторе) следующего гамильтониана $H(p)$ при $p=p_m$:

$$H(p) = H + (1-\cos p)\sum_{x=1}^{L}(\psi^+_{x+1}\psi_x + \psi^+_x\psi_{x+1}) - i\sin p\sum_{x=1}^{L}(\psi^+_{x+1}\psi_x - \psi^+_x\psi_{x+1}). \tag{5}$$

Этот гамильтониан получается из H преобразованием $\psi^+_x \to \exp(ipx)\psi^+_x$, $\psi_x \to \exp(-ipx)\psi_x$, причем $H(0)=H$. В силу калибровочной инвариантности это преобразование эквивалентно помещению системы (1) в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости кольца, в которое свернута решетка (см. п. 1). Очевидно, p квантуется ($p=p_m$), и поток магнитного поля через кольцо равен $2\pi m$.

Для сдвига энергии основного состояния $H(p)$ по сравнению с H можно написать[1)] (в порядке L^{-1}):

$$\epsilon^{(m)} = {}^1\!/_2\, L p_m^2 (\partial^2\epsilon_0/\partial p^2)_{p=0} = 2\pi v L^{-1}\pi\eta v^{-1} m^2. \tag{6}$$

При отсутствии галилеевой инвариантности импульс p и плотность потока $j = i\langle\psi^+_{x+1}\psi_x - \psi^+_x\psi_{x+1}\rangle$, вообще говоря, не пропорциональны друг другу, и введенная в (6) восприимчивость

$$\eta = \partial^2\epsilon_0/\partial p^2 = \partial j/\partial p \tag{7}$$

характеризует связь этих величин в системе (1).

Подействовав гамильтонианом H на (4) найдем, что энергия состояния $|\phi_m\rangle$ равна $\epsilon^{(m)}$ (6). Сравнивая с (2), получим размерности соответствующих примарных операторов: $h_{0,m} = \pi\eta v^{-1} m^2$.

Теперь рассмотрим возбуждения, меняющие число частиц. В случае бозонной статистики добавление в систему n частиц приводит к возрастанию энергии на ${}^1\!/_2\, n^2\chi^{-1}L^{-1}$, где $\chi = \partial\rho/\partial\mu = \partial^2\epsilon_0/\partial\mu^2$ – восприимчивость, "дуальная" к η (7). Сравнив с (2), получим новый набор размерностей $h_{n,0} = (4\pi v\chi)^{-1} n^2$.

Между скоростью звука v и восприимчивостями η, χ имеется связь совершенно общего характера. Действительно, в силу соотношения (7) между импульсом и плотностью потока волновое уравнение, описывающее распространение длинных волн, примет вид $\chi\partial^2 u/\partial t^2 = \eta\partial^2 u/\partial x^2$ ($u(x,t)$ – смещение частиц среды, причем x здесь можно рассматривать как

1) Разумеется, такой же результат получается и после вычисления сдвига энергии по теории возмущений, причем для получения ответа в порядке L^{-1} достаточно учесть первые два порядка по p.

непрерывную переменную). Отсюда получаем универсальное соотношение

$$v^2 = \eta \chi^{-1} \tag{8}$$

3. Таким образом, комбинируя различные типы возбуждений, находим с учетом (8) полный спектр размерностей в виде

$$h_{n,\,m} = n^2/R^2 + m^2 R^2/4, \tag{9}$$

где

$$R^2 = 4\pi v \chi \ . \tag{10}$$

Мы получили спектр размерностей гауссовой модели [9]. Для бозонов числа n, m – целые. Как следует из простых соображений, основанных на свойствах симметрии волновой функции, импульс $P = 2\pi\rho m$ наинизших состояний (с нулевой энергией при $L \to \infty$), измеренный в единицах $2\pi\rho$, может быть либо целым, либо полуцелым (в зависимости от четности N) : $(-1)^{2m} = (-1)^{N-1}$ [7]. Поэтому для фермионов при n четном m – целое, при n нечетном m – полуцелое.

Пользуясь (3), теперь несложно выписать асимптотику корреляционных функций. Например, коррелятор фермионных полей ведет себя при $|y - x| \gg \rho^{-1}$ как

$$\langle vac \,|\, \psi_x^+ \psi_y \,|\, vac \rangle \sim \cos(\pi\rho |x - y|)\, |x - y|^{-2/R^2 - R^2/8}, \tag{11}$$

Это соответствует $n = 1$, $m = 1/2$ в (9). Выбор $n = 1$ диктуется тем, что в коррелятор (11) дают вклад только те промежуточные состояния, в которых число частиц отличается от вакуумного на 1. Для фермионов m при этом должно быть полуцелым; легко видеть, что минимальный показатель получается при $m = 1/2$. Другие корреляторы находятся аналогично.

Подчеркнем заключение, что (10) дает наиболее общую связь критических индексов с термодинамическими параметрами системы. При переходе к непрерывному пределу в (1) галилеева инвариантность восстанавливается, и (10) совпадает с ранее известной формулой [2, 7, 8, 10]. В случае точно интегрируемых магнетиков (10) совпадает с выражением, полученным ранее другими методами [11]. Отметим также, что в модели Хаббарда критические индексы были выражены через восприимчивость χ в работе [12].

Автор благодарен В.Е.Корепину, В.Я.Кривнову, А.Д.Миронову и А.А.Овчинникову за обсуждения и ценные замечания.

Литература

1. *Cardy J.L.* Nucl. Phys. B, 1986, **270** (FS16), 186.
2. *Боголюбов Н.М. и др.* Письма в ЖЭТФ, 1986, **44**, 405.
3. *Blöte H.W. et al.* Phys. Rev. Lett., 1986, **56**, 742; *Affleck I.* Phys. Rev. Lett., 1986, **56**, 746.
4. *Alcaraz F. et al.* Ann. Phys., 1988, **182**, 280.
5. *De Vega H.J., Karowski M.* Nucl. Phys. B, 1987, **285** (FS19), 619.
6. *Von Gehlen G. et al.* J. Phys. A, 1987, **20**, 2577.
7. *Mironov A.D., Zabrodin A.V.* Preprint FIAN, 1989; *Забродин А.В., Миронов А.Д.* ЖЭТФ, 1990, **97**, в печати.
8. *Haldane F.D.M.* J. Phys. C, 1981, **14**, 2585.
9. *Kadanoff L.P.* Ann. Phys., 1979, **120**, 39.
10. *Забродин А.В., Овчинников А.А.* ЖЭТФ, 1985, **88**, 1233.
11. *Bogoliubov N.M. et al.* Nucl. Phys. B, 1986, **275**, 687.
12. *Bogoliubov N.M., Korepin V.E.* Int. Journ. Mod. Phys. B, 1989, **3**, 427.

Поступила в редакцию
20 февраля 1990 г.

После переработки
18 апреля 1990 г.

Институт химической физики
Академии наук СССР