

ПО ИТОГАМ ПРОЕКТОВ
РОССИЙСКОГО ФОНДА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Проект РФФИ # 08-02-00448а

Нелинейно-оптический отклик атома в поле фемтосекундных лазерных импульсов околоатомной напряженности

А. В. Андреев, С. Ю. Стремоухов¹⁾, О. А. Шутова

Физический факультет и Международный учебно-научный лазерный центр МГУ им. М.В. Ломоносова,
ГСП-1, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 16 марта 2011 г.

Развита теория нерезонансного отклика одиночного атома, находящегося в состоянии с произвольным значением и направлением углового момента атомного электрона по отношению к направлению вектора поляризации воздействующего электромагнитного поля. Показано, что ток отклика атома имеет тензорную структуру и зависит как от направления углового момента атома, так и от вектора поляризации внешнего поля. Тензорный характер отклика обусловлен эффектами наведенной внешним полем анизотропии плотности распределения вероятности атомного электрона по сравнению со случаем свободного атома. Исследованы правила отбора для аксиально-симметричной задачи об атоме в поле. Продемонстрировано проявление правил отбора с помощью угловых спектров фотоэлектронов. Изучена вероятность ионизации атома как функции амплитуды и длительности импульса. Показано, что ширина спектра генерации нелинейным образом зависит от интенсивности поля, насыщаясь в области полей околоатомной напряженности. Предложены методы управления параметрами спектра отклика атома, основанные на использовании последовательности лазерных импульсов с различными временными профилями, несущими частотами и состояниями поляризации. Показано, что генерация ТГц излучения возможна в доионизационном режиме, где механизм генерации связан с атомной нелинейностью.

1. Введение. Эффект генерации гармоник высокого порядка (ГГВП) при взаимодействии атома с интенсивными лазерными импульсами, несмотря на двадцатилетнюю историю (см. обзоры [1, 2]), до сих пор привлекает значительный интерес. Этот интерес обусловлен целым рядом причин. Во-первых, были обнаружены особенности фотоэмиссионных и фотоэлектронных спектров, которые не описываются в рамках традиционных теоретических методов. Среди них можно упомянуть многолепестковую структуру угловых спектров фотоэлектронов, свидетельствующую о нарушении дипольных правил отбора [3], насыщение частоты отсечки [4] и т.д. Во-вторых, к настоящему времени значительное развитие получили методы управления спектром отклика атома, основанные на использовании многочастотного (как правило, двухцветного) лазерного излучения [5–8], позволяющие существенно повысить эффективность преобразования как в коротковолновую (УФ и рентгеновское излучение), так и в длинноволновую (ТГц

излучение) области спектра. В-третьих, в случае использования многочастотных схем дополнительным параметром управления эффективностью преобразования является поляризация отдельных частотных компонент поля [9].

Анализ эффективности преобразования при использовании поляризационных многочастотных схем производится, как правило, в рамках широко распространенной трехступенчатой модели [10–12], состоящей в ионизации атома, ускорении ионизованного электрона в поле внешней электромагнитной волны и последующей рекомбинации, то есть столкновении с ядром (или ионным остатком) родительского атома, в результате которого происходит генерация гармоник. В ранних работах обычно полагалось, что ионизация происходит из основного состояния атома, либо спектр дискретных состояний атома является водородоподобным. В более поздних работах спектр дискретных состояний атома рассчитывается численными методами. Эти методы получили название методов прямого решения уравнения Шредингера (см., например, [13]). Однако эволюция иони-

¹⁾ e-mail: sustrem@gmail.com

зованного электрона описывается либо классически, либо на основе использования базиса волковских волновых функций. На использовании волковских волновых функций базируются различные модификации приближения сильного поля (в англоязычной литературе SFA, см. [14, 15]).

подавляющее большинство исследований ГГВП выполнено при использовании линейно поляризованного монохроматического лазерного излучения. Однако уже в ряде ранних работ было показано, что спектр генерации высоких оптических гармоник существенно зависит как от спектрального состава падающего поля, так и от его состояния поляризации. Например, в работе [16] был предложен метод двухимпульсного двухчастотного управления спектром ГГВП, а в работе [17], по-видимому, впервые была рассмотрена возможность поляризационного управления. Метод модуляции поляризации воздействующего импульса является эффективным методом генерации субфемтосекундных импульсов [18–21]. В последнее время эти методы нашли широкое применение для генерации терагерцового (ТГц) излучения [22], когда два импульса с несущими частотами ω и 2ω одновременно взаимодействуют с атомарной или молекулярной средой. Варьирование интенсивности, длительности и времени задержки между импульсами позволяет управлять эффективностью генерации ТГц излучения. Следует отметить, что в рамках двухчастотной методики рассматривались также влияние взаимной поляризации импульсов на частотах ω и 2ω на эффективность генерации для случая двух коллинеарно или ортогонально поляризованных импульсов или циркулярно поляризованных импульсов [23, 24]. Таким образом, развитие общей теории нелинейно оптического отклика атома на воздействие многоимпульсной последовательности полихроматических произвольно поляризованных импульсов представляет значительный интерес для развития методов управления эффективностью генерации как коротковолнового (XUV), так и длинноволнового (ТГц) излучений.

Основной недостаток перечисленных выше теоретических методов состоит в том, что в рамках указанных подходов состояния дискретного и сплошного спектров не составляют единого полного базиса ортогональных собственных функций. Действительно, привлечение волковских волновых функций связано с тем, что в присутствии внешнего электромагнитного поля волновые функции сплошного спектра видоизменяются. Однако это в такой же мере касается и состояний дискретного спектра. Вместе с тем при стремлении напряженности электромагнитного поля

к нулю волковские волновые функции преобразуются в волновые функции свободной частицы, а отнюдь не в волновые функции состояний сплошного спектра водородоподобного атома.

В [25] было показано, что полные базисы собственных волновых функций краевых задач свободного атома и “атома во внешнем поле” в нерелятивистском приближении взаимно однозначно связаны друг с другом. Таким образом, зная базис собственных волновых функций свободного атома, мы можем строго математически описать эволюцию атомного электрона в поле произвольного лазерного импульса. Настоящая работа посвящена краткому обзору результатов, полученных в рамках выполнения проекта РФФИ (# 08-02-00448а) и посвященных применению указанного подхода для описания специфики процесса ГГВП в полях околоатомной напряженности и его дальнейшему развитию применительно к задачам расчета эффективности преобразования при воздействии многочастотного лазерного поля с произвольным состоянием поляризации отдельных компонент [26–31].

2. Базовые принципы теории. Традиционный подход к описанию процессов нерезонансного рассеяния электромагнитного излучения атомарными и молекулярными средами состоит в разложении волновой функции нестационарного уравнения Шредингера в ряд по собственным функциям свободного атома или молекулы. Это разложение лежит в основе расчета вектора поляризации среды. Обратимся для определенности к случаю атомарных сред. В рамках электродипольного приближения вектор электрической поляризации атомного ансамбля определяется как сумма дипольных моментов отдельных атомов $\mathbf{d}_{nm} = q \langle n | \mathbf{r} | m \rangle$. Собственные волновые функции краевой задачи свободного атома в случае произвольного атома со сферически симметричным потенциалом имеют вид

$$u_{nlm}(\mathbf{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (1)$$

где n – главное (или радиальное) квантовое число, а l и m – величина углового момента состояния и его проекции, соответственно.

Таким образом, каждое собственное состояние $|n\rangle$ характеризуется трехмерным квантовым числом $n = (nlm)$. Собственные значения энергии атома со сферически симметричным потенциалом не зависят от направления углового момента. Однако угловая зависимость волновых функций (1) задана в системе координат, однозначно связанной с угловым моментом отдельного атома, поскольку проекция углового момента на ось z принимает лишь целочисленные

значения. Следовательно, единичный вектор $\mathbf{n}_z^{(i)}$ задает ориентацию осей конфигурационного пространства состояний i -го атома в лабораторной системе координат, общей для всего атомного ансамбля²⁾.

Раскладывая волновую функцию нестационарного уравнения Шредингера в ряд по собственным функциям (1):

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n a_n(t) u_n(\mathbf{r}) \quad (2)$$

и производя суммирование по физически малому объему V_1 , для вектора электрической поляризации получаем

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}_0, t) = \sum_{i \in V_1} \sum_{n, m} a_n^{(i)*}(t) a_m^{(i)}(t) \mathbf{d}_{nm}^{(i)}, \quad (3)$$

где \mathbf{r}_0 – координата центра тяжести физически малого объема V_1 , а i – индекс суммирования по атомам, находящимся в этом объеме. Учитывая вышесказанное, из вида формулы (3) можно сделать следующие выводы. Во-первых, состояния n и m должны иметь противоположную четность. Поскольку четность волновых функций (1) определяется выражением $P = (-1)^l$, то это означает, что отклик атома возникает лишь в том случае, когда происходит изменение населенности различных энергетических состояний свободного атома. Во-вторых, направления дипольных моментов переходов для всех атомов совпадают, $\mathbf{d}_{nm}^{(i)} = \mathbf{d}_{nm}$, поскольку при расчете матричных элементов дипольного момента традиционно полагается, что направление вектора поляризации линейно поляризованной волны \mathbf{e} совпадает с направлением оси z конфигурационного пространства, а векторы поляризации циркулярно поляризованных волн $\mathbf{e}^{(\pm)}$ лежат в перпендикулярной плоскости и имеют вид $\mathbf{e}^{(\pm)} = (\mathbf{n}_x \pm i\mathbf{n}_y)/\sqrt{2}$. В обоих случаях это возможно лишь при $\mathbf{e} \parallel \mathbf{n}_z$.

Однако эти выводы находятся в противоречии с экспериментально наблюдаемыми явлениями. Во-первых, диэлектрическая проницаемость атомарных сред отлична от единицы и в области частот, значения которых на порядки меньше частоты их дипольно-разрешенных переходов. В этом случае населенность возбужденных состояний атома пренебрежимо мала, а следовательно, отклик атома не связан с переходами электрона между различными состояниями

²⁾ Следует отметить, что квантовомеханическое среднее оператора углового момента в состояниях с волновой функцией (1) имеет вид $\langle nlm | \mathbf{l} | nlm \rangle = \mathbf{n}_z \hbar m$. Поэтому, в целях краткости, мы будем говорить, что направление оси z совпадает с направлением углового момента атома, имея в виду его квантовомеханическое среднее.

ми свободного атома. Во-вторых, направление вектора поляризации линейно поляризованной волны строго фиксировано во всех точках атомного ансамбля, а направления векторов $\mathbf{n}_z^{(i)}$ отдельных атомов неполяризованного ансамбля полностью хаотичны. Следовательно, предположение о том, что для каждого атома $\mathbf{n}_z^{(i)} \parallel \mathbf{e}$ неверно.

В настоящей работе предлагается вариант теории нерезонансного отклика атома, свободный от указанных противоречий.

2.1. Краевая задача для атома во внешнем поле. Краевая задача для атома со сферически симметричным внутриатомным потенциалом имеет вид

$$\left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(r) \right] u_n(\mathbf{r}) = E_n u_n(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Собственные волновые функции указанной краевой задачи с произвольным сферически симметричным внутриатомным потенциалом имеют вид (1).

Обратимся теперь к краевой задаче для атома во внешнем поле, которая имеет вид

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A}(t) \right)^2 + U(r) \right] \varphi_N(\mathbf{r}, t) = E_N \varphi_N(\mathbf{r}, t). \quad (5)$$

В нерелятивистском приближении амплитуда колебаний атомного электрона в электромагнитном поле много меньше длины волны излучения, поэтому можно полагать $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{A}(t)$. Подставляя в (5) волновую функцию в виде

$$\varphi_N(\mathbf{r}, t) = u_n(\mathbf{r}) \exp\left(i \frac{q}{\hbar c} \mathbf{A}(t) \mathbf{r}\right), \quad (6)$$

мы получаем уравнение (4), где

$$E_N = E_n. \quad (7)$$

Таким образом, мы видим, что собственные значения краевых задач (4) и (5) в точности совпадают, а собственные волновые функции различны. Как мы отмечали выше, квантовое число n является совокупностью трех квантовых чисел $n = (nlm)$, которые однозначно определяют вид радиальной и угловой зависимости волновых функций $u_{nlm}(\mathbf{r})$. Учитывая простоту выражения (6), естественно положить $N = n$. Однако радиальное и угловое распределения волновых функций $\varphi_N(\mathbf{r}, t)$ в общем случае зависят от времени и потому квантовые числа (nlm) не имеют в этом случае традиционного смысла радиального квантового числа, углового момента и его проекции. Вместе с тем, $|\varphi_N(\mathbf{r}, t)|^2 = |u_n(\mathbf{r})|^2$. Следовательно, пространственное распределение плотности вероятности в обоих случаях оказывается одинаковым. Это

означает, что энергия кулоновского взаимодействия электрона и ядра остается неизменной, поскольку неизменным остается не только распределение плотности вероятности, но и все пространственные моменты распределения (например, $P_\alpha^{(nm)} = \int u_n^* x_\alpha u_m dV$, $P_{\alpha\beta}^{(nm)} = \int u_n^* x_\alpha x_\beta u_m dV$ и т.д.). Именно это обстоятельство и является причиной совпадения собственных значений энергии (7).

2.2. Связь собственных функций двух базисов. Из (6) несложно видеть, что базис собственных волновых функций $\varphi_n(\mathbf{r}, t)$ краевой задачи об “атоме в поле” (5) является таким же полным, как и базис собственных волновых функций $u_n(\mathbf{r})$ краевой задачи свободного атома (4). Действительно, условия ортонормированности и полноты волновых функций $\varphi_n(\mathbf{r}, t)$ имеют вид

$$\int \varphi_n^*(\mathbf{r}, t) \varphi_m(\mathbf{r}, t) dV = \int u_n^*(\mathbf{r}) u_m(\mathbf{r}) dV = \delta_{nm},$$

$$\sum_n \varphi_n^*(\mathbf{r}, t) \varphi_n(\mathbf{r}', t) = \exp\left[-i\frac{q}{\hbar c} \mathbf{A}(t) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')\right] \times \sum_n u_n^*(\mathbf{r}) u_n(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Следовательно, любая функция одного базиса может быть представлена в виде разложения по собственным волновым функциям другого базиса:

$$\begin{aligned} \varphi_n(\mathbf{r}, t) &= \sum_m V_{nm}^{-1} u_m(\mathbf{r}), \\ u_n(\mathbf{r}) &= \sum_m V_{nm} \varphi_m(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (8)$$

где оператор преобразования V , согласно (6), имеет вид

$$V = \exp\left(-i\frac{q}{\hbar c} \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{r}\right). \quad (9)$$

Пользуясь теорией сложения угловых моментов, для матричных элементов оператора (9) получаем

$$\begin{aligned} \langle n_2 l_2 m_2 | V^{-1} | n_1 l_1 m_1 \rangle &= \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} Y_{lm}^*(\mathbf{e}(t)) \times \\ &\times C(lm | l_2 m_2, l_1 m_1) \langle n_2 l_2 || j_l \left(\frac{q}{\hbar c} \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{r}\right) || n_1 l_1 \rangle, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\mathbf{e}(t) = \mathbf{A}(t)/A(t)$,

$$\begin{aligned} C(lm | l_2 m_2, l_1 m_1) &= (-1)^{l+m_2} \begin{pmatrix} l_2 & l & l_1 \\ -m_2 & m & m_1 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} l_2 & l & l_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sqrt{4\pi(2l+1)(2l_1+1)(2l_2+1)}, \end{aligned} \quad (11)$$

приведенные матричные элементы имеют вид

$$\begin{aligned} &\langle n_2 l_2 || j_l \left(\frac{q}{\hbar c} \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{r}\right) || n_1 l_1 \rangle = \\ &= \int_0^\infty R_{n_2 l_2}(r) j_l \left(\frac{q}{\hbar c} A(t) r\right) R_{n_1 l_1}(r) r^2 dr, \end{aligned} \quad (12)$$

$j_l(z)$ – сферические функции Бесселя, а $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ – 3j-символы Вигнера.

Как видно, угловая часть матричных элементов V_{nm} рассчитывается полностью в аналитическом виде. При использовании базиса собственных волновых функций водородоподобного атома радиальная часть (12) также рассчитывается в аналитическом виде для произвольных состояний дискретного и непрерывного спектров (см. [26–31]).

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_{n_1 l_1 m_1}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n_2 l_2 m_2} \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} Y_{lm}^*(\mathbf{e}) Y_{l_2 m_2}(\mathbf{n}) \times \\ &\times R_{n_2 l_2}(r) \langle n_2 l_2 || j_l || n_1 l_1 \rangle C(lm | l_2 m_2, l_1 m_1), \end{aligned} \quad (13)$$

где $j_l = j_l(qA(t)r/\hbar c)$. Как видно, угловая зависимость собственных волновых функций краевой задачи (5) является тензорной и зависит от взаимной ориентации векторов \mathbf{e} и \mathbf{n}_z . Вместе с тем очевидно, что собственные волновые функции краевой задачи (5) должны принимать аксиальную симметрию, по крайней мере в следующих двух случаях.

Во-первых, поскольку волновые функции $u_n(\mathbf{r})$ являются сферически симметричными при $l=0$, то ясно, что при появлении внешнего поля они становятся аксиально симметричными. Действительно, при $l_1=0$ из (13) получаем

$$\begin{aligned} \varphi_{n_1 l_1=0}(\mathbf{r}, t) &= 2\sqrt{\pi} \sum_{n_2 l_2} (-1)^{l_2} R_{n_2 l_2}(r) \times \\ &\times \langle n_2 l_2 || j_{l_2} || n_1 0 \rangle \sum_{m_2=-l_2}^{l_2} Y_{l_2 m_2}^*(\mathbf{e}) Y_{l_2 m_2}(\mathbf{n}). \end{aligned} \quad (14)$$

Учитывая выражение

$$\sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\mathbf{e}) Y_{lm}(\mathbf{n}) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}),$$

мы видим, что волновая функция (14) имеет аксиально симметричный вид относительно направления вектора поляризации электромагнитного поля.

Во-вторых, при $l > 0$ и $\mathbf{e} \parallel \mathbf{n}_z$ волновая функция остается аксиально симметричной. Действительно, пользуясь выражением

$$Y_{lm}(\mathbf{e})|_{\mathbf{e}=\mathbf{n}_z} = i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0},$$

получаем:

$$\begin{aligned} \varphi_{n_1 l_1 m_1}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n_2 l_2} \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \langle n_2 l_2 || j_l || n_1 l_1 \rangle \times \\ \times C(l_0 | l_2 m_1, l_1 m_1) R_{n_2 l_2}(r) Y_{l_2 m_1}(\mathbf{n}). \end{aligned} \quad (15)$$

Как видно, волновая функция (15) является суперпозицией волновых функций $u_{n'l'm}(\mathbf{r})$ с одним и тем же значением проекции углового момента на направление внешнего поля. Это отражает тот факт, что сохраняющейся величиной краевой задачи (5) является лишь проекция углового момента на направление внешнего поля, а величина углового момента сохраняющейся величиной не является.

2.3. Уравнения для амплитуд вероятности. В субрелятивистской области напряженности электромагнитного поля взаимодействие одиночного атома с полем лазерного импульса описывается нестационарным уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A}(t) \right)^2 + U(r) \right] \psi. \quad (16)$$

Матричные элементы гамильтониана уравнения (16) в базисе собственных функций краевых задач (4) и (5) имеют, соответственно, вид

$$\begin{aligned} \int u_n^*(\mathbf{r}) \left[\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 + U(r) \right] u_m(\mathbf{r}) dV = \\ = \sum_p V_{np}^{-1}(t) E_p V_{pm}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \varphi_n^*(\mathbf{r}, t) \left[\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 + U(r) \right] \varphi_m(\mathbf{r}, t) dV = \\ = E_n \delta_{nm}. \end{aligned}$$

Как видно, матричные элементы в базисе собственных функций $\varphi_n(\mathbf{r}, t)$ имеют гораздо более простой вид, поскольку указанные волновые функции являются собственными волновыми функциями гамильтониана уравнения (16). Поэтому, казалось бы, естественным разложить волновую функцию нестационарного уравнения (16) в ряд по собственным функциям краевой задачи (5). Однако, учитывая наличие временной производной в левой

части уравнения (16), несложно видеть, что при разложении волновой функции в ряд по собственным функциям $\varphi_n(\mathbf{r}, t)$ мы неизбежно столкнемся с проблемой расчета интегралов следующего вида: $\int \varphi_n^*(\mathbf{r}, t) \partial \varphi_m(\mathbf{r}, t) / \partial t dV$. Гамильтониан краевой задачи (5) зависит явно от времени, поэтому временные производные $\partial \varphi_n(\mathbf{r}, t) / \partial t$ не являются собственными функциями краевой задачи (5) и, следовательно, не ортогональны волновым функциям $\varphi_n(\mathbf{r}, t)$.

Вместе с тем, базисы собственных волновых функций краевых задач (4) и (5) являются полными и ортонормированными, поэтому мы можем разложить волновую функцию нестационарного уравнения (16) в ряд по собственным волновым функциям свободного атома (2), а затем воспользоваться разложениями (8). После ряда преобразований для амплитуд населенностей уровней $a_n(t)$ получаем

$$i\hbar \frac{da_n}{dt} = \sum_{m,k} V_{nk}^{-1} E_k V_{km} a_m. \quad (17)$$

Таким образом, матричные элементы гамильтониана уравнения (16) рассчитываются в базисе его собственных волновых функций, а зависимость от векторного потенциала электромагнитного поля определяется матричными элементами (10).

Введем составные матричные элементы

$$M_{nm} = \sum_k V_{nk}^{-1} E_k V_{km}.$$

Согласно определению (9), оператор V можно представить в виде бесконечного ряда по степеням поля. Ограничимся лишь первыми двумя слагаемыми указанного разложения, такое приближение справедливо в полях существенно субатомной напряженности. В этом случае составные матричные элементы принимают вид

$$\begin{aligned} M_{nm} \approx \\ \approx \sum_k \left(1 + i \frac{q}{\hbar c} \mathbf{A} \mathbf{r} + \dots \right)_{nk} E_k \left(1 - i \frac{q}{\hbar c} \mathbf{A} \mathbf{r} + \dots \right)_{km}. \end{aligned} \quad (18)$$

Оставляя в правой части лишь слагаемые, линейные по полю, получаем

$$M_{nm} = E_n \delta_{nm} - i\omega_{nm} \frac{q}{c} (\mathbf{A} \mathbf{r})_{nm} + \dots.$$

Полагая $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 \exp(-i\omega_0 t)$, в случае $\omega_0 \approx \omega_{nm}$ получаем

$$\mathbf{E}(t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{i\omega_0}{c} \mathbf{A} \approx \frac{i\omega_{nm}}{c} \mathbf{A}.$$

При указанных приближениях система уравнений (17) совпадает с системой уравнений для двухуровневого атома в рамках резонансного электродипольного взаимодействия, поскольку

$$M_{nm} \approx E_n \delta_{nm} - q(\mathbf{E}\mathbf{r})_{nm} + \dots$$

Таким образом, система уравнений (17) описывает не только нерезонансное электродипольное взаимодействие (то есть вне рамок приближения $\omega_0 \approx \omega_{nm}$), но и взаимодействия более высокой мультипольности, которые связаны со слагаемыми суммы (18) более высокого порядка по полю.

2.4. Общие свойства составных матричных элементов. Как следует из выражения (10), зависимость матричных элементов V_{nm} от состояния поляризации электромагнитного поля определяется угловой частью указанных матричных элементов. Зависимость от амплитуды векторного потенциала поля, а следовательно, от напряженности электромагнитного поля, определяется радиальной частью указанных матричных элементов, то есть видом приведенных матричных элементов $\langle n_2 l_2 || j_l(z) || n_1 l_1 \rangle$. Приведенные матричные элементы являются нелинейными функциями напряженности электромагнитного поля, и в случае атома водорода в качестве безразмерного управляющего параметра выступает параметр

$$\mu(t) = \frac{qA(t)a_B}{\hbar c},$$

где a_B – борковский радиус. Вводя амплитуду векторного потенциала A_0 , в качестве управляющего параметра удобно использовать параметр μ_0 , определяемый равенством

$$\mu_0 = \frac{qA_0 a_B}{\hbar c} = \frac{eE_0 a_B}{\hbar \omega} = \frac{2U_0}{\hbar \omega} \frac{E_0}{E_{at}}, \quad (19)$$

где $U_0 = Ry$ – энергия ионизации атома водорода, называемая ридбергом, а $E_{at} = e/a_B^2$ – напряженность внутриатомного поля. Проводя преобразования в (19), мы использовали соотношение $E_0 = \omega A_0/c$.

Отметим весьма важное обстоятельство. В случае атома водорода параметр μ_0 однозначно связан с параметром адиабатичности теории ионизации Келдыша [32]

$$\gamma = \frac{\omega \sqrt{2mU_0}}{eE_0}.$$

Действительно, в случае атома водорода получаем

$$\gamma = \frac{m e \omega}{\hbar E_0} = \frac{\hbar \omega}{e E_0 a_B}.$$

Таким образом, имеется взаимно однозначная связь между параметрами μ_0 и γ , имеющая весьма простой вид: $\mu_0 \gamma = 1$.

Как мы отмечали выше, приведенные матричные элементы в базисе водородоподобных функций рассчитываются аналитически. Тем не менее приведем ряд асимптотических выражений, применимых в случае полей субатомной напряженности. Пользуясь асимптотическим разложением сферических функций Бесселя при $\mu_0 \ll 1$, получаем

$$\begin{aligned} \langle n_2 l_2 || j_l(\mu(t)\rho) || n_1 l_1 \rangle &= \mu^l \frac{\Gamma(1/2)}{2^{l+1} \Gamma(l+3/2)} \times \\ &\times \int_0^\infty R_{n_2 l_2}(\rho) R_{n_1 l_1}(\rho) \rho^{l+2} d\rho - \\ &- \mu^{l+2} \frac{\Gamma(1/2)}{2^{l+3} \Gamma(l+5/2)} \int_0^\infty R_{n_2 l_2}(\rho) R_{n_1 l_1}(\rho) \rho^{l+4} d\rho + \dots, \end{aligned}$$

где $\rho = r/a_B$. Поскольку из свойств $3j$ -символов, входящих в выражение (11), следует $|l_2 - l_1| \leq l \leq l_2 + l_1$, то несложно видеть, что в субатомной области напряженности поля электромагнитной волны величина приведенных матричных элементов определяется соотношением $\langle n_2 l_2 || j_l || n_1 l_1 \rangle \sim \mu^{|l_2 - l_1|}$. Отметим, что матричные элементы $\langle ns | j_0 | ns \rangle$ в субатомных полях близки к единице, а матричные элементы $\langle ns | j_0 | n's \rangle \sim \mu^2$, поскольку радиальные волновые функции $R_{ns}(r)$ и $R_{n's}(r)$ ортогональны.

2.5. Поляризационная зависимость поля отклика атома. Спектр векторного потенциала поля отклика атома в дальней зоне имеет вид [33]

$$\mathbf{A}_r(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\exp(ikr)}{rc} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', \omega) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}') dV',$$

где $\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega)$ – спектр плотности тока уравнения (16). Используя это выражение, для интенсивности поля отклика получаем

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{\omega^2}{4c^3} |[\mathbf{J}(\omega) \mathbf{n}]|^2 d\omega,$$

где

$$\mathbf{J}(\omega) = \int \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) dV.$$

Плотность тока уравнения (16) определяется хорошо известным выражением

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{2m} \left[\psi^* \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \psi + \left(\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \psi \right)^* \cdot \psi \right]. \quad (20)$$

Матричные элементы оператора обобщенного импульса $\mathbf{P} = \mathbf{p} - q\mathbf{A}/c$ в базисе собственных функций краевых задач (4) и (5) имеют, соответственно, вид

$$\int u_n^*(\mathbf{r}) \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) u_m(\mathbf{r}) dV = \sum_{k,p} V_{nk}^{-1}(t) \mathbf{p}_{kp} V_{pm}(t), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \int \varphi_n^*(\mathbf{r}, t) \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \varphi_m(\mathbf{r}, t) dV &= \\ = \int u_n^*(\mathbf{r}) \mathbf{p} u_m(\mathbf{r}) dV &= \mathbf{p}_{nm}. \end{aligned}$$

Подставляя волновую функцию (2) в (20) и пользуясь уравнениями (21), для тока атомных электронов получаем

$$\mathbf{J}(t) = \frac{q}{m} \sum_{n,m,p,q} a_n^*(t) a_m(t) V_{np}^{-1}(t) \mathbf{p}_{pq} V_{qm}(t). \quad (22)$$

Сделаем важное замечание. Формула (21) связывает матричные элементы оператора обобщенного импульса с матричными элементами оператора импульса по состояниям свободного атома, имеющими вид $\mathbf{p}_{nm} = -i\hbar \int u_n^*(\mathbf{r}) \nabla u_m(\mathbf{r}) dV$. В отличие от матричных элементов оператора обобщенного импульса $\mathbf{P} = \mathbf{p} - q\mathbf{A}/c$, матричные элементы оператора импульса \mathbf{p} взаимно однозначно связаны с матричными элементами оператора координаты \mathbf{r} следующим соотношением: $\mathbf{p}_{nm} = im\omega_{nm} \mathbf{r}_{nm}$ (см., например, [34]). Учитывая это, окончательно получаем

$$\mathbf{J}(t) = i \sum_{n,m,p,q} a_n^*(t) a_m(t) \omega_{pq} V_{np}^{-1}(t) \mathbf{d}_{pq} V_{qm}(t). \quad (23)$$

Таким образом, приведенные в настоящем разделе формулы позволяют рассчитывать частотно-угловой спектр поля отклика атома как для произвольной взаимной ориентации углового момента атома и вектора поляризации электромагнитной волны, так и для произвольного состояния поляризации электромагнитной волны.

Применим развитую теорию для описания специфики отклика атома в околоатомных лазерных полях.

3. Правила отбора по орбитальному квантовому числу для системы “атом + поле”. Рассмотрим атом водорода. Энергетическую структуру его уровней зададим следующим образом: учтем вклад основного состояния и состояний непрерывного спектра со значениями орбитального квантового числа $l = 0 - 5$. Область вариации волнового вектора фотоэлектрона k определяется из анализа матричных элементов оператора V (9) (см. [26]).

Исследуем ионизацию атома водорода лазерным полем, энергия кванта которого равна $\hbar\omega = 15.11$ эВ. На рис. 1 представлена зависимость максимального

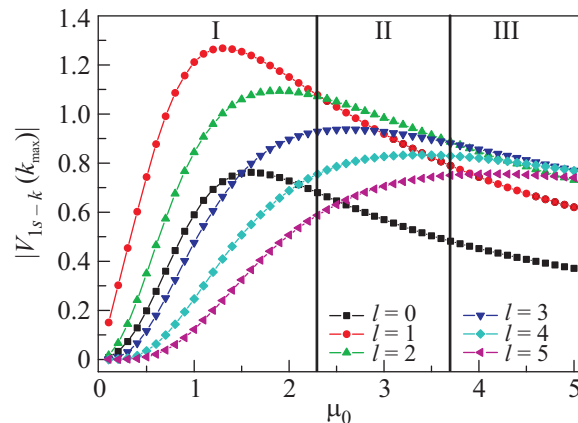


Рис. 1. Зависимость максимального по k значения модуля матричного элемента от нормированной амплитуды внешнего поля для $l = 0 - 5$

по k значения модуля матричного элемента от величины падающего поля. Величина поля варьируется от $\mu_0 = 0.01$ до $\mu_0 = 5$. В случае атома водорода этой области вариации параметра μ_0 соответствует $I = 2.16 \cdot 10^{12} - 5.4 \cdot 10^{17}$ Вт/см².

Видно, что в слабых полях матричный элемент ионизационного перехода для $l = 1$ больше, чем все остальные (область I). Это соответствует традиционным (дипольным) правилам отбора, которые характерны для электродипольного приближения гамильтониана взаимодействия внешнего электромагнитного поля с атомом. То есть происходит ионизация из основного состояния ($l = 0$) в непрерывный спектр с $l = 1$. При приближении поля к внутриатомному матричный элемент для $l = 2$ становится равным, а при дальнейшем увеличении поля и превосходит матричный элемент для $l = 1$ (область II). Последующее увеличение поля приводит к последовательному доминированию вкладов в ионизационный процесс матричных элементов переходов на уровни с $l = 3$, $l = 4$ и так далее (область III). Следовательно, правила отбора трансформируются: наиболее вероятными переходами в области II можно считать переходы из основного состояния на уровень с $l = 2$, в области III уже сложно сказать, на какой из рассматриваемых уровней переходит система наиболее вероятно. Следует отметить, что деление на области чисто условно и используется для наглядности.

Наиболее непосредственным образом физическое проявление правил отбора можно наблюдать на угловых распределениях фотоэлектронов.

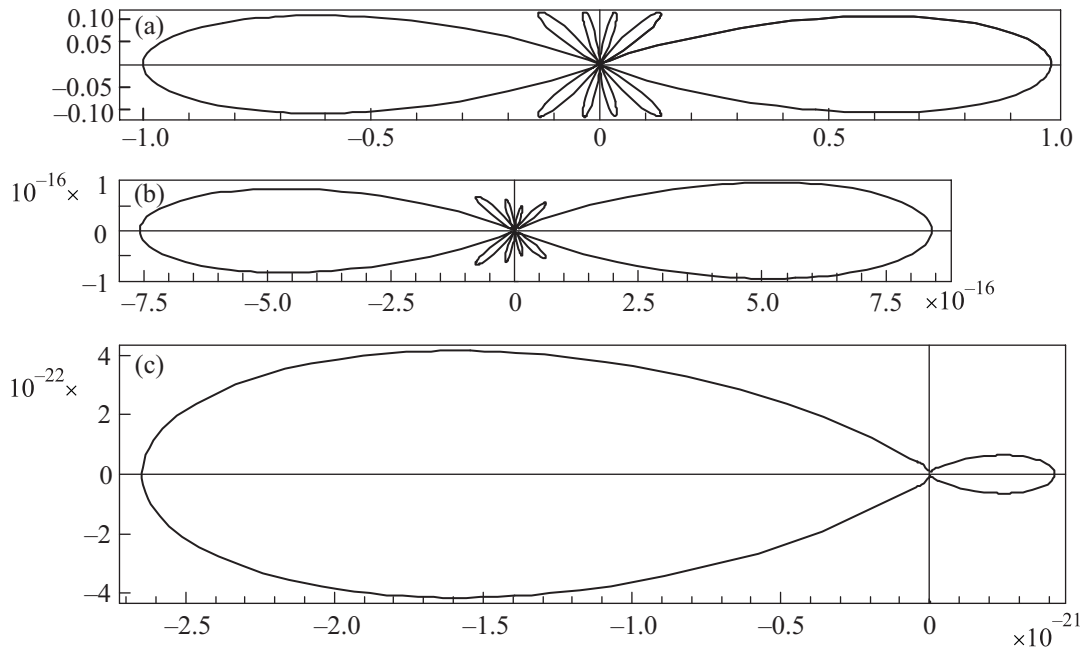


Рис. 2. Угловые распределения фотоэлектронов с (а) $k = 0.05$, (б) $k = 0.95$, (в) $k = 4.55$ при значении амплитуды падающего поля $\mu_0 = 5$

4. Угловые распределения фотоэлектронов.

Угловые спектры фотоэлектронов вычисляются при различных значениях амплитуды поля μ_0 и различных значениях волнового вектора фотоэлектрона k (волновой вектор нормирован на боровский радиус a_B). На рис. 2 представлен один из них, вычисленный при $\mu_0 = 5$ ($I = 5.4 \cdot 10^{17}$ Вт/см²). Угловые распределения усреднены по времени действия импульса. При анализе данных угловых распределений мы установили следующие факты: в слабых полях наблюдается характерная для этой области полей зависимость в форме «восьмерки», которая описывается полиномом Лежандра 1 порядка. Это соответствует традиционным (дипольным) правилам отбора. При возрастании поля в области малых значений волнового вектора происходит образование дополнительных лепестков, при больших же k распределение качественно не меняется. При дальнейшем увеличении поля эта динамика сохраняется, однако появляется асимметрия выхода электронов под углами θ , близкими к 0° , и под углами, близкими к 180° . Мы связываем такое поведение с видом временной зависимости поля. Дело в том, что значительное образование фотоэлектронов с данной энергией происходит, когда поле достигает определенной величины и продолжается до того момента, когда мгновенное значение поля не понизится до того же самого предела. Не следует, однако, понимать процесс образования фотоэлектронов с определенным значением k

как пороговое явление по величине падающего поля. В рассматриваемом диапазоне полей образование фотоэлектронов с определенным значением волнового вектора происходит при любом поле. Однако вероятность образования фотоэлектрона с определенной энергией нелинейно зависит от величины поля.

Например, для поля $\mu_0 = 5$ видно, что наибольший вылет электронов с $k = 4.55$ происходит в область углов, близкую к 180° (см. рис. 2). Этот результат можно объяснить видом временной зависимости лазерного импульса, используемого нами при расчетах: максимальное значение поля достигается тогда, когда мгновенное его значение отрицательно. Поскольку рассматриваемое значение волнового числа велико, то и величина поля, при достижении которого начинается активный вылет электронов с данным волновым числом, близка к максимальной в импульсе.

Отметим, что интервал волновых векторов, на которых происходит нарушение дипольных правил отбора, растет с увеличением интенсивности.

5. Зависимость вероятности ионизации от напряженности поля лазерного импульса.

Обратимся теперь к анализу зависимости интегральной вероятности ионизации от параметров лазерного импульса. Под интегральной вероятностью ионизации мы понимаем сумму населенностей всех уровней непрерывного спектра после окончания действия лазерного импульса:

$$w_{ion} = \sum_{k,l} |a_{k,l}(t \rightarrow \infty)|^2.$$

Исследуем интегральную вероятность ионизации в случае взаимодействия лазерного импульса с атомным серебром, энергетическая структура которого в численном эксперименте выглядит следующим образом: дискретный спектр представлен уровнями $5s, 5p, 5d, 6p$, непрерывный спектр – квазиуровнями с различными значениями орбитального квантового числа ($l = 0 - 3$). Область вариации волнового вектора фотоэлектрона, как и в случае с атомом водорода, определяется из аналитических зависимостей матричных элементов ионизационных переходов. Величина поля варьируется от $\mu_0 = 10^{-4}$ до $\mu_0 = 2.5$ ($I = 2.93 \cdot 10^7 - 1.83 \cdot 10^{16}$ Вт/см²).

На рис. 3 показана зависимость интегральной вероятности ионизации атомарного серебра от напряженности поля импульса с длиной волны

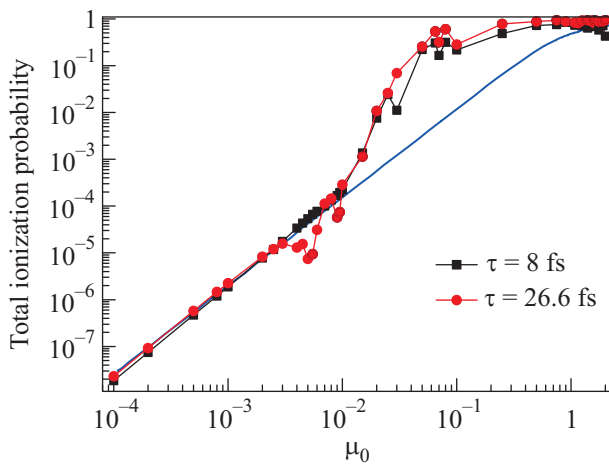


Рис. 3. Зависимость вероятности ионизации атома серебра при различных значениях длительности импульса от амплитуды напряженности электрического поля электромагнитной волны ($\lambda = 800$ нм)

$\lambda = 800$ нм для двух значений его длительности $\tau = 8$ фс (квадратики) и 26.6 фс (кружки). Сплошная линия изображает зависимость вероятности ионизации от напряженности поля импульса, рассчитанную на основе теории Келдыша [32]:

$$w_{Keld}(\mu_0) \sim \exp \left[-2 \operatorname{Im} \left[\int_{\tau}^{\tau_0} \mu_0^2 \sin^2 \left(\frac{\hbar \omega}{E_i} \tau' \right) d\tau' + \tau_0 \right] \right],$$

где E_i – энергия ионизации атома, ω – несущая частота излучения.

Из рис. 3 видно, что в области существенно субатомной напряженности поля лазерной волны ($\mu_0 \leq$

$\leq 10^{-3}$) скорость роста вероятности ионизации практически не зависит от длительности лазерного импульса и совпадает с соответствующей зависимостью, предсказываемой формулой Келдыша. Вместе с тем, мы видим, что в полях околоатомной напряженности $10^{-3} \leq \mu_0 \leq 4 \cdot 10^{-1}$ зависимость вероятности ионизации от напряженности поля лазерного импульса демонстрирует ряд качественно новых особенностей: она перестает быть монотонной функцией и зависит не только от напряженности поля импульса, но и от его длительности, то есть энергии импульса. При этом вероятность ионизации принимает значения как большие (ускоренная ионизация), так и меньшие (стабилизация ионизации) значений, предсказываемых теорией Келдыша. Как показано в [31], указанная немонотонность обусловлена нелинейной зависимостью скоростей возбуждения, ионизации и рекомбинации от напряженности поля, что приводит к существенно неравновесному распределению населенности атомных уровней в лазерном поле. В области $\mu_0 \geq 4 \cdot 10^{-1}$ вероятность ионизации выходит на насыщение. Как видно, в области околоатомных полей вероятность ионизации существенно зависит от длительности импульса, а следовательно, от его энергии.

6. Фотоэмиссионный спектр отклика атома.

Исследуем фотоэмиссионный спектр отклика атома серебра. В полях существенно субатомной напряженности $\mu_0 < 10^{-4}$ спектр поля отклика содержит лишь компоненту на частоте воздействующего импульса, то есть отклик атома является линейным и не содержит гармоник несущей частоты лазерного импульса. При увеличении напряженности поля лазерного импульса в спектре отклика появляются нечетные гармоники частоты лазерного импульса, величина амплитуды которых резко падает с ростом номера гармоники. При напряженности поля лазерного импульса $\mu_0 \sim 10^{-3}$ профиль спектра отклика атома начинает изменяться. Ширина спектра отклика атома увеличивается, в спектре появляется плато с ярко выраженной частотой отсечки. Дальнейший рост напряженности поля приводит ко все более явному проявлению указанных тенденций: ширина плато значительно увеличивается, а частота отсечки становится все более контрастной ($\mu_0 = 1.2 \cdot 10^{-2}$).

На рис. 4 представлена зависимость частоты отсечки от управляющего параметра μ_0 . В области слабых полей ($\mu_0 < 0.1$) наблюдается квадратичный рост зависимости частоты отсечки от управляющего параметра μ_0 . При дальнейшем возрастании интенсивности поля зависимость частоты отсечки насыщается. Это связано с тем, что при таких интенсивнос-

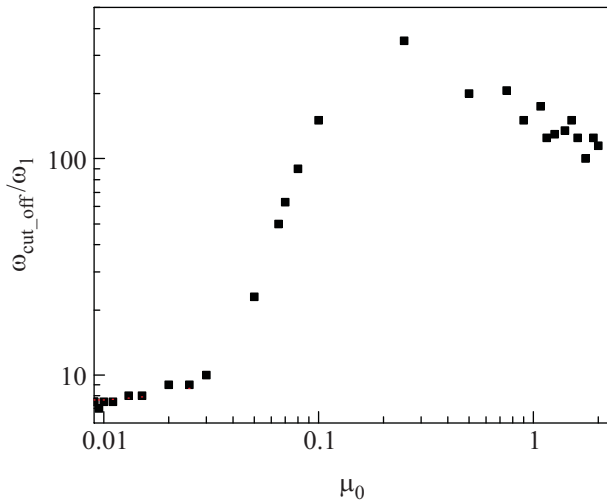


Рис. 4. Зависимость частоты отсечки от управляющего параметра задачи

тях поля вероятность однократной ионизации атома после взаимодействия с импульсом близка к единице [31]. Следовательно, начиная с определенной интенсивности ($\mu_0 \sim 0.1$) атом ионизируется, его валентный электрон переходит в свободное состояние и перестает рассеиваться на атомном остове, и, следовательно, перестает генерировать лазерное излучение. Однако некоторое количество гармоник успевает образоваться на переднем фронте импульса. Таким образом, полная ионизация атома приводит к насыщению зависимости частоты отсечки от интенсивности лазерного поля.

7. Взаимодействие атома с двухцветным лазерным полем. Исследуем взаимодействие двухцветного лазерного поля с атомом аргона, энергетическая структура уровней которого задается следующим образом. Дискретный спектр содержит 13 низлежащих дискретных уровней. Разность энергий между самым нижшим учтенным состоянием и самым высшим составляет 96.5% от энергии ионизации атома. Непрерывный спектра атома не учитывается. Это накладывает ограничение на максимальную интенсивность поля, с которой мы можем исследовать взаимодействие ($\mu_0 < 0.1$, что соответствует $I < 6.77 \cdot 10^{12}$ Вт/см²). Лазерное поле формируется первой и второй гармониками *Ti*: *Sapphire* лазера. В своих численных расчетах мы исследовали фотоэмиссионный спектр отклика атома (23). Мы изучали влияние параметров двухцветного поля (амплитуды компонент двухцветного поля (μ_{01}, μ_{02}), длительности их импульсов (τ_1, τ_2), временной задержки между импульсами (t_{01}, t_{02}), а также угла между поляризациями компонент двухцветного поля (θ)) как

на коротковолновую часть спектра (ГВП), так и на длинноволновую (ТГц). В своих численных расчетах мы показали, что ТГц излучение генерируется в доионизационном случае. На рис.5 представлена зависимость сигнала на частоте 1 ТГц от временной

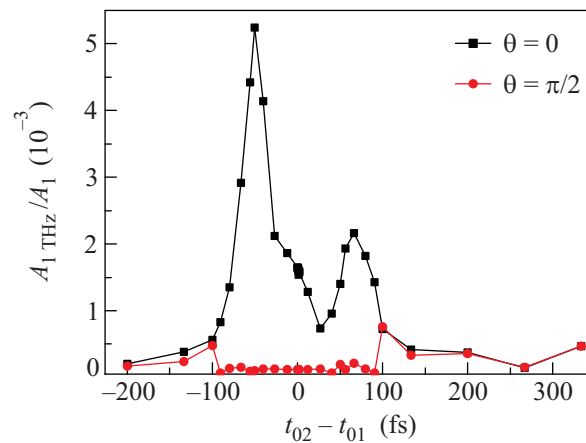


Рис. 5. Зависимость сигнала фотоэмиссионного спектра на частоте 1 ТГц от временной задержки между импульсами, вычисленная для случая коллинеарной геометрии падающего поля (квадратики) и в случае ортогональной геометрии (кружки)

задержки между импульсами двухцветного поля, вычисленная при следующих параметрах лазерного поля $\mu_{01} = 0.1, \mu_{02} = 0.0316, \tau_1 = 120$ фс, $\tau_2 = 85$ фс. Кривая с квадратиками соответствует коллинеарной геометрии падающего поля, кривая с кружками – ортогональной геометрии падающего пучка. Видно, что при отсутствии временной задержки между импульсами (или малой задержки) величина сигнала в случае коллинеарной геометрии больше, чем в случае ортогональной. Разница в амплитудах сигнала спадает в при увеличении временной задержки между импульсами. Различия между коллинеарной и ортогональными схемами лазерного импульса в области малых задержек можно интерпретировать тем, что в случае коллинеарной поляризации нелинейность процесса выше, поскольку в этом случае существуют моменты, когда напряженности полей конструктивно складываются.

Также мы проводили исследование выхода ТГц излучения в случае коротких импульсов $\mu_{01} = \mu_{02} = 0.1, \tau_1 = \tau_2 = 4.25$ фс, варьируя угол между поляризациями в диапазоне $[0, \pi]$ в двух случаях: когда временная задержка между импульсами равна нулю, $t_{02} - t_{01} = 0$ (см. рис. 6а) и при ненулевой задержке между компонентами поля $t_{02} - t_{01} = 13.32$ фс (см. рис. 6б). Видно, что в обоих случаях выход терагерцового излучения – существенно немонотонная функ-

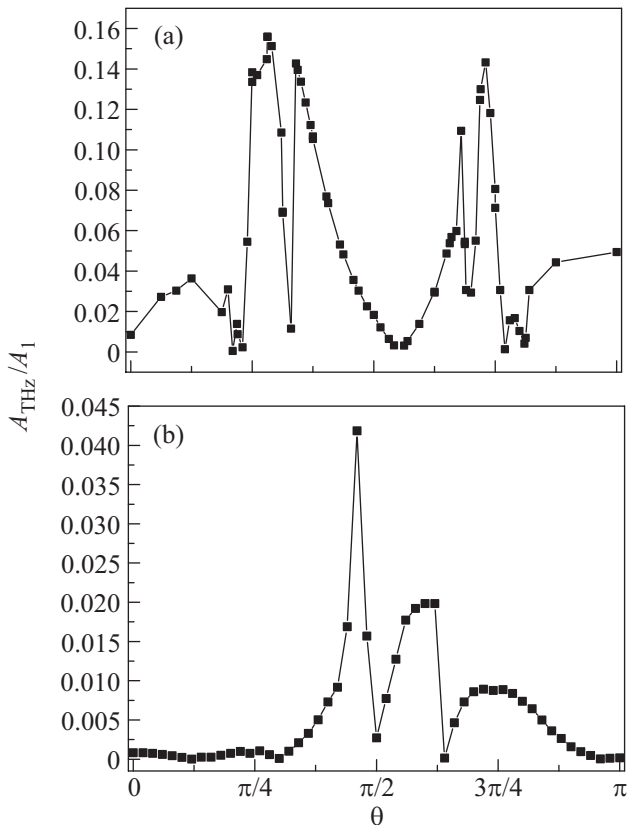


Рис. 6. Зависимость выхода терагерцового излучения от угла между поляризациями компонент двухцветного поля, рассчитанная при $\mu_{01} = \mu_{02} = 0.1$, $\tau_1 = \tau_2 = 4.25$ фс и $t_{02} - t_{01} = 0$ (а)), $t_{02} - t_{01} = 13.32$ фс (б))

ция угла между поляризациями компонент двухцветного поля. При нулевой задержке между импульсами небольшое изменение угла между поляризациями в окрестности углов $\theta = \pi/4$ и $\theta = 3\pi/4$ может привести к значительному изменению эффективности выхода излучения в указанном частотном диапазоне. При ненулевой задержке между импульсами немонотонный характер зависимости наблюдается в области $\theta = \pi/2$. Отметим, что величина ТГц сигнала в случае полной временной синхронизации импульсов ($t_{02} - t_{01} = 0$) больше, чем при наличии временной задержки между импульсами ($t_{02} - t_{01} = 13.32$ фс).

Полученные результаты по выходу ТГц излучения в случае взаимодействия с короткими импульсами качественно совпадают с соответствующими экспериментальными данными, представленными в [9]. Как и на рис. 6а, в [9], области максимальной эффективности генерации ТГц излучения лежат в окрестности углов $\theta = \pi/4$ и $3\pi/4$. Кроме того, ширина области вариации угла между поляризациями, в которой генерация ТГц сигнала наиболее эффективна, в

окрестности угла $\theta = \pi/4$ больше, чем в окрестности $\theta = 3\pi/4$, как на рис. 6а, так и в [9].

8. Заключение. Развита теория взаимодействия одиночного атома с интенсивными фемтосекундными лазерными импульсами, основанная на использовании базиса собственных функций краевой задачи для “атома во внешнем поле”. Результаты численного моделирования, проведенного на основе развитой теории, позволили дать интерпретацию ряда явлений, наблюдающихся в полях околоатомной напряженности: насыщение частоты отсечки и насыщение вероятности ионизации, обусловленные полной однократной ионизацией атома; изменение правил отбора, проявляющееся в появлении дополнительных лепестков в угловых спектрах вылета фотоэлектронов. Показано, что явления стабилизации ионизации и ускоренной ионизации обусловлены нелинейной зависимостью скоростей возбуждения, ионизации и рекомбинации от напряженности поля, что приводит к неравновесному распределению населенности атомных уровней в лазерном поле. В многочастотном лазерном поле генерация ТГц излучения возможна в доионизационном режиме и обусловлена чисто атомной нелинейностью. Полученные результаты наглядно демонстрируют непертурбативный характер развиваемой теории во всей области субрелятивистских значений напряженности поля лазерного импульса. Обобщение развиваемого метода на случай полей релятивистской напряженности приведено в книге [35].

Результаты получены в рамках выполнения проекта Российского фонда фундаментальных исследований (# 08-02-00448) и при частичной финансовой поддержке фонда “Династия”.

1. Р. А. Ганеев, УФН **179**, 65 (2009).
2. В. Т. Платоненко, В. В. Стрелков, Квант. электроника **25**, 582 (1998).
3. M. J. Nandor, M. A. Walker, and L. D. Woerkom, J. Phys. B.: At. Mol. Opt. Phys. **31**, 4617 (1998).
4. R. A. Ganeev, M. Baba, M. Suzuki, and H. Kuroda, Phys. Letters A **339**, 103 (2005).
5. M. V. Frolov, N. L. Manakov, A. A. Silaev, and N. V. Vvedenskii, Phys. Rev. A **81**, 063407 (2010).
6. M. B. Gaarde, A. L. Huillier, and M. Lewenstein, Phys. Rev. A **54**, 4236 (1996).
7. M. D. Perry and J. K. Crane, Phys. Rev. A **48**, 013405 (1993).
8. J. B. Bertrand, H. J. Worner, H.-C. Bandulet et al., PRL, **106**, 023001 (2011).
9. K. Y. Kim, A. J. Taylor, J. H. Glowina, and G. Rodriguez, Nature photonics **2**, 605 (2008).

10. J. L. Krause, K. J. Schafer, and K. C. Kulander, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3535 (1992).
11. P. B. Corkum, *PRL* **71**, 1994 (1993).
12. M. Lewenstein, Ph. Balcou, M. Yu. Ivanov et al., *Phys. Rev. A* **49**, 2117 (1994).
13. Е. А. Волкова, А. М. Попов, М. А. Тихонов, О. В. Тихонова, *ЖЭТФ* **132**, 596 (2007).
14. H. R. Reiss, *Phys. Rev. A* **22**, 1786 (1980).
15. H. R. Reiss, *Phys. Rev. A* **42**, 1476 (1990).
16. S. Watanabe, K. Kondo, Y. Nabekawa et al., *PRL* **73**, 2692 (1994).
17. P. B. Corkum, N. H. Burnett, and M. Y. Ivanov, *Opt. Lett.* **19**, 1870 (1994).
18. V. T. Platonenko and V. Strelkov, *J. Opt. Soc. Am. B* **16**, 435 (1999).
19. C. Altucci, Chr. Delfin, L. Roos et al., *Phys. Rev. A* **58**, 3934 (1998).
20. R. López-Martens, J. Mauritsson, P. Johnsson et al., *Phys. Rev. A* **69**, 053811 (2004).
21. B. Shan, S. Ghimire, and Z. Chang, *J. Mod. Opt.* **52**, 277 (2005).
22. N. Kaprowitz, X. Lu, and X.-C. Zhang, *J. Mod. Opt.* **56**, 1137 (2009).
23. M. D. Thomson, M. Krieb, T. Löffler, and H. G. Roskos, *Las. Phot. Rev.* **1**, 349 (2007).
24. J. Dai, N. Karpowicz, and X.-C. Zhang, *PRL* **103**, 023001 (2009).
25. А. В. Андреев, *ЖЭТФ* **116**, 793 (1999).
26. A. V. Andreev, O. A. Shoutova, and S. Yu. Stremoukhov, *Laser Physics*, **17**(4), 496 (2007).
27. А. В. Андреев, С. Ю. Стремоухов, О. А. Шутова, *Теор. Физ.* **9**, 36 (2008).
28. A. V. Andreev, O. A. Shoutova, and S. Yu. Stremoukhov, *JRLR* **29**, 203 (2008).
29. A. V. Andreev, S. Yu. Stremoukhov, and O. A. Shoutova, *AIP Conf. Proc.* **1228**, 92 (2010).
30. А. В. Андреев, С. Ю. Стремоухов, О. А. Шутова, *Уч. Зап. КГУ. Сер. Физ.-мат. науки*, **152**, 10 (2010).
31. А. В. Андреев, С. Ю. Стремоухов, О. А. Шутова, *ЖЭТФ* **138**, 1060 (2010).
32. Л. В. Келдыш, *ЖЭТФ* **47**, 1945 (1964).
33. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, М.: Наука, 1967.
34. Г. Бете, Э. Солпитер, *Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами*, М.: ГИФМЛ, 1960.
35. А. В. Андреев, *Релятивистская квантовая механика: частицы и зеркальные частицы*, М.: Физматлит, 2009.