ТВИСТОРЫ, ГАРМОНИКИ И НУЛЬ-СУПЕР-p-БРАНЫ

И.А.Бандос[1)], *А.А.Желтухин*

Развит новый подход к описанию суперсимметричных протяженных объектов, основанный на использовании гармонических твистороподобных переменных. На примере теории нуль-суперструн и нуль-супермембран предложена альтернативная схема квантования, объединяющая концепцию гармоник и метод БРСТ–БФВ-квантования, модифицированный на основе идеи конверсии связей второго рода в связи первого рода.

Недавний прогресс в решении проблемы ковариантного квантования суперчастиц и суперструн показал эффективность использования гармонических и твисторных переменных для ковариантного разделения связей первого и второго рода [1-7]. В теории суперчастиц с $p^2 = 0$ твисторы $Z_\alpha^A = (\lambda_\alpha, \bar{\mu}^{\dot\alpha})$ и $(\overline{Z_\alpha^A})$ появляются в представлении Картана–Пенроуза (К–П) $p_{\alpha\dot\alpha} = \lambda_\alpha \bar\lambda_{\dot\alpha}$ для 4-импульса $p_{\alpha\dot\alpha} = \sigma^m_{\alpha\dot\alpha} p_m$. Аналогичное представление для нуль-векторов Π^m_+, Π^m_- в теории суперструн [1] предложено в [8]. Здесь мы предлагаем листовое ковариантное обобщение представления К–П для плотности импульса $\mathcal{P}^\mu_{\alpha\dot\alpha}$ ($\mu=(\tau, M)$; $M=1, \ldots, p$) суперсимметричного протяженного объекта размерности $p \geqslant 1$ – нуль-супер-p-браны [9], движущейся в пространстве–времени размерности $D = 4$ (случаю $p = 1$ отвечают нуль-суперструны [9,10]). Оно имеет вид

$$\mathcal{P}^\mu_{\alpha\dot\alpha} = \rho^{(-|+)\mu}(\tau, \vec\sigma) v^-_\alpha(\tau, \vec\sigma) \bar v^+_{\dot\alpha}(\tau, \vec\sigma). \tag{1}$$

Соотношение (1) позволяет перейти к новой твистороподобной формулировке теории нуль-супер-p-бран с N-расширенной СУСИ, определяемой действием

$$S = -\frac{1}{2} \int d\tau d^p\vec\sigma \rho^{(-|+)\mu}(\tau, \vec\sigma) v^-_\alpha(\tau, \vec\sigma) \bar v^+_{\dot\alpha}(\tau, \vec\sigma)\, \omega^{\dot\alpha\alpha}_\mu(\tau, \vec\sigma) \tag{2}$$

$$\omega^{\dot\alpha\alpha}_\mu = \omega^m_\mu \tilde\sigma^{\dot\alpha\alpha}_m, \quad \omega^m_\mu \equiv \partial_\mu x^m - (i\partial_\mu \theta^\alpha_i \sigma^m_{\alpha\dot\alpha} \bar\theta^{\dot\alpha i} + \text{к.с.}), \quad (i = 1, \ldots, N)$$

допускающей прямое ковариантное БРСТ-квантование по схеме БФВ, модифицированной в соответствии с [11-13]. Использованные в (1) и (2) бозонные переменные $v^\mp_\alpha \equiv v^{(0|\mp 1)}_\alpha$ и $\bar v^\pm_{\dot\alpha} \equiv \bar v^{(\pm 1|0)}_{\dot\alpha} = (v^\mp_\alpha)^*$, т.н. Лоренцевы гармоники [14], ограничены условиями $\Xi \equiv v^{\alpha-} v^+_\alpha - 1 = 0$, $\bar\Xi \equiv \bar v^-_{\dot\alpha} \bar v^{+\dot\alpha} - 1 = 0$ и связаны с твисторами Z^A_α, $(\overline{Z^A_\alpha})$, соотношениями $\lambda_\alpha = v^-_\alpha (\lambda^\beta \mu_\beta)^{1/2}$, $\mu_\alpha = v^+_\alpha (\lambda^\beta \mu_\beta)^{1/2}$ [2)]. Представление (1) получается из представления К–П, переписанного через v_α и $\bar v_{\dot\alpha}$ [14] $p_{\alpha\dot\alpha} = \rho^{(-|+)} v^-_\alpha \bar v^+_{\dot\alpha}$ заменой в нем $\rho^{(-|+)}$ на листовой вектор $\rho^{(-|+)\mu}$. Формулировка (2) использует координаты $X^{\hat A}$ расширенного гармонического суперпространства $X^A = (x^m, \theta^\alpha_i, \bar\theta^{\dot\alpha i}, v^\mp_\alpha, \bar v^\pm_{\dot\alpha}, \rho^{(-|+)\mu})$. Это не приводит к увеличению числа физических степеней свободы, поскольку гармоники v, $\bar v$, в силу уравнений движения, оказываются чисто калибровоч-

---

1) Харьковский государственный университет

2) Гармоники $v^\mp_\alpha$, $\bar v^\pm_{\dot\alpha}$ параметризуют фактор–пространство $SL(2\mathbb{C})/[U(1)]^{\mathbb{C}}$ [14], где $[U(1)]^{\mathbb{C}} \approx U_L(1) \otimes U_R(1) \approx SO(1,1) \otimes SO(2)$ комплексификация $U(1)$-группы "Индексы" $(0|\mp 1)$ и $(\pm 1|0)$ гармоник $v^\mp$ и $\bar v^\pm$ указывают их заряды относительно локальных групп $U_R(1)$ и $U_L(1)$ ($q_R(v^\mp) = -q_L(\bar v^\mp) = \mp 1$; $q_R(\bar v) = q_L(v) = 0$), которые определяются умножением матрицы из подгруппы $[U(1)]^{\mathbb{C}}$ с $SL(2\mathbb{C})$ на $SL(2\mathbb{C})$-матрицы $V^{(\beta)}_\alpha = (v^{(0|+1)}_\alpha, v^{(0|-1)}_\alpha)$. Для краткости $U_L(1)$ и $U_R(1)$, заряды некоторых переменных ниже опущены, например, $\rho^\tau \equiv \rho^{(-|+)\tau}$ (см. (2) и т.д.).

ными степенями свободы. Однако, они играют решающую роль в проводимом ниже лоренц-ковариантном разделении связей нуль-супер-p-бран (2) на неприводимые связи первого и второго рода. Связи первого рода в терминах $X^A_{(\rho)}$ и сопряженных к ним канонических импульсов $\mathcal{P}_A = (\mathcal{P}_m, \pi^i_\alpha, \bar{\pi}_{i\dot\alpha}, \mathcal{P}^{\pm}_\alpha, \mathcal{P}^{\mp}_{\dot\alpha}, \mathcal{P}^{(+|-)}_\mu) \equiv (-1)^{A+1}\frac{\partial L}{\partial \dot X^A}$, $\{X^A(\vec\sigma), \mathcal{P}_B(\vec\sigma')\} = \delta^A_B \delta_{\vec\sigma\vec\sigma'}$ • •($\delta_{\vec\sigma\vec\sigma'} \equiv \delta^\rho(\vec\sigma - \vec\sigma')$-$p$-мерная δ-функция) имеют вид

$$D^{-i} \equiv v^{\alpha-} D^i_\alpha \approx 0, \quad \nabla^{(0)} \equiv v^{\alpha+}\mathcal{P}^-_\alpha - v^{\alpha-}\mathcal{P}^+_\alpha + \rho^\tau \mathcal{P}^{(\rho)}_\tau \approx 0,$$

$$\nabla^{-2} \equiv v^{\alpha-}\mathcal{P}^-_\alpha \approx 0, \quad \mathcal{P}^{(+|-)} \equiv v^{\alpha-}\bar v^{\dot\alpha+}\mathcal{P}_{\alpha\dot\alpha} \approx 0, \quad \mathcal{P}^{(\rho)}_M \approx 0, \tag{3}$$

$$T_M \equiv \frac{1}{2}\omega^{\dot\alpha\alpha}_M \mathcal{P}_{\alpha\dot\alpha} + [\partial_M \theta^\alpha_i D^i_\alpha + \partial_M v^{\alpha-}\mathcal{P}^+_\alpha + \partial_M v^{\alpha+}\mathcal{P}^-_\alpha + \text{к.с.}] - \rho^\tau \partial_M \mathcal{P}^{(\rho)}_\tau \approx 0$$

и комплексно сопряженных (к.с.) соотношений $\bar D^+_i \approx 0$, $-\tilde\nabla^{(0)} \approx 0$, $\bar\nabla^{+2} \approx 0$. Спинорные связи D^i_α, $\bar D^{\dot\alpha}_i$ в (3) имеют стандартный вид $D^i_\alpha = -\pi^i_\alpha + i\mathcal{P}_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}_i = (\bar D^{\dot\alpha}_i)$. На скобках Пуассона $\{\ldots,\ldots\}$ связи (3) образуют алгебру

$$\{D^{-i}(\vec\sigma), \bar D^+_j(\vec\sigma')\}_+ = -2i\mathcal{P}^{+-}\delta^i_j\delta_{\vec\sigma\vec\sigma'}, \quad \{\nabla^{(0)}(\vec\sigma), Y_\Lambda(\vec\sigma')\} = q_R(Y_\Lambda)Y_\Lambda\delta_{\vec\sigma\vec\sigma'}$$
$$\{T_M(\vec\sigma), Y_\Lambda(\vec\sigma')\} = -Y_\Lambda(\vec\sigma')\partial'_M\delta_{\vec\sigma\vec\sigma'}, \quad \{T_M(\vec\sigma), T_N(\vec\sigma')\} = T_M(\vec\sigma')\partial'_N\delta_{\vec\sigma\vec\sigma'} - (\vec\sigma \leftrightarrow \vec\sigma'), \tag{4}$$

где Y_Λ обозначают любую из связей первого рода (3), а $q_R(Y_\Lambda)$ – заряд этой связи относительно $U_R(1)$ подгруппы ($q_R(T_M, \bar\nabla^{+2}, \bar D^+_i, \tilde\nabla^{(0)}, \nabla^{(0)}) = 0$, $q_R(D^{-i}) = q_R(\mathcal{P}^{(+|-)}) = -1$, $q_R(\nabla^{-2}) = -2$). Все остальные скобки связей (3) либо равны нулю, либо получаются из (4) комплексным сопряжением ($q_R(Y_\Lambda) = -q_L(\bar Y_\Lambda)$). Генераторы $\mathcal{P}^{+-}$ и T_M отвечают репараметризационной симметрии действия (2), D^{-i} и $\bar D^+_i$ – Зигелевской СУСИ, $\nabla^{(0)}$ и $\tilde\nabla^{(0)}$ локальной $SO(1,1) \otimes SO(2)$, а ∇^{-2} и $\bar\nabla^{+2}$ – локальным сдвигам v^+ и $\bar v^-$ гармоник.

Связи второго рода, приведенные к канонической симплектической форме, представляются в виде соотношений

$$(D^{+i})_{diag} \equiv \frac{v^{+\alpha}D^i_\alpha}{\sqrt{(\Xi+1)}} \approx 0, \quad \chi \equiv v^{\alpha+}\mathcal{P}^-_\alpha + v^{\alpha-}\mathcal{P}^+_\alpha + \rho^\tau\mathcal{P}^{(\rho)}_\tau \approx 0,$$
$$\nabla^{+2} \equiv v^{\alpha+}\mathcal{P}^+_\alpha \approx 0, \quad (\mathcal{P}^{--})_{diag} \equiv \frac{\mathcal{P}^{--}}{\sqrt{(1+\Xi)(1+\bar\Xi)}}, \quad \Xi \equiv v^{\alpha-}v^+_\alpha - 1 \approx 0, \tag{5}$$
$$(\rho^\tau)_{diag} \equiv \frac{\rho^\tau - \mathcal{P}^{-+}}{\sqrt{(1+\Xi)(1+\bar\Xi)}}, \quad (\mathcal{P}^{(\rho)}_\tau)_{diag} \equiv \sqrt{(1+\Xi)(1+\bar\Xi)}\,\mathcal{P}^{(\rho)}_\tau$$

и к.с. к ним, при этом $\mathcal{P}^{-+} \equiv v^{\alpha+}\bar v^{\dot\alpha-}\mathcal{P}_{\alpha\dot\alpha}$, $\mathcal{P}^{--} \equiv -v^{\alpha-}\bar v^{\dot\alpha+}\mathcal{P}_{\alpha\dot\alpha} = (\overline{\mathcal{P}^{++}})$. Симплектическая структура "диагонализованных" связей второго рода (5) описывается следующими, отличными от нуля скобками Пуассона ($J^{(-+)} \equiv \frac{\mathcal{P}^{(-+)}}{\sqrt{(1+\Xi)(1+\bar\Xi)}}$)

$$\{(D^{+i})_{diag}(\vec\sigma), (\bar D^-_i)_{diag}(\vec\sigma')\} = -2iJ^{-+}\delta^i_j\delta_{\vec\sigma\vec\sigma'}, \quad \{(\mathcal{P}^{(\rho)}_\tau)_{diag}(\vec\sigma), (\rho^\tau)_{diag}(\vec\sigma')\} = \delta_{\vec\sigma\vec\sigma'}$$
$$\{\nabla^{+2}(\vec\sigma), (\mathcal{P}^{--})_{diag}(\vec\sigma')\} = -J^{-+}\delta_{\vec\sigma\vec\sigma'}, \quad \{\Xi(\vec\sigma), \chi(\vec\sigma')\} = -2(1+\Xi)\delta_{\vec\sigma\vec\sigma'} \tag{6}$$

и к.с. к ним. Причем $\{J^{(-+)}(\vec\sigma), (\text{связи второго рода (5)})\} = 0$.

Центральной проблемой в схеме БРСТ–БФВ-квантования [11-13] является проблема абелизации алгебры связей второго рода путем добавления новых пар канонических переменных. В нашем случае связи второго рода (5) уже приведены к симплектической форме, поэтому их конверсия в абелизованные связи не представляет труда и приводит к новым связям первого рода, имеющим вид

$$
\begin{aligned}
&(D^{+i})_{AБ} = (D^{+i})_{diag} + J^{1/2}\psi^i \approx 0, \quad \chi_{AB} \equiv \chi - p_2 \approx 0, \quad \nabla^{+2}_{AБ} \equiv \nabla^{+2} + p_1 \approx 0, \\
&(\mathcal{P}^{--})_{AБ} \equiv (\mathcal{P}^{--})_{diag} - Jq_1 \approx 0, \quad \Xi_{AБ} \equiv e^{2q_2}(1+\Xi) - 1 \approx 0, \\
&(\mathcal{P}^{(\rho)}_{\tau})_{AБ} \equiv (\mathcal{P}^{(\rho)}_{\tau})_{diag} + p_3 \approx 0, \quad (\rho^{\tau})_{AБ} \equiv (\rho^{\tau})_{diag} - q_3 \approx 0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

и к.с. к ним. Отличные от нуля скобки Пуассона новых канонических переменных $(\psi^i, \bar{\psi}_i)$, $(q^r, p_r)(q^r \equiv (q_1, q_2, q_3, \bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3), q_1 \equiv q^{(0|-2)}, q_2 \equiv q_\chi, q_3 \equiv (q^{(-|+)}, \bar{q}_1 \equiv \bar{q}^{(+2|0)} \ldots)$ имеют вид $\{\psi^i(\vec{\sigma}), \bar{\psi}_j(\vec{\sigma}')\}_+ = 2\delta^i_j \delta_{\vec{\sigma}\vec{\sigma}'}$, $\{q^r(\vec{\sigma}), p_r(\vec{\sigma}')\} = -\delta_{\vec{\sigma}\vec{\sigma}'}$. Следующий важный шаг состоит в такой модификации связей первого рода, с помощью новых переменных $(q^r, p_r), (\psi^i, \bar{\psi}_i)$, чтобы их скобки Пуассона с абелизованными связями (7) обращались в нуль. Из-за недостатка места мы не имеем возможности предъявить здесь модифицированные связи (3), обладающие указанным свойством. В результате описанной процедуры мы имеем расширенную алгебру связей первого рода, со структурными функциями, отличными от нуля лишь для модифицированных связей (3). Эти структурные функции выражаются в терминах связей (5) и фактора $J^{(+|-)}$. Это снимает все ограничения на построение БРСТ-заряда и квантование теории нуль-супер-p-бран, описываемой действием (2), по модифицированной схеме БФВ [12].

Авторы благодарят Д.В.Волкова, В.Д.Гершуна, В.П.Зиму, В.А.Сороку, Ю.П.Степановского, Д.П.Сорокина и В.И.Ткача за полезные обсуждения.

Литература

1. *Green M.B., Schwarz J.H.* Phys. Lett. B, 1984, **136**, 367.
2. *Nissimov E. et al.* Nucl. Phys. B, 1988, **296**, 46; **297**, 349.
3. *Kallosh R., Rahmanov M.* Phys. Lett. B, 1989, **214**, 549.
4. *Gates J. et al.* Phys. Lett. B, 1989, **225**, 44.
5. *Volkov D.V. et al.* Mod. Phys. Lett. A, 1989, **4**, 302.
6. *Galperin A. et al.* Class. Quant. Gravity., 1984, **1**, 469; 1985, **1**, 155.
7. *Socatchev E.* Phys. Lett. B, 1989, **169**, 209.
8. *Volkov D.V., Zheltukhin A.A.* Lett. Math. Phys., 1989, **17**, 141.
9. *Желтухин А.А.* ЯФ, 1988, **48**, 587; 1990, **51**, 509; ТМФ, 1988, **77**, 377.
10. *Gamboa J. et al.* Superstrings. Preprint CERN-TH 5367/89.
11. *Faddeev L.D., Shatashvili S.L.* Phys. Lett. B, 1986, **167**, 225.
12. *Batalin I.A. et al.* Nucl. Phys. B, 1989, **314**, 158.
13. *Egorian E.S., Manvelyan R.P.* Preprint YERPHI-1056(19)-88, 1988.
14. *Бандос И.А.* ЯФ, 1990, **51**, 1429.

Харьковский физико-технический институт
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
23 апреля 1990 г.