

ПО ИТОГАМ ПРОЕКТОВ
РОССИЙСКОГО ФОНДА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Проекты РФФИ # 07-02-01116а, # 09-02-01201а

Ионизация атомов и ионов интенсивным лазерным излучением

Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, В. С. Попов⁺¹⁾, С. В. Попруженко

Национальный исследовательский ядерный университет “Московский инженерно-физический институт”,
115409 Москва, Россия

⁺Институт теоретической и экспериментальной физики, 117218, Москва, Россия

Поступила в редакцию 28 декабря 2010 г.

Рассмотрены следующие вопросы: ионизация отрицательных ионов ультракороткими электромагнитными импульсами, учет кулоновского взаимодействия в процессе многофотонной ионизации атомов вне рамок теории возмущений, релятивистская теория туннелирования применительно к задачам ионизации. Основные результаты получены с использованием метода мнимого времени.

Введение. В расчетах многофотонной ионизации атомов и ионов мощными лазерными импульсами широко применяется теория Келдыша [1], известная также как приближение сильного поля [2]. Как было показано в [1], туннельная ($\gamma \ll 1$) и многофотонная ($\gamma \gg 1$) ионизации являются предельными случаями процесса нелинейной фотоионизации (здесь и далее γ – параметр адиабатичности, определяемый ниже формулой (4)). Развитию этой теории и сравнению ее с экспериментом посвящены сотни работ, см., например, обзоры и монографии [3–5] и ссылки в них. При этом поле световой волны обычно учитывалось точно с использованием волковской волновой функции [1, 6], описывающей свободный электрон в поле плоской электромагнитной волны, а кулоновским взаимодействием вылетающего электрона с атомным остатком либо пренебрегалось, либо оно учитывалось по теории возмущений. В настоящее время в эксперименте используются все более короткие (фемтосекундные) и интенсивные лазерные импульсы, недавно появились мощные рентгеновские лазеры, стало возможным более детальное измерение спектров фотоэлектронов. Поэтому обобщение теории Келдыша на случай ультракоротких импульсов, не являющихся монохроматическими, учет влияния кулоновского взаимодействия в процессе многофотонной ионизации (вне рамок теории возмущений) и релятивистских поправок в подбарьерном движении электрона представляются весьма актуальными задачами.

Цель данной статьи – изложить в краткой форме новые результаты, полученные после написания обзора [3] в рамках проектов Российского фонда фундаментальных исследований # 07-02-01116а, # 09-02-01201а и # 10-02-00364а.

1. Ионизация в поле ультракоротких импульсов. Повышение интенсивности излучения, необходимое для проведения многих физических экспериментов в сильных полях, достигается сжатием лазерных импульсов, длительность которых уже сравнивается с оптическим периодом, а форма далека от идеальной синусоиды. В связи с этим возникает задача о вычислении вероятности ионизации атомов и спектров фотоэлектронов в случае немонахроматического импульса произвольной формы, в том числе для ультракоротких (фемтосекундных) импульсов, охватывающих лишь несколько периодов лазерного поля.

В задаче об ионизации атомного s -уровня в короткодействующем потенциале пространственно-однородным переменным электрическим полем $\mathcal{E}(t)$ справедливо замкнутое выражение [7, 8] для импульсного спектра вылетающих электронов

$$dw(\mathbf{q}) = |M(\mathbf{q})|^2 d^3q,$$

$$M(\mathbf{q}) = i \frac{\sqrt{2}}{\pi} C_\kappa K_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{iK_0\Phi(\mathbf{q},\theta)} d\theta, \quad (1)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{p}/\kappa$ – безразмерный импульс фотоэлектрона, $\kappa = \sqrt{2I}$ – атомный импульс (I – потенциал ионизации), $\theta = \omega t$ – безразмерное время, ω – харак-

¹⁾ e-mail: markina@itep.ru

терная частота электромагнитного импульса, а \mathcal{E}_0 – его амплитудное значение. Здесь, а также в следующем разделе используется атомная система единиц $e = \hbar = m_e = 1$, при этом скорость света $c = 1/\alpha = 137$. Электрическое поле и векторный потенциал лазерного импульса имеют вид

$$\mathcal{E}(t) \equiv \mathcal{E}_0 \varphi(\theta) = -\mathcal{E}_0 \mathbf{a}'(\theta), \quad \mathbf{A}(t) = \frac{c}{\omega} \mathcal{E}_0 \mathbf{a}(\theta). \quad (2)$$

Фаза $\Phi(\mathbf{q}, \theta)$ в (1) равна

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{q}, \theta) &= \theta + \frac{1}{\gamma^2} \int_0^\theta [\mathbf{a}(\theta') - \mathbf{a}(\infty) + \gamma \mathbf{q}]^2 d\theta' \equiv \\ &\equiv -\frac{1}{K_0} \int_0^t [E_1(t') - E_2(\mathbf{p}, t')] dt'. \end{aligned} \quad (3)$$

Параметр многоквантовости процесса K_0 и параметр адиабатичности Келдыша γ равны

$$K_0 = \frac{\kappa^2}{2\omega}, \quad \gamma = \frac{\omega\kappa}{\mathcal{E}_0} = \frac{1}{2K_0 F}; \quad F = \frac{\mathcal{E}_0}{\kappa^3} \ll 1, \quad (4)$$

F – приведенное поле; C_κ – коэффициент в асимптотике невозмущенной волновой функции на больших расстояниях [3] (для дельта-потенциала $C_\kappa = 1/\sqrt{2}$);

$$E_1(t) = -\frac{1}{2}\kappa^2, \quad E_2(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{p} + \frac{1}{c}(\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(\infty)) \right)^2. \quad (5)$$

Фигурирующий здесь импульс

$$\mathbf{p}(t) \equiv \mathbf{p} + \frac{1}{c}(\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(\infty)), \quad \frac{1}{c}\mathbf{A}(t) = - \int_{-\infty}^t \mathcal{E}(t') dt' \quad (6)$$

совпадает с импульсом классического электрона, движущегося во внешнем электрическом поле $\mathcal{E}(t)$ и равным \mathbf{p} при $t \rightarrow +\infty$, так что $E_2(\mathbf{p}, t)$ является кинетической энергией вырванного электрона в момент времени t . При этом $\mathbf{A}(\infty)/c$ – импульс, передаваемый свободному электрону за все время действия электрического поля; мы положили здесь $\mathbf{A}(-\infty) = 0$.

Формула (1) получена из решения уравнения Шредингера в интегральной форме в предположении малости вероятности ионизации. При этом точная волновая функция в матричном элементе заменялась на невозмущенную волновую функцию $\psi_0(r) \exp(i\kappa^2 t/2)$, что оправдано в случае короткодействующего потенциала. В условиях применимости

теории возмущений по взаимодействию электрона с внешним полем, $\hat{V} = \mathcal{E}(t)\mathbf{r}$, учитывая в разложении экспоненты в (1) линейное по полю слагаемое и выполняя двукратное интегрирование по частям, получаем:

$$M(\mathbf{p}) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{C_\kappa \sqrt{\kappa}}{(p^2 + \kappa^2)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{p} \mathcal{E}(t) e^{i(p^2 + \kappa^2)t/2} dt,$$

что совпадает с первым порядком нестационарной теории возмущений [9].

В рассматриваемом случае длительного (по сравнению с атомным временем $\sim 1/\kappa^2$) адиабатического изменения поля, когда его характерная частота ω удовлетворяет условию $\omega \ll \kappa^2$, фаза экспоненты в (1) является большой величиной, подынтегральная функция быстро осциллирует, и для вычисления интеграла в амплитуде перехода можно использовать метод перевала. Положения перевальных точек $t_s(\mathbf{p})$ в верхней полуплоскости комплексного t , $\partial\Phi(\mathbf{q}, \theta)/\partial\theta = 0$, определяются из уравнения

$$E_1(t_s(\mathbf{p})) \equiv -\frac{1}{2}\kappa^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\mathbf{p} + \frac{1}{c}(\mathbf{A}(t_s(\mathbf{p})) - \mathbf{A}(\infty)) \right)^2 \equiv E_2(\mathbf{p}, t_s(\mathbf{p})) \quad (7)$$

и в случае, когда доминирует вклад только одной точки перевала

$$\begin{aligned} M(\mathbf{q}) &= 2C_\kappa \sqrt{\frac{iK_0}{\pi\Phi''(\mathbf{p}, t_s(\mathbf{p}))}} \times \\ &\times \exp \left\{ -i \int_0^{t_s(\mathbf{p})} [E_2(\mathbf{p}, t) - E_1(t)] dt \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Формула (8) имеет вид, аналогичный амплитуде перехода между состояниями 1 и 2 дискретного спектра под влиянием адиабатического возмущения в квазиклассическом по времени методе Ландау-Дыхне [9, 10] и представляет его непосредственное обобщение на случай переходов в состояния непрерывного спектра. При этом в роли 1-го состояния выступает невозмущенное электрическим полем связанное состояние электрона, а 2-м является состояние вырванного электрона, соответствующее его инфинитному движению во внешнем электрическом поле $\mathcal{E}(t)$, при котором он уходит на бесконечно большие расстояния. Значение $t_s(\mathbf{p})$ в (7) и (8) определяет комплексный момент времени перехода между рассматриваемыми состояниями, см. [9]. Существенно, что

формула (8) позволяет вычислить также и предэкспоненциальный множитель в вероятности ионизации.

Детальное исследование вероятности ионизации в зависимости от формы импульса $\mathcal{E}(t)$ при различных значениях параметра Келдыша было выполнено в работах [11]. При этом рассматривались четные линейно поляризованные импульсы с максимальным значением поля \mathcal{E}_0 при $t = 0$. Для расчетов использовался квазиклассический метод “мнимого времени” (ММВ) [12–14], дающий наглядное описание процесса туннелирования частиц через любые гладкие, в том числе и зависящие от времени, барьеры. При этом в рассмотрение вводятся подбарьерные траектории, формально удовлетворяющие классическим уравнениям движения (но с “мнимым временем”). Главный – экспоненциальный – фактор в вероятности ионизации $w \propto \exp(-2 \operatorname{Im} W)$ определяется экстремальной подбарьерной траекторией, на которой мнимая часть функции укороченного действия

$$W(t_0) = \int_{t_0}^0 \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2(t') - \mathcal{E}(t') \mathbf{r}(t') - E_0 \right) dt' - \dot{\mathbf{r}} \mathbf{r} \Big|_0^{t_0} \quad (9)$$

достигает минимума. В рассматриваемой задаче этот экспоненциальный множитель совпадает с (8). При этом начало подбарьерного движения вырванного электрона $t_0(\mathbf{p})$ в рамках ММВ совпадает с моментом времени перехода $t_s(\mathbf{p})$ в (7); вклад последнего слагаемого в (9) на экстремальной подбарьерной траектории равен нулю.

В работах Келдыша по теории многофотонной ионизации [1, 15] амплитуда вырывания электрона вычислялась по аналогии с первым порядком теории возмущений:

$$M_{i \rightarrow f} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \int \psi_f^*(\mathbf{r}, t) \hat{V}(t) \psi_i(\mathbf{r}, t) d^3 r. \quad (10)$$

При этом для начального состояния бралась невозмущенная волновая функция $\psi_0(r) \exp(i\kappa^2 t/2)$, а в качестве волновой функции вылетающего электрона использовалась волковская волновая функция [6] в электрическом поле:

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{iS(\mathbf{r}, t)},$$

$$S(\mathbf{r}, t) = \exp \left\{ i \left[\mathbf{p}(t) \mathbf{r} - \frac{1}{2} \int_{t_1}^t \mathbf{p}^2(t') dt' \right] \right\},$$

где импульс $\mathbf{p}(t)$ дается формулой (6). Наиболее существенный (экспоненциальный) множитель в матричном элементе (10) совпадает со значением интеграла по времени в формуле (8).

Обобщение формулы (8) на случай, когда несколько перевальных точек $\theta_s(\mathbf{q})$ дают вклад в амплитуду ионизации, имеет вид

$$dw(\mathbf{q}) = \frac{4}{\pi} K_0 C_{\kappa}^2 \left| \sum_s [\Phi''(\mathbf{q}, \theta_s)]^{-1/2} e^{iK_0 \Phi(\mathbf{q}, \theta_s)} \right|^2 d^3 q. \quad (11)$$

Далее ограничимся случаем линейной поляризации излучения применительно к ионизации нечетным лазерным импульсом, $\varphi(-\theta) = -\varphi(\theta)$. В этом случае имеется, по крайней мере, одна пара перевальных точек, вносящих одинаковый вклад в амплитуду ионизации, в результате чего возникают интерференционные эффекты в импульсном распределении вылетающих электронов. Осцилляции в энергетическом спектре фотоэлектронов были отмечены в [14] для случая линейной поляризации монохроматического излучения, а их существование для ультракоротких лазерных импульсов – в [15]. Этот эффект получил название туннельной интерференции и наблюдался на эксперименте, см., например, [16, 17], а также раздел 4 в [3].

Ввиду аксиальной симметрии относительно направления электрического поля зависимость амплитуды от вектора $\mathbf{q} = (q_{\parallel}, \mathbf{q}_{\perp})$ имеет вид $M(q_{\perp}, q_{\parallel})$, как и положения точек перевала $t_s(\mathbf{q}) \equiv t_s(q_{\perp}, q_{\parallel})$. При применении формул (7), (8) и (11) важным является вопрос о зависимости показателя экспоненты в (8) от импульса \mathbf{q} вылетающего электрона на бесконечности и, в частности, от его значения \mathbf{q}_0 , отвечающего максимальной вероятности ионизации. Строго говоря, это значение должно определяться из условия минимума мнимой части фазы Φ в показателе экспоненты:

$$\frac{d}{dq_{\parallel}} [\operatorname{Im} \Phi(q_{\parallel}, \theta(q_{\parallel}))] \Big|_{q_{\parallel}=q_0} = 0, \quad (12)$$

поскольку при этом $q_{\perp} = 0$.

В случае четного импульса начало подбарьерного движения электрона в рамках ММВ, $t_s(\mathbf{q}_0) = t_1(\mathbf{q}_0) + it_2(\mathbf{q}_0)$, для экстремальной траектории ($q_{\perp} = 0$ и $q_{\parallel} = q_0$) в реальном времени совпадало с тем моментом времени $t_m = t_1(\mathbf{q}_0) = \theta_m/\omega$, при котором электрическое поле достигает максимального значения. При этом наиболее вероятный импульс вылетающего электрона

$$q_0 = \frac{1}{\gamma} [a(+\infty) - a(\theta_m)] = -\frac{1}{\kappa} \int_{t_m}^{\infty} \mathcal{E}(t) dt \quad (13)$$

совпадает с импульсом, приобретаемым им под действием электрического поля $\mathcal{E}(t)$ после выхода из-под барьера (в момент времени t_m с импульсом $p = 0$). Ввиду резкой зависимости амплитуды $M(q_\perp, q_\parallel)$ от импульсов q_\perp и q_\parallel использовалось квадратичное разложение по q_\perp^2 и $(q_\parallel - q_0)^2$, при этом импульсное распределение фотоэлектронов имело вид

$$dw(\mathbf{q}) = C_\kappa^2 P(K_0, \gamma) \times \\ \times \exp \left\{ -2K_0 [f(\gamma) + c_\perp(\gamma)q_\perp^2 + c_\parallel(\gamma)(q_\parallel - q_0)^2] \right\} d^3q. \quad (14)$$

Поскольку доминирующий вклад в ионизацию определяется действием электрического поля $\mathcal{E}(t)$ в моменты времени, близкие к t_m , при которых поле принимает максимальное значение, при применении формулы (11) к нечетным импульсам мы воспользуемся приближениями (для каждой из точек перевала), аналогичными (14) в случае четного импульса.

Рассмотрим эффект туннельной интерференции на модельном примере

$$\varphi(\theta) = \theta e^{(1-\theta^2)/2}, \quad a(\theta) = e^{(1-\theta^2)/2}. \quad (15)$$

Электрическое поле достигает амплитудных значений при $\theta = \pm 1$. Соответствующие точки перевала расположены симметрично относительно мнимой оси в комплексной θ -плоскости²⁾:

$$\theta_+ = \left\{ 1 - 2 \ln \left[1 - i\gamma \sqrt{1 + q_\perp^2} - \gamma(q_\parallel - q_0) \right] \right\}^{1/2}, \\ \theta_- = -\theta_+^*, \quad q_0 = -1/\gamma, \quad (16)$$

поэтому фазы $\Phi(\theta_{s,\pm})$ даже для экстремальных траекторий ($q_\perp = 0$ и $q_\parallel = q_0$) являются комплексными:

$$\Phi(\theta_\pm) = \chi_\pm(\gamma) + if(\gamma) = \theta_\pm \left\{ 1 + \frac{1}{\gamma^2} \left[1 - \right. \right. \\ \left. \left. - 2e^{1/2} {}_1F_1(1/2; 3/2; -\theta_\pm^2/2) + e {}_1F_1(1/2; 3/2; -\theta_\pm^2) \right] \right\} \quad (17)$$

($e = 2.718\dots$), причем функция $f(\gamma)$ – обобщение функции Келдыша на случай ультракоротких импульсов – одинакова для обеих перевальных точек θ_\pm , а значения $\chi_\pm(\gamma)$ отличаются только знаком.

²⁾ Значение q_0 одинаково для обеих точек перевала, так как при движении электрона в реальном времени между этими точками изменения его импульса не происходит ввиду нечетности поля $\mathcal{E}(t)$.

В адиабатической области распределение (14) принимает вид

$$dw(\mathbf{q}) = \frac{8}{\pi} C_\kappa^2 \gamma K_0 \cos^2(0.209K_0/\gamma^2) \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{2}{3F} \left[1 - \frac{1}{5}\gamma^2 + \frac{3}{2}q_\perp^2 + \gamma^2(q_\parallel - q_0)^2 \right] \right\} dq_\perp^2 dq_\parallel. \quad (18)$$

В предэкспоненте возникают быстрые осцилляции, обязанные интерференции вкладов от двух экстремальных траекторий, вдоль которых одинаковы мнимые части функции действия W . Интегрируя (18) по импульсам, для полной вероятности ионизации получаем

$$w = (96\pi)^{1/2} C_\kappa^2 K_0 F^{3/2} \cos^2(0.209K_0/\gamma^2) \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{2}{3F} \left(1 - \frac{1}{5}\gamma^2 \right) \right\}. \quad (19)$$

Если в (18) и (19) выполнить усреднение по быстрым осцилляциям, то получающиеся выражения лишь множителем 2 отличаются от соответствующих формул для однополярных импульсов в случае $\gamma \ll 1$.

В многофотонном пределе, $\gamma \gg 1$, имеем

$$\theta_+ = \frac{\pi}{2\sqrt{2 \ln \gamma}} + i\sqrt{2 \ln \gamma} \left(1 - \frac{1}{4 \ln \gamma} + \dots \right), \\ f(\gamma) = \sqrt{2 \ln \gamma} \cdot \left[1 - \frac{1}{2 \ln \gamma} + \dots \right] \quad (20)$$

и для импульсного распределения получаем выражение

$$dw(\mathbf{q}) = \frac{8}{\pi^2} C_\kappa^2 K_0^2 \cos^2 \left(\frac{\pi K_0}{2\sqrt{2 \ln \gamma}} \right) \times \\ \times \exp \left\{ -2K_0 \sqrt{2 \ln \gamma} (1 + q^2) \right\} d^3q, \quad (21)$$

которое, как и для четных импульсов, в этом режиме становится изотропным. Осцилляции в распределении (21) не столь быстры, как в (19), их частота уменьшается с ростом γ , но лишь логарифмически. Период осцилляций равен

$$\Delta\gamma \approx \gamma(2 \ln \gamma)^{3/2} K_0^{-1} < \gamma \quad \text{при} \quad \gamma < \exp(K_0^{2/3}/2).$$

Аналитическое решение возможно также в случае импульса $\varphi(\theta) = 2 \sinh \theta / \cosh^2 \theta$, для которого перевальные точки θ_\pm при $\gamma \rightarrow \infty$ не уходят на бесконечность, а стремятся к постоянному пределу $i\pi/2$.

В этом случае вероятность ионизации почти не зависит от γ (при фиксированном значении K_0), см. [7, 8].

В случае импульса более произвольной формы, не являющегося ни четным, ни нечетным, получить аналитические выражения для импульсного спектра, как правило, не удастся. В [8] для импульса с произвольной абсолютной фазой были численно найдены решения уравнения (7) и значения функции Келдыша $f(\gamma)$ в зависимости от параметров поля и атома.

2. Кулоновские эффекты в фотоионизации.

Основная идея теории Келдыша [1] состоит в том, что в присутствии интенсивного лазерного поля состояние фотоэлектрона в континууме описывается плоской волновой функцией [6], а его взаимодействием с атомным остатком пренебрегается. Это приближение позволяет получить простые аналитические выражения для импульсных распределений фотоэлектронов, а для более сложных процессов (генерация гармоник, двойная ионизация и т.д.) ограничиться численными расчетами, доступными для персональных компьютеров средней мощности. Приближение континуума волновой функцией хорошо обосновано и обеспечивает качественное описание многоквантовой ионизации отрицательно заряженных ионов H^- , F^- , ..., что в настоящее время установлено путем сравнения результатов теории с экспериментальными данными [18, 19] с расчетами в рамках метода комплексных квазиэнергетических состояний [20, 21] и с результатами численного интегрирования временного уравнения Шредингера [22].

Для атомов и положительно заряженных ионов имеется кулоновское взаимодействие между фотоэлектроном и атомным остатком, состояния континуума существенно отличаются от плоских волн и нельзя рассчитывать на то, что амплитуда (10) является хорошим приближением. Пренебрежение кулоновским взаимодействием приводит к значительным расхождениям между предсказаниями теории и экспериментом, а также к внутренним противоречиям в теории, таким, как зависимость формы спектра и полной вероятности ионизации от выбора калибровки потенциалов электромагнитного поля [22].

В настоящее время возможности численного интегрирования временного уравнения Шредингера становятся все более широкими, в частности, численное решение одноэлектронной задачи в присутствии линейно поляризованного поля не слишком малой частоты является рутинной процедурой. Результаты численных расчетов указывают на то, что теория Келдыша без учета кулоновского взаимодействия в конечном состоянии обеспечивает только

качественное описание нелинейной ионизации даже в случае атома водорода. Основным фактором, ответственным за расхождения между экспериментом и теорией, является дальнедействующая кулоновская сила притяжения фотоэлектрона к ядру, не учитываемая в амплитуде (10).

Важность учета кулоновского взаимодействия была понята уже в первых работах по физике сильных полей. В работе Келдыша [1] отмечается, что полученная им формула для скорости ионизации верна лишь с экспоненциальной точностью. Проблема включения кулоновского взаимодействия в теорию нелинейной ионизации оказалась непростой и долго не поддавалась решению. Первая попытка найти предэкспоненциальный множитель в вероятности ионизации связанного состояния была предпринята в работе Никишова и Ритуса [23], однако полученный ими результат не обеспечивал, в случае линейной поляризации излучения, перехода к пределу постоянного поля, поэтому до сих пор остается неясным, в какой мере он является правильным. Переломов и Попов [24] вычислили кулоновскую поправку к скорости ионизации атомов в туннельном режиме, $\gamma \ll 1$. В этом случае скорость ионизации s -состояния атома w отличается от аналогичной величины w_{sr} для уровня в короткодействующей яме [3, 9] (с тем же потенциалом ионизации $I = \kappa^2/2$) множителем Q_0 :

$$w = Q_0 w_{sr}, \quad (22)$$

$$Q_0(\mathcal{E}_0) = \frac{w(\mathcal{E}_0, \gamma)}{w_{sr}(\mathcal{E}_0, \gamma)} = \left(\frac{2\hbar^2 \kappa^3}{m e \mathcal{E}_0} \right)^{2n^*} = \left(\frac{2}{F} \right)^{2n^*} \gg 1.$$

Здесь

$$w_{sr}(\mathcal{E}_0, \gamma) = C_\kappa^2 \frac{\kappa^2 \hbar}{m} \sqrt{\frac{3F^3}{\pi}} \exp \left\{ -\frac{2}{3F} \left(1 - \frac{\gamma^2}{10} \right) \right\}, \quad (23)$$

\mathcal{E}_0 – амплитуда электрического поля волны, $F = \mathcal{E}_0/\mathcal{E}_{ch}$ – приведенное поле, $\kappa = \sqrt{2mI}/\hbar$ и $\mathcal{E}_{ch} = \hbar^2 \kappa^3/m e$ – характерные атомный импульс и электрическое поле соответственно (для основного состояния атома водорода $\mathcal{E}_{ch} \equiv \mathcal{E}_a = m^2 e^5/\hbar^4$), $n^* = Z e^2 m/\hbar^2 \kappa$ – эффективное главное квантовое число уровня, m и e – масса и заряд электрона, Z – заряд атомного остатка ($Z = 1$ для нейтральных атомов, $Z = 0$ для отрицательных ионов), C_κ – безразмерный асимптотический коэффициент атомной волновой функции на расстояниях $r \gg \hbar \kappa^{-1}$ от ядра, обычно не сильно отличающийся от единицы [3].

При условии $F \ll 1$ поправка (23) увеличивает вероятность туннельной ионизации на несколько порядков – эффект, твердо установленный на эксперименте [25]. В настоящее время выражения для скорости

туннельной ионизации с учетом кулоновской поправки [24] используются для калибровки интенсивности лазерных импульсов³⁾.

Формула (9) оставляет открытыми два важных вопроса: 1) каков вид кулоновской поправки $Q_C(\mathcal{E}_0, \omega)$ во всем диапазоне частот, включая многофотонную область $\gamma \gg 1$? 2) кулоновское взаимодействие влияет также и на импульсное распределение фотоэлектронов; можно ли это влияние описать в рамках того же подхода, который использовался для получения поправки (9)?

Эти вопросы решены в работах [28–32], в которых квазиклассическая теория возмущений для действия [24] обобщена с тем, чтобы вычислить кулоновскую поправку к функции действия для произвольного значения конечного импульса фотоэлектрона и произвольной частоты лазерного поля. В расчетах используется ММВ [13], продемонстрировано его применение для описания эффектов, возникающих при фотоионизации атомов и положительно заряженных ионов в интенсивном лазерном поле. Результаты существенно отличаются от получаемых в приближении Келдыша без учета кулоновского взаимодействия и практически идентичны данным, полученным при численном интегрировании временного уравнения Шредингера. В тех случаях, когда возможно сравнение с экспериментальными данными, также обнаружено удовлетворительное согласие.

При учете кулоновского взаимодействия между вылетающим электроном и атомным остатком возникают поправки двух типов [31, 32]. Во-первых, кулоновский потенциал $U_C = -Z/r$ порождает добавку к действию

$$W_C^{(1)} = - \int_{t_s}^{+\infty} U_C(\mathbf{r}_0(t)) dt = Z \int_{t_s}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{\mathbf{r}_0^2(t)}}, \quad (24)$$

которая явно содержит “малое” кулоновское взаимодействие, поэтому интеграл можно вычислять вдоль траектории, не возмущенной кулоновским полем.

Во-вторых, кулоновское поле искажает траекторию электрона. Если поправка к траектории $\mathbf{r}_1(t)$ найдена из решения уравнения Ньютона в присутствии двух полей

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = - \frac{Z(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1|^3}, \quad (25)$$

³⁾ Аналитические формулы [24] для вероятностей ионизации в низкочастотном электромагнитном поле известны в литературе также как “формулы АДК” [26]. Соотношение результатов, полученных в работах [24] и [26], обсуждается в [27, 3].

то соответствующая поправка к действию есть

$$W_C^{(2)} = \int_{t_s}^{+\infty} [\mathbf{v}_0 \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{v}_1^2 - \mathcal{E}(t) \mathbf{r}_1] dt - (\mathbf{v}_0 \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1 \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_1 \mathbf{r}_1) \Big|_{t=t_s}^{t \rightarrow +\infty}. \quad (26)$$

Кроме того, момент начала подбарьерного движения в мнимом времени $t_s(\mathbf{p})$ также может содержать кулоновскую поправку.

Если эти поправки малы по сравнению с действием (9) в лазерном поле, их подстановка в показатель экспоненты дает амплитуду нелинейной ионизации с учетом кулоновского взаимодействия. В итоге кулоновская поправка к вероятности ионизации определяется формулой

$$Q_C = \exp\{-2 \operatorname{Im}(W_C^{(1)} + W_C^{(2)})\}. \quad (27)$$

По абсолютной величине эти поправки могут быть велики по сравнению с единицей, при этом изменение импульсного распределения фотоэлектронов и полной вероятности ионизации будет значительным. Приведем примеры вычисления кулоновских поправок в спектрах многоквантовой ионизации атомов в интенсивном лазерном поле.

2.1. Угловые распределения в эллиптически поляризованном поле. Интересно рассмотреть эффекты, имеющие *качественный* характер, само существование которых является следствием кулоновского взаимодействия. Из таких эффектов в надпороговой ионизации хорошо известно нарушение четырехкратной симметрии угловых распределений фотоэлектронов в поле с эллиптической поляризацией. Для достаточно длинных лазерных импульсов, в которых эффекты абсолютной фазы несущественны, приближение Келдыша приводит к угловым распределениям, симметричным относительно большой и малой осей эллипса поляризации. В то же время экспериментальные данные ясно показывают, что в поле с эллиптической поляризацией такой симметрии нет даже приближенно [33, 34]. При промежуточных значениях эллиптичности ξ ($0.2 < \xi < 0.8$) наиболее вероятный импульс фотоэлектрона направлен вдоль малой оси эллипса поляризации [14]. Это очевидно, если учесть, что электрон рождается на выходе из-под барьера, имея нулевую скорость (для простоты ограничимся туннельным режимом $\gamma \ll 1$). Вероятность туннелирования максимальна в тот момент, когда электрическое поле достигает максимума. При этом векторный потенциал минимален по величине и

направлен вдоль малой оси эллипса поляризации. Туда же направлен и импульс $\mathbf{p} = \mathbf{v} - \mathbf{A}/c$, измеряемый в детекторе. Характерный пример показан на рис.1, где приведены также результаты, полученные путем

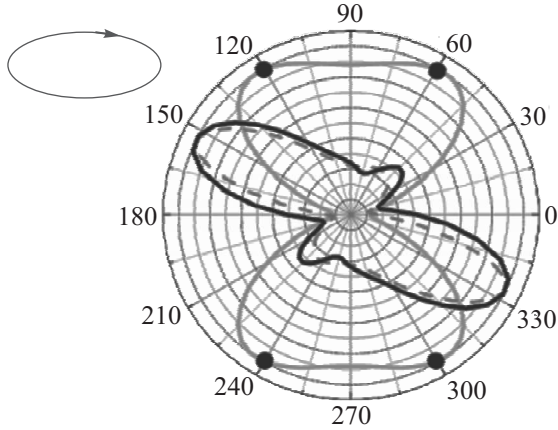


Рис.1. Угловые распределения фотоэлектронов с энергией $\epsilon = 7.9$ эВ при ионизации основного состояния атома водорода полем титан-сапфирового лазера ($\hbar\omega = 1.55$ эВ, $J \simeq 10^{14}$ Вт/см², эллиптичность $\xi = 0.5$). Результаты расчета в рамках модели Келдыша показаны сплошной серой линией, угловое распределение, найденное ММВ с учетом кулоновских поправок – штриховой линией. Сплошная черная линия – численное решение временного уравнения Шредингера. На вставке показана ориентация эллипса поляризации со стрелкой в направлении вращения вектора электрического поля

точного решения временного уравнения Шредингера и рассчитанные методом мнимого времени с учетом кулоновских поправок [29]. Видно, что в последнем случае распределение не обладает четырехкратной симметрией эллипса поляризации и практически идентично точному результату. Сравнение угловых распределений фотоэлектронов, рассчитанных с учетом кулоновских поправок, с экспериментом [34] демонстрирует количественное согласие [29].

2.2. Интерференционная структура спектра. В линейно поляризованном поле на каждом оптическом периоде имеются две траектории, вклады которых в амплитуду ионизации сравнимы по абсолютной величине (а в случае строго монохроматического поля – одинаковы). Наличие нескольких траекторий, входящих в амплитуду с близкими весами, приводит к эффекту интерференции в импульсных распределениях, рассмотренному в задаче о многоквантовой ионизации в [14]. В ультракоротких импульсах характер интерференции зависит от абсолютной фазы импульса, что может быть использовано для ее измерения [16]. Наблюдение интерференции в спектрах многоквантовой ионизации затруднено из-за того, что происходя-

щее на эксперименте усреднение по распределению интенсивности лазерной волны в фокусе смазывает интерференционную структуру. Только в последнее время научились обходить эту трудность и измерять спектры, на которых видны тонкие детали интерференционной картины [16, 17].

В спектрах, полученных при помощи численного интегрирования уравнения Шредингера, интерференция хорошо видна, и такие результаты находятся в количественном согласии с данными эксперимента [16, 17]. Интерференционная картина спектра, вычисленного в рамках модели Келдыша, согласуется с экспериментом и численными расчетами лишь качественно, зачастую “с точностью до наоборот” (см., например, рис.3 в [30]). В то же время спектр, вычисленный с учетом кулоновских поправок, количественно близок к результату, полученному численным интегрированием временного уравнения Шредингера (см. рис.3 в [30] и рис.1 в [35]). Таким образом, вклад кулоновского поля атомного остатка в разность фаз, набегавших вдоль различных траекторий, приводящих в одно и то же конечное состояние, значителен и должен учитываться при расчете интерференционной структуры спектра.

2.3. Многоквантовая ионизация атомов в поле произвольной частоты. Значительный прогресс в физике взаимодействия интенсивных лазерных полей с веществом наблюдается в последние годы в связи с введением в строй мощных источников когерентного излучения ультрафиолетового и рентгеновского диапазонов, в которых используются лазеры на свободных электронах. Уникальные установки этого типа работают в лаборатории DESY (Германия) [36], в Японии [37] и США. Достигнутые на сегодняшний день интенсивности импульсов составляют 10^{16} Вт/см² при длине волны $\lambda \approx 13$ нм [36], 10^{14} Вт/см², $\lambda \approx 50$ нм [37] и 10^{18} Вт/см², $\lambda \approx 1.2$ нм (на ускорителе SLAC в Стенфорде). Типичные значения параметра Келдыша при многоквантовой ионизации атомов и ионов такими лазерами составляют $\gamma \simeq 30 \div 100$, что соответствует глубоко многофотонному режиму.

В работах [31, 32] получена кулоновская поправка $Q_C(\mathcal{E}, \omega)$ для поля высокой частоты, $\gamma \gg 1$, когда формулы для вероятности туннельной ионизации неприменимы даже для качественных оценок. В многофотонном режиме поправка (24) имеет тот же вид, что и в туннельном [24], но становится существенной поправка (26), связанная с искажением траектории кулоновским полем. Для ее нахождения можно применить метод усреднения по быстрому движению (метод Капицы) [28, 32]. Согласно этому методу в [38, 39] представим движение электрона в быстропе-

ременном поле как перемещение вдоль плавной траектории $X(t)$ с малыми осцилляциями на частоте ω вблизи нее:

$$x(t) = X(t) + \frac{\mathcal{E}_0}{\omega^2} (1 - \cos \omega t). \quad (28)$$

Условие применимости метода усреднения имеет вид $\omega T \gg 1$, где T – характерное время классического движения в кулоновском поле [39] после выхода из-под барьера

$$T = 2\pi b^{3/2} / \sqrt{\mathcal{Z}e^2} = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{2K_0}{n^*}}. \quad (29)$$

Здесь $b = \kappa/\omega$ – ширина барьера при $\gamma \gg 1$. Таким образом, метод Капицы применим в условиях многоквантовой ионизации:

$$\omega T \simeq \sqrt{\frac{2K_0}{n^*}} = \mu^{-1/2} \gg 1. \quad (30)$$

При этом условии $\gamma \gg 1$ также предполагается выполненным, что обеспечивает малость амплитуды осцилляций по сравнению с пространственным масштабом b , характеризующим усредненное движение электрона:

$$\frac{\mathcal{E}_0}{\omega^2 b} = \gamma^{-1} \ll 1. \quad (31)$$

Усредненное движение является консервативным с интегралом энергии

$$\frac{1}{2} \dot{X}^2 - \frac{\mathcal{Z}}{X} = E = \text{const}. \quad (32)$$

Из закона сохранения энергии (32) можно найти связь между импульсом $p_{||}$ на выходе из-под барьера и импульсом электрона \mathbf{p} на бесконечности: $p_{||} = \sqrt{p^2 + 2\mathcal{Z}/b}$. Наиболее вероятной траектории отвечает $p = 0$ и ненулевой продольный импульс на выходе из-под барьера [28]:

$$p_{||} = \sqrt{2\mathcal{Z}/b} = \sqrt{2n^*\omega} = \kappa\sqrt{2\mu}, \quad \mu = n^*/2K_0. \quad (33)$$

Малый параметр μ (30) определяет вклад кулоновского поля в искажение траектории электрона.

Кулоновскую поправку можно записать в виде [31, 32]

$$Q_C(\mathcal{E}_0, \omega) = Q_0 \cdot Q_1 \approx \left(\frac{2}{F}\right)^{2n^*} (1 + 2e^{-1}\gamma)^{-2n^*}, \quad e = 2.718\dots, \quad (34)$$

пригодном при произвольных значениях параметра адиабатичности γ . В пределе низких частот $Q_1 \rightarrow 1$,

и (34) переходит в формулу () для скорости туннельной ионизации s -уровня в низкочастотном поле.

В обратном пределе, $\gamma \gg 1$, поправка (34) не зависит от интенсивности и численно велика. Воспроизводится степенной закон, характерный для теории возмущений высокого порядка N_{\min} : выражение для скорости ионизации принимает вид

$$w \simeq \frac{I}{\hbar} A(K_0, n^*) F^{2N_{\min}},$$

$$A(K_0, n^*) \simeq 2^{2n^*} C_\kappa^2 e^{N_{\min} + 2n^*} K_0^{2N_{\min} + 2n^* - 3/2}, \quad (35)$$

где $N_{\min} = [K_0] + 1$ – минимальное число квантов, необходимое для ионизации.

Для оценки точности формулы (34) сравним найденную из нее скорость ионизации с результатами численного расчета [31, 32]. На рис.2 показаны логарифмы скорости ионизации для атома водорода в $1s$ состоянии в поле второй гармоники титан-сапфирового лазера с энергией фотона $\hbar\omega = 3.10$ эВ (а) и в поле с несколько более низкой частотой $\hbar\omega = 2.94$ эВ (б). Скорость ионизации, рассчитанная методом комплексных квазиэнергий (метод Флоке) [40], показана точками (\bullet). Результаты численного решения временного уравнения Шредингера при помощи кода Qrgr [41] в поле короткого импульса длительностью в 10 периодов показаны треугольниками (\blacktriangle). Совпадение результатов независимых численных расчетов свидетельствует об их надежности.

Отклонения аналитических результатов от численно найденных скоростей ионизации связаны, в основном, с резонансами, не учитываемыми в данной теории. То, что именно резонансы ответственны за эти расхождения, подтверждается сравнением кривых на рис.2. В случае (а) в области интенсивностей $\mathcal{I} \simeq 2 \div 3 \cdot 10^{13}$ Вт/см² наблюдается 4-фотонный резонанс с одним из ридберговских уровней, положение которого зависит от интенсивности благодаря динамическому штарковскому сдвигу. На рис.2б длина волны, не соответствующая какому-либо конкретному лазеру, подобрана так, чтобы резонанс отсутствовал. При этом совпадение аналитических и численных результатов оказывается идеальным.

Аналогичные расчеты были выполнены для случая ионизации иона Xe^{17+} ($I = 434$ эВ, оболочка $4p_0$) в поле рентгеновского лазера с длиной волны $\lambda = 13.3$ нм ($\hbar\omega \approx 93$ эВ) [31]. Параметры K_0 , n^* и μ равны соответственно 4.67, 3.19 и 0.34, кулоновская поправка увеличивает вероятность ионизации на много порядков: $Q_C \approx 9 \cdot 10^8$.

3. Релятивистская теория туннелирования. Рекордные интенсивности лазерного излучения до-

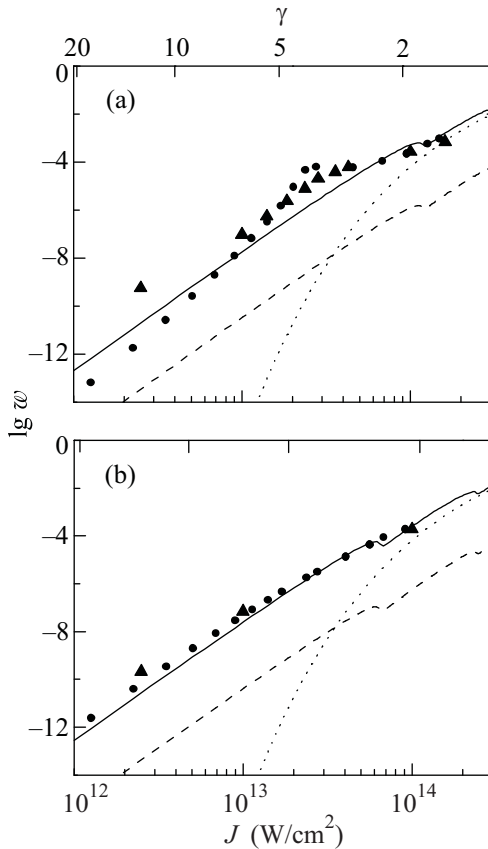


Рис.2. Скорость ионизации (в единицах $me^4/\hbar^3 = 4.13 \cdot 10^{16} \text{с}^{-1}$), вычисленная по формуле (34) – сплошная линия, по (23) – штриховая линия, и по туннельной формуле (1), а также найденная численно методом Флойке (●) и решением временного уравнения Шредингера (▲) в зависимости от интенсивности для 1s состояния атома водорода в поле линейно поляризованной волны с длиной волны 400 нм (а) и 422 нм (б). Параметры K_0 равны соответственно 4.39 и 4.63. Интенсивности 10^{14}Вт/см^2 соответствует амплитуда поля $\mathcal{E}_0 = 0.053\mathcal{E}_a$, $10^{13} \text{Вт/см}^2 - \mathcal{E}_0 = 0.0169\mathcal{E}_a$. Кулоновская поправка $Q_C \approx 6 \cdot 10^2$

стигают сейчас $\mathcal{I} \sim 10^{22} \text{Вт/см}^2$ и могут быть значительно повышены [42]. Столь интенсивные поля, намного превосходящие характерное атомное поле \mathcal{E}_a , способны “ободрать” электронную оболочку тяжелого атома и образовать многозарядные ионы с $Z \gtrsim 40$, для которых энергия связи основного уровня сравнима с энергией покоя электрона. В этом случае требуется релятивистское обобщение теории ионизации Келдыша. В работах [43, 44] с помощью ММВ была найдена подбарьерная траектория электрона в поле монохроматической плоской волны с эллиптической поляризацией, удовлетворяющая релятивистским уравнениям движения, и вычислена скорость ионизации релятивистского связанного состо-

яния. Изложим кратко этот подход на более общем примере.

Далее в этом разделе $\hbar = c = 1$, $E_0 = m\epsilon_0$ – энергия атомного уровня (включая массу покоя электрона), $\mathcal{E}_{cr} = m^2/e = 1.32 \cdot 10^{16} \text{В/см}$ – “критическое”, или швингеровское, поле в КЭД [45–47], $\mathcal{I}_{cr} = \mathcal{E}_{cr}^2/8\pi = 2.32 \cdot 10^{29} \text{Вт/см}^2$ – соответствующая ему интенсивность излучения, атомное поле $\mathcal{E}_a = m^2 e^5 = \alpha^3 \mathcal{E}_{cr}$, $\mathcal{I}_a = 3.51 \cdot 10^{16} \text{Вт/см}^2$ и $\alpha = e^2 = 1/137$. Для известных в настоящее время атомов $Z < 137$, $0 < \epsilon_0 < 1$, и можно пользоваться приближением точечного заряда ядра [48, 49].

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль оси x . Выбирая калибровку 4-потенциала в виде

$$A_\mu = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega} \{0, 0, a(\theta), -\rho b(\theta)\}, \quad \theta = \omega(t - x), \quad (36)$$

где θ – переменная светового фронта, чисто мнимая в подбарьерном движении, ω – характерная частота волны и $-1 \leq \rho \leq 1$, имеем

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \{0, a'(\theta), -\rho b'(\theta)\}, \quad \mathbf{B} = \mathcal{E}_0 \{0, \rho b'(\theta), a'(\theta)\}. \quad (37)$$

Функции $a(\theta)$ и $b(\theta)$ задают форму лазерного импульса. Так, $a = \sin \theta$, $b = \cos \theta$ отвечают монохроматическому свету с эллиптичностью ρ , $a = \tan \theta$ – солитоноподобному импульсу $\mathcal{E}(x, t) = \mathcal{E}_0 / \cosh^2 \theta$, и т.д. Уравнения движения

$$\dot{\mathbf{p}} = e(\mathcal{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}]), \quad \dot{E}_{\text{kin}} = e(\mathcal{E}\mathbf{v}), \quad (38)$$

где $p^i = (E_{\text{kin}}, \mathbf{p})$ – 4-импульс электрона, показывают, что для любого поля вида (36) существует интеграл движения $p_- = (E_{\text{kin}} - p_x)/m$:

$$\dot{p}_- = \frac{e}{m} \{(\mathcal{E}_y - B_z)v_y + (\mathcal{E}_z + B_y)v_z\} \equiv 0, \quad (39)$$

где $E_{\text{kin}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, а точка обозначает производную по лабораторному времени t . При этом

$$p_- = (1 - v_x)/\sqrt{1 - v^2} = \theta/\omega\tau, \quad (40)$$

где $\tau = \int^t \sqrt{1 - v^2} dt'$ – собственное время частицы (переменная волнового фронта θ линейна по собственному времени).

В дальнейшем удобно выделить множитель $i = \sqrt{-1}$, полагая

$$\theta = i\eta, \quad a(i\eta) = i\tilde{a}(\eta), \quad b(i\eta) = \tilde{b}(\eta), \quad (41)$$

где \tilde{a} и \tilde{b} – вещественные аналитические функции η . Переходя к мнимому времени $\eta = -i\theta$ и интегри-

руя уравнения движения с учетом граничных условий ММВ [13], можно найти экстремальную⁴⁾ подбарьерную траекторию электрона. Не выписывая ее в явном виде⁵⁾, сделаем несколько замечаний.

В отличие от аналогичной нерелятивистской задачи [14], такая траектория трехмерна. При этом в подбарьерном движении величины x , p_y и z являются чисто мнимыми; это уже указывает на то, что в классической механике подобная траектория не имеет физического смысла. Однако при переходе к квантовой теории она дает удобный способ вычисления (в квазиклассическом приближении) вероятности w_R туннелирования релятивистских частиц сквозь барьер. Главный (экспоненциальный) фактор в вероятности w_R определяется [43, 44] мнимой частью функции укороченного действия W , вычисленной вдоль экстремальной траектории:

$$W = \int_{t_0}^0 \left\{ -\sqrt{1-v^2} + e\mathbf{A}\mathbf{v} - eA^0 + \varepsilon \right\} dt - \mathbf{p}\mathbf{r}|_{t=0} = \\ = \frac{i}{\omega} \eta_0 (p_- - \varepsilon), \quad (42)$$

где $t_0 = p_- \tau_0 = i\eta_0/\omega$ – начальный момент подбарьерного движения. Окончательно получим, что скорость ионизации релятивистского связанного состояния равна⁶⁾ (с точностью до предэкспоненты)

$$w_R \sim \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} W \right\} = \exp \left\{ \frac{2m}{\omega} \eta_0 (p_- - \varepsilon) \right\}. \quad (43)$$

Параметр $\eta_0 = -i\omega t_0$ (полное мнимое “время”) и интеграл движения p_- определяются из системы уравнений:

$$\tilde{a}^2(\eta_0) - \rho^2 [\tilde{b}(\eta_0) - I_b(\eta_0)]^2 = \gamma_0^2 (1 - 2\varepsilon_0 p_- + p_-^2), \\ [I_{a^2}(\eta_0) + \rho^2 \{ [I_b(\eta_0)]^2 - I_{b^2}(\eta_0) \}] = \gamma_0^2 (1 - p_-^2), \quad (44)$$

где $\gamma_0 = m\omega/e\mathcal{E}_0 = \omega/m(\mathcal{E}_0/\mathcal{E}_{cr})^{-1}$,

$$I_{a^2}(\eta_0) = \frac{1}{\eta_0} \int_0^{\eta_0} \tilde{a}^2(\eta) d\eta, \quad I_b(\eta_0) = \frac{1}{\eta_0} \int_0^{\eta_0} \tilde{b}(\eta) d\eta,$$

⁴⁾ То есть траекторию, минимизирующую мнимую часть функции W (42) и определяющую наиболее вероятный путь туннелирования частицы [13].

⁵⁾ Для случая монохроматической волны с произвольной эллиптичностью ρ формулы см. в [50].

⁶⁾ Поскольку не учтено кулоновское взаимодействие между электроном и атомным остатком, то последующие формулы относятся к случаю ионизации уровня, связанного короткодействующими силами.

$$I_{b^2}(\eta_0) = \frac{1}{\eta_0} \int_0^{\eta_0} \tilde{b}^2(\eta) d\eta. \quad (45)$$

Для монохроматической волны с эллиптической поляризацией имеем: $a = \sin \theta$, $b = \cos \theta$,

$$I_{a^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sinh 2\eta_0}{2\eta_0} - 1 \right), \quad I_b = \frac{\sinh \eta_0}{\eta_0}, \\ I_{b^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sinh 2\eta_0}{2\eta_0} + 1 \right)$$

и система (45) переходит в уравнения (4) работы [44], которые легко решаются численно, см. табл. 1 и 2 в [44].

Уравнения упрощаются при $\omega \rightarrow 0$, то есть при переходе к постоянному скрещенному полю; в этом случае удается вычислить [51, 52] и кулоновский фактор Q_C :

$$w_R \propto Q_C \exp(-2/3F),$$

$$Q_C = \left[\frac{2}{F} (1 - \frac{\xi^2}{3})^2 \right]^{2\nu} \exp \left\{ 6Z\alpha \arcsin \left(\frac{\xi}{\sqrt{3}} \right) \right\}, \quad (46)$$

где $F = \mathcal{E}/\mathcal{E}_{ch}$ и $\mathcal{E}_{ch} = (\sqrt{3}\xi)^3 (1+\xi^2)^{-1} \mathcal{E}_{cr}$ – характерное поле, $\nu = Z\alpha\varepsilon_0/\sqrt{1-\varepsilon_0^2}$ – релятивистский аналог эффективного главного квантового числа n^* , а ξ – удобная вспомогательная переменная [51], связанная с энергией уровня: $\xi = [1 - \frac{1}{2}\varepsilon_0(\sqrt{\varepsilon_0^2 + 8} - \varepsilon_0)]^{1/2}$, $0 < \xi < 1$. Отметим, что для модели водородоподобного атома (иона) $V(r) = -Z\alpha/r$, $0 < r < \infty$,

$$\varepsilon_0 = \nu = \sqrt{1 - (Z\alpha)^2}, \quad \Psi_0 \sim \exp(-Z\alpha r) r^{-\sqrt{1-(Z\alpha)^2}} \quad (47)$$

(состояние $1s_{1/2}$), а переменная ξ практически линейно зависит от Z при $Z < 100$.

Для оптических и инфракрасных лазеров $\omega/m \lesssim 10^{-5}$, поэтому ионизация многозарядных ионов возможна в туннельном режиме, $\gamma \ll 1$. В этом случае были вычислены все величины, входящие в формулу для w_R . Отсылая за подробностями к [50], приведем разложения при $\varepsilon_0 = 1 - \alpha^2 \kappa^2/2 \rightarrow 1$:

$$\exp(-2\text{Im} W) = \exp \left\{ -\frac{2}{3F} \left[1 - \frac{1}{10} \left(1 - \frac{\rho^2}{3} \right) \gamma^2 \right] + \left(\frac{9}{280} - \frac{29}{1260} \rho^2 + \frac{1}{216} \rho^4 \right) \gamma^4 \right\},$$

$$Q_C = \exp \left\{ 2\nu \left(\ln \frac{2}{F} - \frac{\rho^2}{9} \left[\frac{1}{2} \gamma^2 - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{12} \rho^2 \right) \gamma^4 \right] \right) \right\}, \quad (48)$$

где $\mathcal{E}_{ch} = \kappa^3 \mathcal{E}_a$, γ – параметр Келдыша и ρ – эллиптичность волны. Для произвольной энергии уровня ε_0 имеем

$$w_R \sim \exp \left\{ -\frac{2}{3F} \left[1 - \frac{1-\rho^2/3}{10(1-\xi^2/3)} \gamma^2 + \mathcal{O}(\gamma^4) \right] \right\}, \quad \gamma^2 \ll 1. \quad (49)$$

В случае линейной ($\rho = 0$) и циркулярной ($\rho = \pm 1$) поляризации эта формула совпадает с полученными ранее [15, 53, 54]. Значения скорости туннельной, $\gamma \ll 1$, ионизации представлены на рис.3: сплошные кривые отвечают $\rho = 0$, штриховые – $\rho = \pm 1$.

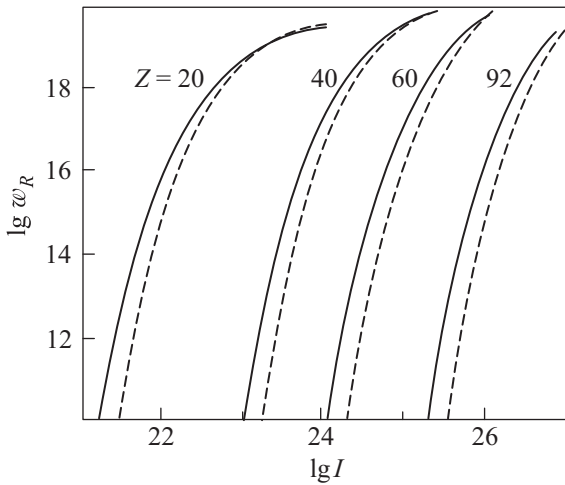


Рис.3. Скорость релятивистской ионизации основного состояния водородоподобного атома (у кривых указаны значения Z). Масштаб по осям – логарифмический, w_R даны в c^{-1} , \mathcal{I} – в $\text{Вт}/\text{см}^2$

Зависимость вероятности w_R от \mathcal{I} является чрезвычайно резкой: при росте интенсивности \mathcal{I} на порядок w_R возрастает на 10–12 порядков, что указывает на туннельный характер процесса ионизации. Отметим, что кулоновский фактор Q_C и предэкспонента меняют величину w_R на несколько порядков, но действуют в разные стороны. Как и в нерелятивистской теории [1], значения w_R быстро уменьшаются с ростом эллиптичности ρ (при фиксированной амплитуде поля \mathcal{E}_0). Это объясняется тем, что при заданной интенсивности \mathcal{I} электрическое поле убывает $\sim (1 + \rho^2)^{-1/2}$.

В заключение сделаем несколько замечаний.

1) В релятивистском случае вероятность туннелирования зависит от спина частицы. Соответствующая поправка S_{\pm} к w_R может быть вычислена [13, 54], если использовать для подбарьерного движения спина полуклассическое уравнение Баргманна-Мишеля

Телегди [55], продолженное в мнимое время. Это дает спиновый фактор S_{\pm} в w_R :

$$S_{\pm} = \exp \left\{ \pm \sqrt{\frac{3\xi^2}{1+\xi^2}} (1 - \mu/\mu_B) \right\}, \quad \rho = 0, \quad (50)$$

где знак \pm соответствует проекции спина $\pm \hbar/2$ на направление магнитного поля, а μ – магнитный момент связанного электрона⁷). Хотя эта поправка принципиально важна⁸), численно она невелика: $S_{\pm} = 1 \pm \mathcal{O}((Z\alpha)^3)$ при $Z \ll 137$, $S_+ = 1/S_- = 1.20$ и 1.28 при $Z = 92$ (уран) и $Z=100$.

2) Оценим область применимости нерелятивистской теории Келдыша. Нетрудно показать [44], что с экспоненциальной точностью

$$w_{NR}/w_R \propto \exp \left\{ -\frac{1}{36} (Z\alpha)^5 \mathcal{E}_{cr}/\mathcal{E} \right\}. \quad (51)$$

Различие между нерелятивистской (w_{NR}) и релятивистской (w_R) вероятностями ионизации становится заметным при $Z \gtrsim Z_*$,

$$Z_* = \alpha^{-1} (36 \mathcal{E}_0/\mathcal{E}_{cr})^{1/5} \approx (\mathcal{I}/10^{22} \text{Вт}/\text{см}^2)^{1/10}. \quad (52)$$

Эта оценка дает: $Z_* = 35, 45, 60$ и 75 при $\mathcal{I} = 10^{21}, 10^{22}, 10^{23}$ и $10^{24} \text{Вт}/\text{см}^2$, см. рис.4. Таким образом, теория Келдыша применима в более широкой области, чем можно было бы ожидать а priori.

3) Уравнения (44), справедливые при произвольной форме лазерного импульса (36), значительно упрощаются в случае линейной поляризации:

$$\tilde{a}(\eta_0) = \gamma_r \sqrt{1 + \frac{(\varepsilon_0 - p_-)^2}{1 - \varepsilon_0^2}}, \quad I_{a^2}(\eta_0) = \gamma_r^2 \cdot \frac{1 - p_-^2}{1 - \varepsilon_0^2}, \quad (53)$$

где $\gamma_r = \gamma_0 \sqrt{1 - \varepsilon_0^2}$ – релятивистское обобщение параметра адиабатичности Келдыша. Входящие в (53) функции иногда вычисляются аналитически [44].

В нерелятивистском пределе $\sqrt{1 - \varepsilon_0^2} = \alpha\kappa$, $(\varepsilon_0 - p_-)^2 = \mathcal{O}(\alpha^4)$, $\kappa = \sqrt{2|E_0|}$, $\gamma_r = \omega\kappa/\mathcal{E}_0 = \gamma$ и уравнения (53) и (42) принимают вид

$$\tilde{a}(\eta_0) = \gamma, \quad w_{NR} \sim \exp \left\{ -\frac{\kappa^2}{\omega} f(\gamma) \right\}, \quad (54)$$

⁷) Отличный от магнетона Бора, если $Z\alpha \approx 1$. Так, для $1s_{1/2}$ -состояния в кулоновском поле $\mu/\mu_B = (1 + 2\sqrt{1 - (Z\alpha)^2})/3$.

⁸) Она приводит к отличию вероятностей туннелирования для скалярных (бесспиновых) частиц и частиц со спином. Другой способ учета спиновой поправки, основанный на квадрировании уравнения Дирака, дает результат, близкий к (50).

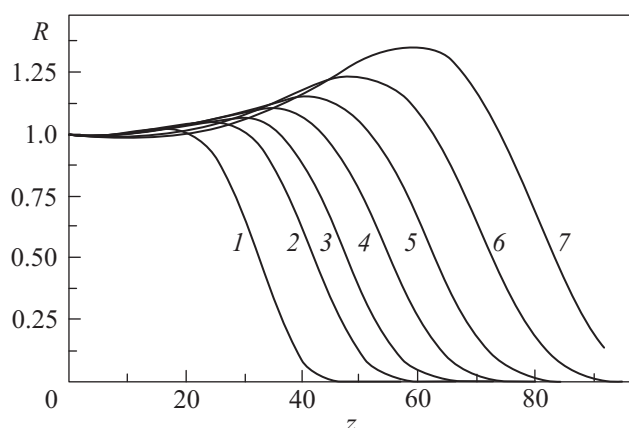


Рис.4. Отношение (51) скоростей ионизации, вычисленных по нерелятивистским и релятивистским формулам для основного состояния водородоподобного атома в зависимости от Z . Кривые 1–7 относятся к интенсивностям $I = 10^{20}, 10^{21}, 3 \cdot 10^{21}, 10^{22}, 3 \cdot 10^{22}, 10^{23}$ и $3 \cdot 10^{23}$ Вт/см² соответственно

где $f(\gamma)$ – функция Келдыша:

$$f(\gamma) = \eta_0 - \frac{1}{\gamma^2} \int_0^{\eta_0} \tilde{a}(\eta) d\eta. \quad (55)$$

Частотная зависимость вероятности w_{NR} определяется, прежде всего, функцией $f(\gamma)$, которая в этом случае легко вычисляется для импульсов различной формы; многочисленные примеры можно найти в [11].

Авторы благодарны С.П. Гореславскому за обсуждение работы и полезные замечания, а также М.Н. Маркиной за помощь при подготовке рукописи к печати. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты # 09-02-01201а и # 10-02-00364а).

1. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1945 (1964).
2. F. H. M. Faisal, J. Phys. B **6**, L89 (1973); H. R. Reiss, Phys. Rev. A **22**, 1786 (1980).
3. В. С. Попов, УФН **174**, 921 (2004).
4. Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, *Нелинейная ионизация атомов лазерным излучением*, М.: Физматлит, 2001.
5. D. V. Milošević, G. G. Paulus, D. Bauer, and W. Becker, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **39**, R203 (2006).
6. D. M. Wolkow, Z. Phys. **94**, 250 (1935); ЖЭТФ **7**, 1286 (1937).
7. Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, В. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **88**, 495 (2008).
8. В. М. Karnakov, V. D. Mur, S. V. Popruzhenko, and V. S. Popov, Phys. Lett. A **374**, 386 (2009).

9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, М.: Наука, 1989.
10. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **38**, 570 (1960); **41**, 1324 (1961).
11. В. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **73**, 3 (2001); ЖЭТФ **120**, 315 (2001).
12. В. С. Попов, В. П. Кузнецов, А. М. Переломов, ЖЭТФ **53**, 331 (1967).
13. В. С. Попов, ЯФ **68**, 717 (2005).
14. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, ЖЭТФ **50**, 1393; **51**, 309 (1966).
15. L. Keldysh, "Multiphoton ionization by a very short laser pulse", частное сообщение (2001).
16. F. Lindner, M. G. Schätzel, H. Walther et al., Phys. Rev. Lett. **95**, 040401 (2005).
17. R. Gopal, K. Simeonidis, R. Moshhammer et al., Phys. Rev. Lett. **103**, 053001 (2009).
18. R. Reichle, H. Helm, and I. Yu. Kiyan, Phys. Rev. Lett. **87**, 243001 (2001); Phys. Rev. A **68**, 063404 (2003).
19. A. Gazibegović-Busuladžić, D. V. Milošević, and W. Becker, Opt. Comm. **275**, 116 (2007).
20. N. L. Manakov, M. V. Frolov, B. Borca, and A. F. Starace, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **36**, R49 (2003).
21. M. V. Frolov, N. L. Manakov, E. A. Pronin, and Anthony F. Starace, Phys. Rev. Lett. **91**, 053003 (2003).
22. D. Bauer, D. V. Milošević, and W. Becker, Phys. Rev. A **72**, 023415 (2005).
23. А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ **52**, 223 (1967).
24. А. М. Переломов, В. С. Попов, ЖЭТФ **52**, 514 (1967).
25. S. L. Chin, C. Rolland, P. V. Corkum, and P. Kelly, Phys. Rev. Lett. **61**, 153 (1998).
26. М. В. Аммосов, Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, ЖЭТФ **91**, 2008 (1986).
27. В. С. Попов, УФН **169**, 819 (1999).
28. В. С. Попов, В. Д. Мур, С. В. Попруженко, Письма в ЖЭТФ **85**, 275 (2007) [JETP Letters **85**, 223 (2007)].
29. S. V. Popruzhenko, G. G. Paulus, and D. Bauer, Phys. Rev. A **77**, 053409 (2008).
30. S. V. Popruzhenko and D. Bauer, Journ. Mod. Opt. **55**, 2573 (2008).
31. S. V. Popruzhenko, V. D. Mur, V. S. Popov, and D. Bauer, Phys. Rev. Lett. **101**, 193003 (2008).
32. С. В. Попруженко, В. Д. Мур, В. С. Попов, Д. Бауэр, ЖЭТФ **135**, 1092 (2009).
33. M. Bashkansky, P. H. Bucksbaum, and D. W. Schumacher, Phys. Rev. Lett. **60**, 2458 (1988).
34. G. G. Paulus, F. Grasbon, A. Dreisruh et al., Phys. Rev. Lett. **84**, 3791 (2000).
35. Tian Min Yan, S. V. Popruzhenko, M. J. J. Vrakking, and D. Bauer, Phys. Rev. Lett. **105**, 253002 (2010).
36. J. Andruszkow, B. Aunte, V. Ayvazyan, et al., Phys. Rev. Lett. **85**, 3825 (2000).
37. T. Shintake et al., Nat. Photonics **2**, 555 (2008).
38. П. Л. Капица, ЖЭТФ **21**, 588 (1951); УФН **44**, 7 (1951).

39. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, М.: Наука, 1989.
40. R. M. Potvliege, *Computer Phys. Commun.* **114**, 42 (1998).
41. D. Bauer and P. Koval, *Computer Phys. Commun.* **174**, 396 (2006).
42. G. Mourou, T. Tajima, and S. Bulanov, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 309 (2006).
43. B. M. Karnakov, V. D. Mur, and V. S. Popov, *Laser Physics* **15**, 1556 (2005).
44. В. С. Попов, Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, С. Г. Поздняков, *ЖЭТФ* **129**, 871 (2006).
45. F. Sauter, *Z. Phys.* **61**, 742 (1931); **73**, 547 (1932).
46. W. Heisenberg and H. Euler, *Z. Phys.* **98**, 714 (1936).
47. J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82**, 664 (1951).
48. I. Pomeranchuk and Ya. Smorodinsky, *J. Phys. (Moscow)* **9**, 97 (1947).
49. Я. Б. Зельдович, В. С. Попов, *УФН* **105**, 403 (1971).
50. V. S. Popov, V. D. Mur, B. M. Karnakov, and S. G. Pozdnyakov, *Phys. Lett. A* **358** 21 (2006).
51. В. Д. Мур, Б. М. Карнаков, В. С. Попов, *ЖЭТФ* **114** 798 (1998).
52. Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, В. С. Попов, *ЖЭТФ* **132** 331 (2007).
53. А. И. Никишов, В. И. Ритус, *ЖЭТФ* **50**, 255 (1966).
54. В. С. Попов, Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, *Письма в ЖЭТФ* **79** 320 (2004).
55. V. Bargmann, L. Michel, and V.L. Telegdi, *Phys. Rev. Lett.* **2**, 435 (1959).