*Письма в ЖЭТФ, том 51, вып. 12, стр. 617–620* *25 июня 1990 г.*

# АНОМАЛЬНОЕ ЗАМЕДЛЕНИЕ НИЖНЕГИБРИДНЫХ ВОЛН В ТОРОИДАЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

*Ю.Ф.Баранов, А.Д.Пилия, А.Р.Эстеркин*

Показано, что в тороидальной плазме токамака, волны из диапазона частот $\sqrt{\omega_{He}\omega_{Hi}} < \omega < \omega_{He}$ могут испытывать аномальное замедление. В приближении холодной плазмы существует аттрактор лучевых траекторий, при приближении к которому неограниченно возрастает волновой вектор **k** и поле волны **E**. В плазме с конечной температурой происходит эффективное черенковское поглощение ВЧ мощности.

Настоящим сообщением мы хотим привлечь внимание к тому факту, что в токамаке, при частотах в несколько раз превышающих частоту нижнего гибридного резонанса наблюдается особенность в распространении медленной моды колебаний, приводящая к быстрому поглощению волн независимо от температуры плазмы. Особенность проявляется в виде существования аттрактора лучевых траекторий, рассчитанных без учета теплового движения частиц. Аттрактор представляет собой окружность с центром на оси симметрии системы, которая "притягивает" траектории из конечного объема плазмы. Асимптотическое приближение к аттрактору сопровождается неограниченным ростом волнового вектора **k**; при конечной температуре это приводит к затуханию волн.

Причиной этого эффекта является полоидальная неоднородность магнитного поля на магнитной поверхности. Поэтому явление особенно сильно выражено при некруговой форме сечения плазменного шнура; в этом случае оно наблюдается в широком интервале частот.

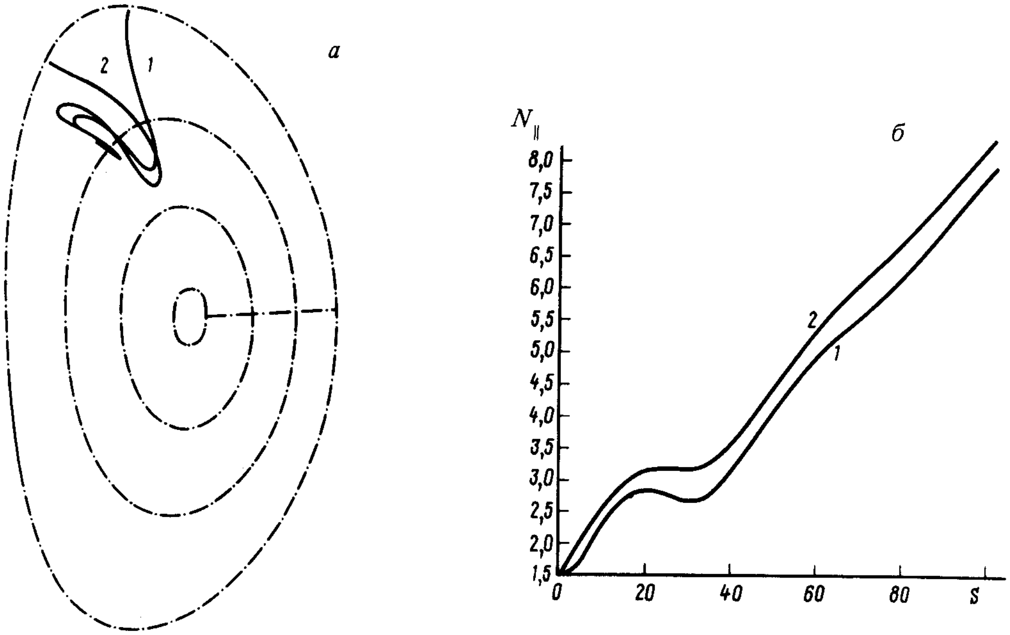


Рис. 1. *а* – Лучевые траектории волн в проекции на малое сечение токамака для начальных углов запуска $\theta = 1{,}57$ *(1)* и $\theta = 2{,}1$ *(2)*; *б* – изменение продольного замедления вдоль этих траекторий в пространстве

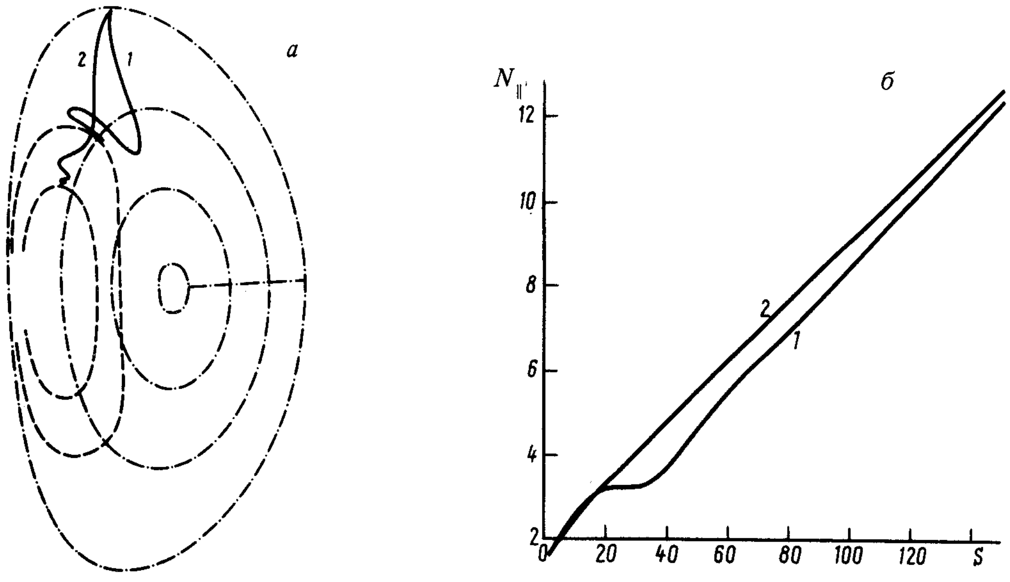


Рис. 2*а* – Лучевые траектории волн в проекции на малое сечение токамака для частот $f = 9{,}2$ ГГц *(1)* и $f = 11{,}4$ ГГц *(2)*; *б* – изменение продольного замедления вдоль этих траекторий в пространстве

В качестве иллюстрации на рис. 1 представлены примеры лучевых траекторий волн (в проекции на малое сечение токамака) и показана эволюция вдоль них продольного замедления волн $N_{\|} = k_{\|} c/\omega$, где $k_{\|}$ – проекция $k$ на полное магнитное поле $B$, $\omega$ – частота колебаний. Расчеты выполнены при $T_e = T_i = 0$, $\omega = 6{,}8\,\omega_{LH}$, где $\omega_{LH} = \omega_{pi}/(1 + \omega_{pe}^2/\omega_{He}^2)^{1/2}$ – нижнегибридная частота, остальные параметры соответствуют одному из вариантов проекта ИТЭР и они использовались ранее при расчетах по возбуждению тока НГ – волнами [1] ($R_0 = 5{,}8$ м, $a = 2$ м, $k = 2$, $n_0 = 1{,}5 \cdot 10^{14}$ см$^{-3}$, $B_0 = 5{,}1$ Т, $I = 18$ МА обозначение стандартные). Начальные значения $N_{\|}$ и $N_{pol} = k_{pol} c/\omega$ ($k_{pol}$ – проекция **k** на полоидальное магнитное поле $B_{pol}$) для двух изображенных траекторий равны 3 и 10, соответственно. Как видно из рисунка, проекции траекторий сходятся в одной точке, которая и является следом аттрактора. В пространстве длина траектории оказывается бесконечной за счет движения в тороидальном направлении. При конечной температуре форма траектории практически не меняется вплоть до расстояний, на которых амплитуда становится малой по сравнению со своим начальным значением. В данном примере аттрактор существует в частотном интервале 8,5 ÷ 14,5 ГГц. Ниже будет показано, что на аттракторе лучевых траекторий становится сингулярным не только волновой вектор волны, но и ее электрическое поле. Таким образом, особенность не является следствием приближения геометрической оптики. Ее происхождение находит объяснение в рамках анализа, выполненного в работах [2, 3], согласно которому сингулярность связана с некоторыми избранными точками параболической линии уравнения

$$\operatorname{div} \hat{\epsilon}\, \nabla \varphi = 0, \tag{1}$$

где $\varphi$ – скалярный потенциал и $\hat{\epsilon}$ – тензор диэлектрической проницаемости плазмы при $T_e = T_i = 0$ (речь идет о двумерной задаче в плоскости полоидального сечения токамака, рассмотрением которой можно ограничиться в силу аксиальной симметрии плазменной конфигурации). Параболическая линия отделяет область, где уравнение (1) является гиперболическим от области, где оно относится к эллиптическому типу. Параболическую линию удобно исследовать, рассматривая вместо (1) соответствующее дисперсионное уравнение $\epsilon k_{\perp}^2 + \eta k_{\|}^2 = 0$, где $\epsilon = \epsilon_{xx}$ и $\eta = \epsilon_{zz}$ в системе координат с осью $z$, направленной вдоль магнитного поля. В токамаке при $B_{pol}/B \ll 1$, $k_{\perp}^2 \approx k_{\rho}^2 + k_{pol}^2$ и $k_{\|} \approx k_{pol} B_{pol}/B + k_{\varphi}$, где $k_{\rho}$ – составляющая полоидальной компоненты $k$, перпендикулярная к $\mathbf{B}_{pol}$ и $k_{\varphi}$ – тороидальная компонента волнового вектора, так что дисперсионное уравнение приобретает вид

$$k_{\rho}^2 = -\,\eta\,(B_{pol} k_{pol}/B + k_{\varphi})^2/\epsilon - k_{pol}^2 . \tag{2}$$

Тип уравнения (1) определяется величиной коэффициента $\Phi = -\eta B_{pol}^2/(\epsilon B^2)$ при $k_{pol}^2$. Область, где $\Phi > 1$ является гиперболической, в ней могут существовать двумерные волны со сколь угодно большими значениями $k_{pol}$ и $k_{\rho}$. В эллиптической области $\Phi < 1$, $k_{pol}$ и $k_{\rho}$ ограничены. Параболические линии определяются, очевидно, равенствами

$$\epsilon = 0 \quad \text{и} \quad \Phi = 1 . \tag{3}$$

В диапазоне частот, который мы рассматриваем $\epsilon > 1$ во всем объеме плазмы так, что остается только второе условие в (3). Согласно [2], сингулярной точкой волнового уравнения (в малом сечении токамака) является та точка линии $\Phi = 1$, в которой эта линия перпендикулярна к $B_{pol}$. Чтобы выяснить, при каких условиях такая точка существует заметим, что функция $\Phi(r, \theta)$ ($r$ и $\theta$ – полярные координаты в полоидальном сечении с началом на магнитной оси разряда) обращается в ноль при $r = 0$ и на границе шнура; в промежутке она, как функция $r$ имеет максимум $\Phi_0(\theta)$. При низких частотах $\Phi_0 \gg 1$, в этом случае имеется две параболические линии, одна вблизи оси и другая на периферии. Линии всюду составляют малый угол с $B_{pol}$ и особая точка отсутствует. С увеличением частоты $\Phi_0$ уменьшается; при некотором $\omega = \omega_1 \sim \omega_{pe} a/(R_0 q_0)$ ($q_0$ – запас устойчивости) минимальное по углу $\theta$ значение $\Phi_0(\theta)$ становится равным единице. При этом две параболические линии соединяются и появляется особая точка. Она существует вплоть до частоты $\omega = \omega_2$, при которой становится равным 1 максимальное по углу значение $\Phi_0$ и гиперболическая область исчезает. На рис. 2 в качестве иллюстрации пунктиром отмечены две параболические линии для разных частот волн. Сплошными линиями показаны проекции лучевых траекторий на малое сечение токамака для соответствующих частот.

Чтобы выяснить, как ведет себя в окрестности аттрактора решение волнового уравнения, введем локальную систему координат с началом в особой точке, осью $x$, направленной по касательной к параболической линии и осью $y$ – по внешней нормали к ней. Тогда при малых $x$ и $y$ можно положить $\Phi - 1 = x^2/l^2 + \lambda y/l$, где $l$ и $\lambda$ – постоянные, а остальные коэффициенты в (2) считать не зависящими от координат. В этом приближении потенциальное волновое уравнение (1) приобретает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\left[(\xi^2 + \lambda\zeta)\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right] - 2ip\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} + p^2\varphi = 0, \qquad (4)$$

где $\varphi(\xi,\zeta)$ – потенциал, $\xi = x/l$, $\zeta = y/l$, $P = \sqrt{|\eta_0|/\epsilon}\, k_\varphi l$. Уравнение (4) подробно исследовано в случае $p = 0$ [3]. При $p \neq 0$ также удается найти систему собственных мод, убывающих при $|\xi| \to \infty$:

$$\varphi_n(\xi,\zeta) = \int_0^\infty t^{-3/4+i\nu} \exp\left[-i\{(1-i\lambda/\beta^2)\zeta^2/2 - p^2/\lambda t + t\zeta\}\right]\cdot H_n(\beta\sqrt{t}\,\xi)\,dt, \qquad (5)$$

где $H_n$ – полином Эрмита, $n = 0, 1, \ldots$, $\beta = (1 - \lambda^2/16)^{1/4}$ (предполагается, что $\lambda < 4$) и $\nu = [(2n+1)\beta^2 - 2p]/\lambda$.

Наглядное представление о поведении функции (5) можно получить рассматривая их при $\xi = 0$. Из (5) в этом случае сразу следует, что $\varphi \to \zeta^{-3/4+i\nu}$ при $\zeta \to 0$. Степень особенности такова, что обеспечивает в особой точке конечное поглощение энергии при диссипации стремящейся к 0. При прохождении этой точки амплитуда поля уменьшается в $\exp(\pi\nu)$ раз, что означает практически полное затухание. Исследование интеграла (3) показывает, что мода с большими номерами $n > p/\beta^2 - 1/2$ локализована в гиперболической области, в то время как мода с $n < p/\beta^2 - 1/2$ описывают волны, приходящие из эллиптической области. Наличие бесконечного набора независимых решений с особенностью в точке $x = y = 0$ показывает, что сингулярным этой точке будет весьма широкий класс решений уравнения (1) (а именно, интеграл этого уравнения, зависящий от одной произвольной функции).

Из-за нехватки места мы не касаемся практических аспектов описанного явления. Отметим только его сходство с обычным гибридным резонансом. В частности, нижний гибридный резонанс связан с особой точкой на параболической линии $\epsilon = 0$; поведение лучевых траекторий и решений уравнения (1) в ее окрестности совершенно аналогично описанному выше.

## Литература


1. *Baranov Yu.F., Esterkin A.R.* Meeting on Current Drive and Heating in ITER. Garching. 1989. ITER-IL-Ph-6-9-S-16.
2. *Пилия А.Д., Федоров В.И.* ЖЭТФ, 1971, **60**, 389.
3. *Пилия А.Д., Федоров В.И.* В сб. Высокочастотный нагрев плазмы, ИПФАНСССР, Горький, 1983, 281.



Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе
Академии наук СССР



Поступила в редакцию
7 мая 1990 г.