Письма в ЖЭТФ, том 51, вып. 11, стр. 560 – 562 *10 июня 1990 г.*

ОБ АНАЛОГИИ МЕЖДУ НАЧАЛЬНЫМИ СТАДИЯМИ ЗАРОЖДЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВЗРЫВА ПРОВОДНИКОВ

Н.Б.Волков, А.М.Искольдский

Установлена аналогия между начальными стадиями зарождения турбулентности и электрического взрыва проводника. Предложена модель типа модели Лоренца [7], исследовано качественное поведение решения и произведено сравнение с экспериментом.

Импульсный нагрев проводников электрическим током приводит к взрывоподобному разрушению проводника (электрическому взрыву (ЭВП)) [1, 2]. При ЭВП происходит стратификация проводника и образование низкотемпературной плазмы с конденсированной дисперсной фазой. Экспериментально установлено [1, 2], что в стадии нагрева, которая значительно превышает собственно стадию взрыва, диаметр проводника меняется медленно. Рентгеновские снимки показывают, что в момент начала взрыва образуется мелкомасштабная структура, напоминающая винтовую нарезку [2]. Это позволяет нам высказать гипотезу о том, что начальная стадия ЭВП имеет аналогию со стадией зарождения турбулéнтности в несжимаемой жидкости (образование ячеек и валов Бенара [3, 4], вихрей Тейлора [4, 5]).

Действительно, на стадии нагрева можно ограничиться приближением несжимаемой проводящей жидкости и учесть возмущение внешней силы тепловым расширением проводника, а коэффициенты, входящие в уравнения магнитной гидродинамики (МГД) считать постоянными. В этом случае МГД уравнения принимают вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0; \tag{1а}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\vec{\nabla})\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}P + \frac{1}{4\pi\rho_0}\left(1 + \frac{\delta\rho_0}{\rho_0}\right)[\operatorname{rot}\mathbf{H}, \mathbf{H}] + \nu\Delta\mathbf{u}; \tag{1б}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\vec{\nabla})T = \chi\Delta T + \frac{\nu_m}{4\pi C_v}(\operatorname{rot}\mathbf{H})^2; \tag{1c}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{u}\vec{\nabla})\mathbf{H} = (\mathbf{H}\vec{\nabla})\mathbf{u} - \nu_m \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H}, \tag{1d}$$

где ρ_0, $\mathbf{u}$, T, $\mathbf{H}$ – соответственно, невозмущенная плотность, скорость и напряженность магнитного поля; $\delta\rho = \alpha\rho_0(T - T_0)$ – возмущение плотности из-за теплового расширения, α – коэффициент теплового расширения, T_0 – начальная температура; $\nu = \eta/\rho_0$ – кинематическая вязкость (η – сдвиговая вязкость); $\nu_m = C^2(4\pi\sigma)^{-1}$ – магнитная вязкость (σ – электропроводность); $\chi = \lambda/C_v$ – температуропроводность.

Направим ось z вдоль оси проводника и воспользуемся азимутальной симметрией, т.е. положим $\mathbf{u} = \{u_r(r, z), 0, u_z(r, z)\}$, $\mathbf{H} = \{0, H(r, z), 0\}$. Тогда из уравнения (1*а*) следует $u_r = -\partial\psi/\partial z$, $u_z = \partial(r\psi)/r\partial r$, $\psi(r, z, t)$ – потенциальная функция. Уравнение (1*d*) имеет стационарное невозмущенное решение $H_1(r) = \Delta H r/r_0$, $\Delta H = 2I/Cr_0$, $I = \text{const}$, $r_0 = \text{const}$ – соответственно, электрический ток и радиус проводника. Невозмущенное решение уравнения (1*c*) нестационарно: $T(t) = T_0 + \Delta T \nu_m t r_0^{-2}$, $\Delta T = (\Delta H)^2/C_v$. Ограничиваясь невозмущенным решением уравнения (1*c*) и полагая $H(r, z, t) = H_1(r) + h(r, z, t)$, получим систему уравнений, аналогичную, с точностью до замены декартовой системы координат на цилиндрическую и уравнения теплопроводности на уравнение диффузии магнитного поля, системе уравнений Зальцмана [6] в теории эффекта Бенара:

$$\frac{\partial(\Delta\psi - \psi r^{-2})}{\partial t} = - \frac{\partial(\psi, \Delta\psi - \psi r^{-2})}{\partial(r, z)} + R(1 + R_1 \frac{\nu_m t}{r_0^{-2}}) \frac{\nu_m \nu}{\Delta H r_0^3} \frac{\partial h}{\partial z} + \nu[\Delta(\Delta\psi - \psi r^{-2}) -$$

$$- r^{-2}(\Delta\psi - \psi r^{-2})], \qquad (2a)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{\partial(\psi, h)}{\partial(r, z)} + \frac{\Delta H}{r_0} \frac{\partial\psi}{\partial z} + \nu_m(\Delta h - \frac{h}{r^2}), \qquad (2b)$$

где $\dfrac{\partial(a, b)}{\partial(r, z)} = \dfrac{\partial(ra)}{r\partial r} \dfrac{\partial b}{\partial z} - \dfrac{\partial a}{\partial z} \dfrac{\partial(rb)}{r\partial r}$, Δ – лапласиан, $R = \dfrac{(\Delta H)^2 r_0^2}{2\pi\rho_0 \nu_m \nu} = V_A^2 r_0^2(\nu_m \nu)^{-1} = Pe_m^2 \sigma^{-1}$ – число Релея, $V_A = \Delta H(2\pi\rho_0)^{-1/2}$ – альфвеновская скорость, $Pe_m = V_A r_0 \nu_m^{-1}$ – магнитное число Пекле, $\sigma = \nu\nu_m^{-1}$, $R_1 = \alpha(\Delta H)^2(\pi C_v)^{-1} = (\alpha C_0^2 C_\rho^{-1})(\Delta H)^2(\pi\rho_0 C_0^2)^{-1} = 2\Gamma_0 M_A^2$, $M_A = V_A C_0^{-1}$ – магнитное число Маха, Γ_0 – параметр Грюнайзена. Как показывает уравнение $(2a)$, возможно образование структур и в отсутствие теплового расширения. Физически это соответствует зарождению МГД неустойчивостей.

Примем аналогично Лоренцу [7] свободные граничные условия для возмущений: $h(0, z, t) = h(r_0, z, t) = \psi(0, z, t) = \psi(r_0, z, t) = 0$. Сохраняя младшие члены в Фурье – представлении ψ и h, используем подстановку:

$$\psi = 2^{1/2} \frac{1 + (\frac{\pi k}{k_1})^2}{k} \nu_m X(t) \sin(\frac{\pi k z}{r_0}) J_1(\frac{k_1 r}{r_0}), \qquad (3a)$$

$$h = \frac{R_c \Delta H}{\pi R} \{ 2^{1/2} Y(t) \cos(\frac{\pi k z}{r_0}) J_1(\frac{k_1 r}{r_0}) - Z(t) J_1(\frac{2k_1 r}{r_0}) \}. \qquad (3b)$$

В $(3a)$ – $(3b)$ $k_1 = 3{,}83171$ – нуль функции Бесселя $J_1(x)$, $R_c = 64k_1^2\pi^2(b^2(4-b))^{-1}$ – критическое число Релея, $b = 4(1 + (\pi k k_1^{-1})^2)^{-1}$. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд $X(t)$, $Y(t)$ и $Z(t)$:

$$\dot{X} = -\sigma X + (1 + 0{,}5b\Gamma_0 M_A^2 \tau k_1^{-2})\sigma Y, \qquad (4a)$$

$$\dot{Y} = -\pi k_1^{-1} XZ + (\pi k_1^{-1})^2 r X - Y, \qquad (4b)$$

$$\dot{Z} = -\pi k_1^{-1} XY - bZ, \qquad (4c)$$

где $\tau = 4k_1^2 b^{-1} \nu_m t r_0^{-2}$ – безразмерное время, $r = RR_c^{-1}$.

Если пренебречь в $(4a)$ членом, зависящим от времени, и учесть, что $\pi k_1^{-1} \approx 1$, то уравнения $(4a)$ и $(4b)$ совпадут с первыми двумя уравнениями знаменитой модели Лоренца [7], рассматриваемой в литературе в качестве одной из возможных моделей зарождения турбулентности, а уравнение $(4c)$ имеет перед XY вместо знака "+" знак "–".

Критическое число Релея $R_c \to \infty$ при $b \to 0$ $(b \to 4)$, поэтому оно имеет минимум, соответствующий $b = 8/3$: $R_{c,min} = 978{,}08144$. Минимальное значение R_c определяет пространственный масштаб структуры (l) по оси z: $l = r_0 k^{-1} = r_0 \pi k_1^{-1} b^{1/2}(4-b)^{-1/2} = 1{,}15931 r_0$. Соответственно: $r = 1{,}0224 \cdot 10^{-3} R = 6{,}5088 \cdot 10^{-4} l^2 c^{-2}(\rho_0 \nu_m \nu)^{-1}$.

Пренебрежем в уравнении $(4a)$ членом, учитывающим тепловое расширение, и исследуем полученную систему уравнений:

$$\dot{W} = F(W), \qquad W = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Неподвижные точки системы (5) определяются из условия $F(W) = 0$: $W_1 = 0$, $W_{2,3} = \{\pm 1{,}221 \times [b(1 - 0{,}672r)]^{1/2}; \pm 1{,}221[\frac{8}{3}(1 - 0{,}672r)]^{1/2}; - 1{,}221(1 - 0{,}672r)\}$. Видно, что при $r > r_* = 1{,}488$ система (5) не имеет неподвижных точек. Исследование устойчивости решения показывает, что при $r < r_*$ неподвижные точки устойчивы. Неподвижная точка, соответствующая $r = r_*$ является границей устойчивости.

Координаты неподвижных точек модели Лоренца равны $W_1 = 0$, $W_{2,3} = \{\pm[b(r-1)]^{1/2}; \pm[b(r-1)]^{1/2}; r-1\}$. Критическая точка модели Лоренца ($r = R_* = R_c$) также является границей устойчивости. Видно, что в модели Лоренца при $R > R_*$ существуют устойчивые стационарные решения, при этом переход из точки $W \approx 0$ в любую точку фазового пространства происходит через адиабатическую последовательность устойчивых состояний. В критической точке происходит бифуркация, которую в литературе называют закритической [5]. В нашем случае бифуркация является докритической, поскольку при $R > R_*$ в окрестности критической точки нет стационарных решений. При этом любая траектория системы в фазовом пространстве при $R > R_*$ за конечное время переводит систему из точки $W \approx 0$ на бесконечность. Такой переход называется взрывным [5]. Член, учитывающий тепловое расширение, существенно уменьшает время взрывного перехода. Физически это соответствует зарождению тепловой неустойчивости.

Указанное качественное поведение не противоречит экспериментам работы [2], где показано, что стратификация медного проводника диаметром 0,58 мм в электрическом контуре с периодом 40 мкс, емкостью 4,2 мкФ и начальным напряжением 30 кВ произошла полностью за время 200 нс, меньшее характерного звукового времени. Среднее расстояние между стратами в эксперименте составляло 0,78 мм и, как минимум, вдвое превышало характерный размер структуры вначале ЭВП. Согласно нашей модели этот размер равен $l = 0{,}336$ мм. Оценка снизу l в конце взрыва дает $l_c \geqslant 2l = 0{,}672$ мм, что неплохо согласуется с экспериментом работы [2].

Таким образом, нами установлена аналогия между начальными стадиями зарождения турбулентности в вязкой несжимаемой жидкости и электрического взрыва проводника.

Литература

1. *Лебедев С.В., Савватимский А.И.* УФН, 1984, **144**, 243.
2. *Искольдский А.М.* Дисс. на соиск. уч. степ. д. ф.-м. н., Томск: 1985.
3. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988.
4. *Golubitsky M.G. et al.* Appl. Math. Sci., N.Y.: Springer–Verlag, 1988, 69.
5. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики, т. 2. М.: Мир, 1984.
6. *Saltzman B.* J. Atmos. Sci., 1962, **19**, 329.
7. *Lorenz E.N.* J. Atmos. Sci., 1963, **20**, 130.

Институт электрофизики
Уральского отделения Академии наук СССР

Поступила в редакцию
11 апреля 1990 г.