Письма в ЖЭТФ, том 51, вып. 11, стр. 569 – 571 *10 июня 1990 г.*

КИНЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ. БАЛАНС ЭНТРОПИИ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ФЛУКТУАЦИИ С УЧЕТОМ САМОДИФФУЗИИ

Ю.Л.Климонтович

Для вывода уравнений гидродинамики при произвольных числах Рейнольдса предложено кинетическое уравнение с одновременным учетом мелко- и крупномасштабных флуктуаций. Теория возмущений строится по обратному числу частиц в физически бесконечно малом объеме. Получены: уравнение баланса энтропии, спектры флуктуаций с учетом самодиффузии.

Статистический вывод уравнений гидродинамики для газов основан на приближенном решении уравнения Больцмана [1, 2]. Малым параметром служит произведение чисел Кнудсена и Маха: $KM \ll 1$. Нулевому приближению отвечает локальное распределение Максвелла. Входящие в него функции ρ, u, T удовлетворяют уравнениям гидродинамики без диссипативных членов. Диссипативные члены возникают лишь в следующем приближении. Их малость характеризуется обратным числом Рейнольдса: $1/\mathrm{Re} = K/M \ll 1$. Оба условия согласуются лишь при $M \sim 1$.

Таким образом, для области малых чисел Рейнольдса теория возмущений при решении кинетического уравнения недостаточна для обоснования уравнений гидродинамики.

Для жидкостей длина свободного пробега l порядка среднего расстояния между атомами $r_{\text{ср}}$, поэтому локальное распределение, заменяющее локальное распределение Максвелла, теперь может быть получено лишь из условия максимума локальной энтропии при соответствующих неравновесных дополнительных условиях [3]. Переход к уравнениям гидродинамики и здесь обычно основан на теории возмущений по параметру Кнудсена и, следовательно, область малых чисел Рейнольдса снова выпадает из рассмотрения.

Для получения уравнений гидродинамики при произвольных числах Рейнольдса здесь используется кинетическое уравнение, в котором одновременно учитываются мелко- и крупномасштабные флуктуации, поэтому диссипация описывается двумя соответствующими "интегралами столкновений":

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{R}} + \frac{\mathbf{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = I(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}\left[D\frac{\partial f}{\partial \mathbf{R}} - \frac{D}{kT}\mathbf{F}f \right]; \qquad \frac{D}{kT} = b \tag{1}$$

b – подвижность атомов. Границей раздела мелко- крупномасштабных флуктуаций служат физически бесконечно малые масштабы при гидродинамическом описании (гл. 7 [2]). При их определении можно выделить два случая. 1. Медленные процессы. Связь масштабов τ_{ph}, l_{ph} определяется диффузионным законом $\tau_{ph} \sim l_{ph}^2/D$. Здесь D – один из трех кинетических коэффициентов в гидродинамике: коэффициент самодиффузии D, кинематическая вязкость ν, температуропроводность χ. Уравнение (1) записано для простейшего случая, когда $D = \nu = \chi$. Различие между D, ν, χ вводится в уравнениях гидродинамики.
2. Быстрые (звуковые) процессы. Здесь используется соотношение $D = \nu = \chi$. В соответствии с этими двумя случаями переход к уравнениям гидродинамики основывается на наличии двух малых параметров

$$K_{ph} = \frac{l_{ph}}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{N_{ph}}} \sim K^{3/5}; \qquad K_{ph} = \frac{l_{ph}}{L} \sim K^{1/2}, \qquad N_{ph} = \frac{\tau_D}{\tau_{ph}} \gg 1 . \tag{2}$$

Малые параметры, таким образом, определяются степенями числа Кнудсена или степенями параметра N_{ph} – среднего числа частиц в физически бесконечно малом объеме. В последнем соотношении в (2) τ_D – характерное время диффузионной релаксации и τ_{ph} – физически бесконечно малый временной интервал.

В нулевом приближении по $1/\sqrt{N_{ph}}$ из (1) следует уравнение $I(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t) = 0$, которое определяет локально-равновесное распределение $f_0(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t)$, зависящее от гидродинамических функций $\rho, \mathbf{u}, T$. Для их определения распределение f_0 подставляется в уравнение (1) и проводится переход к уравнениям гидродинамики. При этом в уравнении непрерывности поток вещества определяется суммой трех вкладов: конвективным переносом $\rho\mathbf{u}$, самодиффузией и внешней силой $\mathbf{F}$. В равновесном состоянии уравнение (1) для функции f_0 удовлетворяется распределением Максвелла–Больцмана и соотношением Эйнштейна $D = bkT$. Отметим, наконец, что появление второго диссипативного члена в (1) описывает медленные процессы с минимальным временем $(\tau_D)_{min}$ порядка τ_{ph}.

В работах [4, 5] использован иной подход для учета влияния крупномасштабных флуктуаций в гидродинамике. Найдены, в частности, флуктуационные добавки к скорости звука и к коэффциенту затухания. Эти поправки порядка $\sqrt{K}$, что согласуется с оценками (2). В целом, однако, рассматриваемый подход не эквивалентен, развиваемому в [4, 5].

С учетом самодиффузии, но при $F = 0$, выражения для потока энтропии и производства энтропии имеют вид

$$
\begin{aligned}
j_s(\mathbf{R}, t) &= (\rho\mathbf{u} - D\,\mathrm{grad}\,\rho)\, s + \frac{k}{m} D\,\mathrm{grad}\,\rho - \frac{C_V \rho}{T} \chi\, \mathrm{grad}\, T, \\
\sigma(\mathbf{R}, t) &= \frac{k}{m}\left[D\rho \left(\frac{\mathrm{grad}\,\rho}{\rho}\right)^2 + \nu\rho \frac{m}{kT}\left(\frac{\partial u_j}{\partial R_i}\right)^2 + C_V\rho\chi\left(\frac{\mathrm{grad}\,T}{T}\right)^2\right].
\end{aligned}
\tag{3}
$$

В соответствии со вторым законом термодинамики $\sigma \geqslant 0$.

Приведем результаты расчета равновесных флуктуаций. Для области низких частот спектры плотности, температуры и энтропии определяются формулами

$$
(\delta\rho\delta\rho)_{\omega,\mathbf{k}} = \frac{2D\mathbf{k}^2}{\omega^2 + (D\mathbf{k}^2)^2} \frac{k\rho}{C_p}; \qquad (\delta T\delta T)_{\omega,\mathbf{k}} = \frac{2\chi\mathbf{k}^2}{\omega^2 + (\chi\mathbf{k}^2)^2} \frac{kT^2}{\rho C_p}; \tag{4}
$$

$$
(\delta s\delta s)_{\omega,\mathbf{k}} = \left[\left(1 - \frac{C_V}{C_p}\right) \frac{2D\mathbf{k}^2}{\omega^2 + (D\mathbf{k}^2)^2} + \frac{C_V}{C_p} \frac{2\chi\mathbf{k}^2}{\omega^2 + (\chi\mathbf{k}^2)^2}\right] C_p \frac{k}{\rho}. \tag{5}
$$

Таким образом, ширина спектра флуктуаций плотности определяется коэффициентом самодиффузии, а температуры – температуропроводностью. В соответствии с этим спектр флуктуаций энтропии представляется суммой двух линий, относительные вклады которых зависят от соотношения C_V C_p. Тем самым снимается условие полной корреляции флуктуаций $\delta\rho$ δT при всех частотах. Полная корреляция имеет место лишь для интегральных по ω флуктуационных характеристик.

Ширина спектров флуктуаций плотности, температуры, давления и скорости в области высоких частот определяется комбинацией трех диссипативных коэффициентов D, χ, ν.

$$
\gamma = \frac{1}{2}\left[\nu + \frac{C_V}{C_p} D + \left(1 - \frac{C_V}{C_p}\right)\chi\right]\mathbf{k}^2. \tag{6}
$$

Мы видим, что ответ на старый вопрос о том следует или не следует учитывать вклад самодиффузии в уравнениях гидродинамики может быть решен путем анализа спектров молекулярного рассеяния света в жидкостях с разными значениями кинетических коэффициентов D, χ. Следует также отметить, что доказательством существования переноса вещества за счет самодиффузии в неоднородной среде является, фактически, наличие распределения Больцмана. С точки зрения теории необратимых процессов оно устанавливается в результате баланса потока вещества, создаваемого внешним полем, и потока вещества за счет самодиффузии. Баланс этих процессов и определяется вторым выражением правой части уравнения (1).

Пользуюсь случаем, чтобы поблагодарить Ф.В.Бункина за обсуждение работы.

Литература

1. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика.М.: Наука, 1979.
2. *Климонтович Ю.Л.* Статистическая физика. М.: Наука, 1982.
3. *Зубарев Д.Н.* Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971.
4. *Андреев А.Ф.* ЖЭТФ, 1978, **75**, 511.
5. *Morozov V.G.* Physica, **A, 1983, 117**, 511.

Поступила в редакцию
19 января 1990 г.
После переработки
10 апреля 1990 г.

Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова