

## Бозе-конденсат экситонных поляритонов в ловушке

Н. С. Воронова, А. А. Елистратов<sup>+</sup>\*, Ю. Е. Лозовик<sup>1)</sup>+

Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, 115409 Москва, Россия

<sup>+</sup> Учреждение Российской Академии наук Институт спектроскопии РАН, 142190 Троицк, Московская обл., Россия

\* Московский физико-технический институт (государственный университет), 141700 Долгопрудный, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 11 апреля 2011 г.

Рассматриваются свойства ловушек для экситонных поляритонов в полупроводниковой оптической микрополости с погруженной в нее квантовой ямой. Исследовано поведение двухкомпонентного бозе-конденсата фотонов и экситонов, который описывается связанной системой уравнений типа Гросса-Питаевского. Для ловушек со слабым конфайнментом получены аналитические решения в приближении Томаса-Ферми. Для ловушек с сильным конфайнментом численно исследовано поведение конденсата, установлены ограничения на допустимые значения химического потенциала системы. Найдены волновые функции и в общем случае не совпадающие пространственные профили связанных конденсатов фотонов и экситонов.

Рассмотрение экситонных поляритонов в оптической микрополости (МП) с погруженной в нее квантовой ямой является перспективным в силу предсказанной возможности реализации в ней бозе-эйнштейновской конденсации (БЭК) при высоких температурах вплоть до комнатных [1–18]. Исследование подобных систем привлекательно как с точки зрения возможных технологических применений (в том числе создания безинверсионного “поляритонного лазера”), так и для теоретического и экспериментального изучения различных аспектов квантовой электродинамики в полости. Несмотря на короткое время жизни ( $\sim$  пс), в последние годы был получен ряд экспериментальных подтверждений возникновения спонтанной когерентности в системе экситонных поляритонов в плоских полупроводниковых микрополостях (см., например, [5–9]).

Поляритоны в плоской оптической микрополости представляют собой двумерную систему квазичастиц, поэтому, согласно теореме Хохенберга-Мермина-Вагнера, в термодинамическом пределе в такой системе невозможна БЭК и недиагональный дальний порядок. Тем не менее бозе-конденсация в ограниченной двумерной системе поляритонов (ловушке) возможна [15].

Существует два метода создания поляритонной ловушки [16]. Первый – ловушка для фотонов за счет помещения их в микрополость переменной ширины. В результате связи фотонов с экситонами появляется эффективный удерживающий потенциал и для экситонов. Второй тип поляритонных ловушек –

создание внешнего удерживающего потенциала для экситонов в квантовой яме. В этом случае за счет экситон-фотонной связи появляется и эффективное удержание фотонов. Экспериментально поляритонные ловушки, созданные с помощью конфайнмента экситонов, могут быть реализованы при помощи нескольких различных методов [17]. Удержание экситонов может быть осуществлено с использованием неоднородной деформации квантовой ямы [18, 19], либо при помощи неоднородного электрического поля вблизи иглы сканирующего туннелирующего микроскопа [20].

В настоящей работе мы изучаем свойства экситонных поляритонов, обобщая уравнения Гросса-Питаевского для двухкомпонентной связанной системы фотонов и экситонов с резонансными взаимопревращениями. Рассчитаны зависящие от лазерной накачки профили плотности для экситонов и фотонов в поляритонной ловушке, созданной путем конфайнмента экситонов.

Энергетические спектры фотонов идеальной оптической микрополости с  $L = n\lambda/2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) и квазидвумерных экситонов в погруженной в микрополость квантовой яме при малых продольных импульсах  $k_{\parallel}$  имеют вид

$$E_{ph}(k) = \frac{\hbar c}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{k_z^2 + k_{\parallel}^2} \approx \frac{\pi \hbar c}{L(r) \sqrt{\varepsilon}} n + \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2m_{ph}};$$

$$E_{ex}(k) = E_0 + \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2m_{ex}},$$

где  $m_{ph} = \pi \hbar n \sqrt{\varepsilon} / L(r) c$  – эффективная масса фотона полости,  $E_0 = 2m_{ex} e^4 / \varepsilon^2 \hbar^2$  – энергия связи дву-

<sup>1)</sup> e-mail: lozovik@isan.troitsk.ru

мерного экситона,  $m_{ex} = m_e + m_h$  — его эффективная масса,  $m_e$ ,  $m_h$  — эффективные массы электрона и дырки, соответственно. Мы будем рассматривать основную моду  $n = 1$ . При медленно меняющейся ширине МП (продольная) эффективная масса фотона является переменной величиной  $m_{ph}(r)$ .

Закон дисперсии поляритонов в полости содержит две ветви — так называемые верхнюю и нижнюю поляритонные ветви [21]:

$$E_{LP,UP} = \frac{E_{ph} + E_{ex}}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(E_{ph} - E_{ex})^2 + (\hbar\Omega)^2},$$

где  $\hbar\Omega$  — энергия поляритонного расщепления (расщепления Раби).

Мы изучаем бозе-конденсированное состояние поляритонной системы, причем волновая функция конденсата поляритонов содержит две компоненты — волновые функции конденсата фотонов  $\psi(r)$  и конденсата экситонов  $\chi(r)$ . Введем функционал энергии основного состояния связанной слабонеоднородной и слабовзаимодействующей систем фотонов полости и экситонов:

$$E[\psi, \psi^*, \chi, \chi^*] = \int \left[ -\frac{\hbar c}{2\pi\sqrt{\varepsilon}} \psi^* \partial_\mu L(r) \partial_\mu \psi + \frac{\pi\hbar c}{L(r)\sqrt{\varepsilon}} |\psi|^2 - \frac{\hbar^2}{2m_{ex}} \chi^* \partial_\mu^2 \chi + (E_0 + V(r)) |\chi|^2 + \frac{g}{2} |\chi|^4 + \frac{\hbar\Omega}{2} (\psi^* \chi + \chi^* \psi) - \mu (|\psi|^2 + |\chi|^2) \right] dr. \quad (1)$$

В (1) первый член отвечает квантовой кинетической энергии фотонов в случае медленно меняющейся ширины микрополости  $L(r)$ . Приведенный вид кинетического члена удовлетворяет условию эрмитовости (см., например, [22]). Перекрестный член  $\hbar\Omega/2(\psi^* \chi + \chi^* \psi)$  описывает резонансное превращение экситонов в фотоны, и наоборот, и обеспечивает фиксацию относительной фазы двух конденсатов: минимуму функционала (1) отвечает относительная фаза  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ , где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — фазы фотонной и экситонной частей конденсата (мы полагаем в общем случае  $\psi = |\psi|e^{i\varphi_1}$ ,  $\chi = |\chi|e^{i\varphi_2}$ ). Последнее слагаемое возникает из условия сохранения суммарного числа частиц (фотонов и экситонов),  $N = \int (|\psi|^2 + |\chi|^2) 2\pi r dr$ .

Рассмотрим микрополость переменной ширины  $L(r) = L_0 f(r)$ , такой что  $\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 1$ . Обозначим  $\pi\hbar c/L_0 = E_{ph0}$ , и далее будем рассматривать резонансный случай  $E_{ph0} = E_0$ .

Для обезразмеривания задачи введем пространственный масштаб  $s = \sqrt{c L_0 / \sqrt{\varepsilon}} \pi \Omega$ . В качестве энергетического масштаба будем использовать удвоенную энергию связи трехмерного экситона  $E_{ex}^{3D} = m_{ex} e^4 / \varepsilon^2 \hbar^2$ .

Варьируя функционал (1) по  $\psi^*$  и по  $\chi^*$ , можно получить систему уравнений для волновых функций связанных конденсатов (фотонного и экситонного). В безразмерных единицах эта система уравнений имеет вид

$$-\frac{\tilde{\Omega}}{2} \partial_\mu f(r) \partial_\mu \psi + (\nu - \mu) \psi + \frac{\tilde{\Omega}}{2} \chi = 0, \quad (2)$$

$$-\frac{\sigma}{2} \partial_\mu^2 \chi + (V + \nu - \mu) \chi + \gamma |\chi|^2 \chi + \frac{\tilde{\Omega}}{2} \psi = 0.$$

Здесь  $V(r)$  и  $\mu$  — безразмерные величины (в выбранных энергетических единицах), и, кроме того, введем следующие обозначения:

$$\tilde{\Omega} = \frac{\hbar\Omega}{E_{ex}^{3D}}; \sigma = \frac{\hbar^2}{m_{ex} E_{ex}^{3D} s^2}; \nu = \frac{\pi\hbar c}{L_0 \sqrt{\varepsilon} E_{ex}^{3D}}; \gamma = \frac{g}{E_{ex}^{3D} s^2}.$$

Полученная система уравнений отвечает случаю слабого экситонного взаимодействия, когда практически все частицы в основном состоянии находятся в бозе-конденсате, а истощение конденсата за счет взаимодействия пренебрежимо. Таким образом, для двухкомпонентного конденсата эта система будет аналогом уравнения Гросса-Питаевского [23], справедливое для разреженной однокомпонентной бозонной системы.

Для экситонной ловушки  $L(r) = L_0$  ( $f(r) \equiv 1$ ), но  $V(r) \neq \text{const}$ . Для моделирования экситонного конфайнмента будем использовать квадратичный внешний потенциал  $V(r) = kr^2/2$ , где  $k = V_0 s^2 / E_{ex}^{3D}$ .

Записывая решение первого уравнения системы (2) в виде свертки, и затем подставив полученное выражение для  $\psi(r)$  во второе уравнение, получаем следующее интегральное уравнение:

$$-\frac{\sigma}{2} \partial_\mu^2 \chi(r) + [V(r) + \nu - \mu] \chi(r) + \gamma |\chi(r)|^2 \chi(r) - \frac{\tilde{\Omega}}{4\pi} \int_0^\infty \rho d\rho \chi(\rho) \int_0^{2\pi} K_0 \left[ \sqrt{2 \frac{\nu - \mu}{\tilde{\Omega}}} |\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}| \right] d\varphi = 0, \quad (3)$$

где  $k_0(x)$  — функция Макдональда. Как видим, наличие фотонного конденсата, связанного с экситонным конденсатом, приводит к нелокальности в эффективном (замкнутом) уравнении для плотности экситонного конденсата.

Для типичных экспериментальных значений величин, входящих в используемые безразмерные параметры, получаются следующие оценки:

$$\tilde{\Omega} \sim 1, \quad \sigma \sim 10^{-4}, \quad \nu \sim 10^{-2}, \quad \gamma \sim 10^{-3}.$$

Предполагая  $\sigma/R^2 \ll 1$  (где  $R$  — безразмерный радиус локализации), можно в уравнении пренебречь слага-

емым с производной для  $\chi(r)$ . Тогда запишем (3) в виде

$$\chi(r) = \frac{\tilde{\Omega} \int_0^{\infty} \mathcal{K}(\rho, r) \chi(\rho) \rho d\rho}{4\pi \left( k \frac{r^2}{2} + \nu - \mu \right)} - \gamma \frac{|\chi(r)|^2 \chi(r)}{k \frac{r^2}{2} + \nu - \mu}, \quad (4)$$

где

$$\mathcal{K}(\rho, r) = \int_0^{2\pi} K_0 \left[ \sqrt{2 \frac{\nu - \mu}{\tilde{\Omega}} (r^2 + \rho^2 + 2r\rho \cos \varphi)} \right] d\varphi.$$

Безразмерная константа взаимодействия  $\gamma$  имеет порядок  $10^{-3}$ , поэтому для малых плотностей конденсата вторым слагаемым в правой части (4) можно в нулевом приближении пренебречь. Получившееся линейное интегральное уравнение может быть преобразовано к симметричному виду, в результате чего получим однородное уравнение Фредгольма второго рода, которое может быть решено методом Келлога. В нашем случае, так как собственное значение интегрального оператора зафиксировано параметрами системы, необходимо, изменяя химический потенциал  $\mu$ , менять сам оператор до тех пор, пока данное число не станет его собственным значением. Таким образом находятся ограничения на химический потенциал конденсата при заданных параметрах системы. Взаимодействие между экситонами, отброшенное в нулевом приближении, сдвигает найденное для случая невзаимодействующих поляритонов значение  $\mu$  на некоторую величину  $\Delta\mu$ . Эту величину можно найти, решая численно уравнение (4), используя в качестве исходного приближения распределение, найденное на предыдущем шаге. При этом  $\Delta\mu$  подбирается так, чтобы решение уравнения сходилось к пределу, отличному от нуля.

Мы решали численно интегральное уравнение (4) для волновой функции  $\chi(r)$  экситонного конденсата. Затем численно рассчитывалась волновая функция фотонного конденсата.

Вначале опишем случай, когда потенциал конфайнмента экситонов  $k$  относительно мал, и характерная радиальная координата  $r$  в уравнении (3) может принимать значения  $r \gg 1$ . На таких масштабах интегральный оператор в уравнении (4) вырождается в  $\delta$ -функцию, и мы приходим к приближению Томаса-Ферми (ТФ). В этом случае профиль экситонного конденсата определяется выражением

$$|\chi(r)|^2 = \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{\tilde{\Omega}^2}{4(\nu - \mu)} - (\nu - \mu) - k \frac{r^2}{2} \right\}. \quad (5)$$

Из этого выражения следует, что плотность экситонного конденсата  $|\chi|^2$  имеет конечную действительную величину при изменении  $\mu$  в интервале от  $\mu_{min} = \nu - \tilde{\Omega}/2$  до  $\mu_{max} = \nu$ .

Профиль фотонного конденсата имеет вид

$$|\psi(r)|^2 = \frac{1}{\gamma} \frac{\tilde{\Omega}^2}{4(\nu - \mu)^2} \left\{ \frac{\tilde{\Omega}^2}{4(\nu - \mu)} - (\nu - \mu) - k \frac{r^2}{2} \right\}. \quad (6)$$

Обе компоненты этого конденсата (5) и (6) локализованы в области  $r < r_{max}$ , где

$$r_{max}^2 = \frac{2}{k} \left[ \frac{\tilde{\Omega}^2}{4(\nu - \mu)} - \nu + \mu \right]. \quad (7)$$

С помощью этого выражения можно конкретизировать условие малости потенциала конфайнмента экситонов: условие  $r_{max} \gg 1$  достигается, когда  $k \ll 1$ , что эквивалентно  $V_0 \ll 10^{-6}$  эВ/см<sup>2</sup>.

Опишем результаты численного расчета волновых функций  $\psi(r)$  и  $\chi(r)$  фотонного и экситонного конденсатов соответственно.

На рис. 1а приведены профили плотности  $|\psi(r)|^2$  и  $|\chi(r)|^2$  для фотонного и экситонного конденсатов в относительно слабой ловушке с  $V_0 \sim 10^{-10}$  эВ/см<sup>2</sup>. Сплошные линии отвечают численному расчету, а пунктирные – томас-фермиевскому приближению. Как видно из полученных графиков, при больших радиусах конденсата (при малых  $V_0$ ) приближение Томаса-Ферми дает практически точный результат.

Для получения результатов в противоположном пределе будем постепенно увеличивать экситонный конфайнмент. Результаты расчета для ловушки с потенциалом  $V_0 \sim 10^{-8}$  эВ/см<sup>2</sup> приведены на рис. 1б. Полученные распределения уже заметно отличаются от приближения ТФ: во-первых, меньшей плотностью в центре ловушки за счет отталкивания частиц, во-вторых – “хвостом” на периферии. Однако, как и в приближении Томаса-Ферми, профили фотонного и экситонного конденсатов остаются похожими друг на друга.

При дальнейшем увеличении потенциала конфайнмента,  $V_0 \sim 10^{-7}$  эВ/см<sup>2</sup> (см. рис. 1с), приближение ТФ, как показывают расчеты, становится совершенно неприменимым и дает сильно завышенные амплитуды профилей.

Рассмотрим теперь предельно нелокальный случай, когда ширина области конденсата составляет несколько единиц  $s$ . Физически бессмысленно рассматривать меньшие масштабы, так как  $s = 0.2$  мкм, а размер двумерного экситона  $a_{ex2D} = 0.01$  мкм. Ясно,

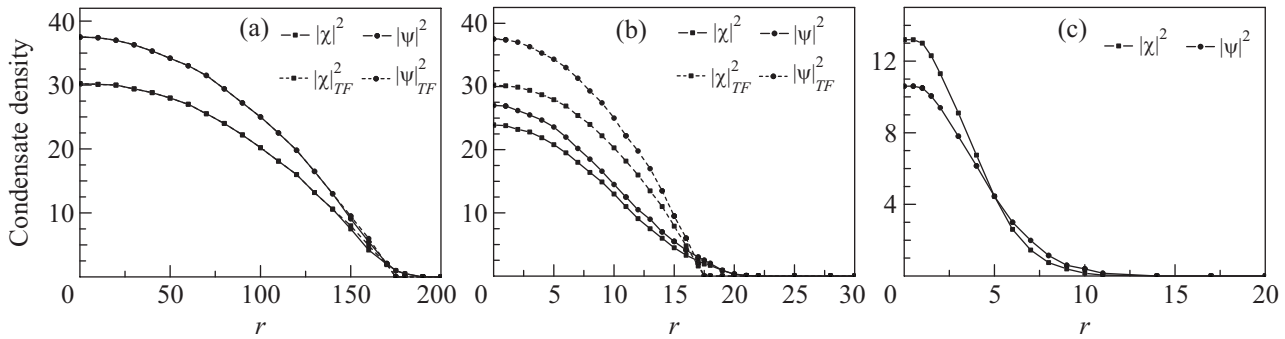


Рис. 1. Плотность экситонного ( $|\chi(r)|^2$ ) и фотонного ( $|\psi(r)|^2$ ) конденсатов. Пунктирная линия (a), (b) – расчет в приближении ТФ. Физические параметры:  $\tilde{\Omega} = 1.14$ ;  $\sigma = 3.25 \cdot 10^{-4}$ ;  $\nu = 69.8$ ;  $\gamma = 0.00396$ . (a) Потенциал конфайнмента  $k = 7.88 \cdot 10^{-6}$  ( $V_0 = 5.0 \cdot 10^{-10}$  эВ/см<sup>2</sup>), химический потенциал системы  $\mu = 0.1$ . Данному распределению соответствуют: число экситонов  $N_{ex} = 1.46 \cdot 10^6$ , число фотонов  $N_{ph} = 1.78 \cdot 10^6$ , полное число частиц  $N = 3.24 \cdot 10^6$ . Полное число частиц в приближении ТФ  $N_{TF} = 3.24 \cdot 10^6$ ; (b)  $k = 7.88 \cdot 10^{-4}$  ( $V_0 = 5.0 \cdot 10^{-8}$  эВ/см<sup>2</sup>),  $\mu = 0.1$ . Полученное в данном случае число частиц:  $N_{ex} = 1.04 \cdot 10^4$ ,  $N_{ph} = 1.20 \cdot 10^4$ ,  $N = 2.24 \cdot 10^4$ ;  $N_{TF} = 3.24 \cdot 10^4$ ; (c)  $k = 7.88 \cdot 10^{-3}$  ( $V_0 = 5.0 \cdot 10^{-7}$  эВ/см<sup>2</sup>),  $\mu = 0.196$ . Число экситонов  $N_{ex} = 931$ , число фотонов  $N_{ph} = 960$ , полное число частиц  $N = 1891$ . Полное число частиц, рассчитанное для данных параметров в приближении ТФ, составило  $N_{TF} = 16035$

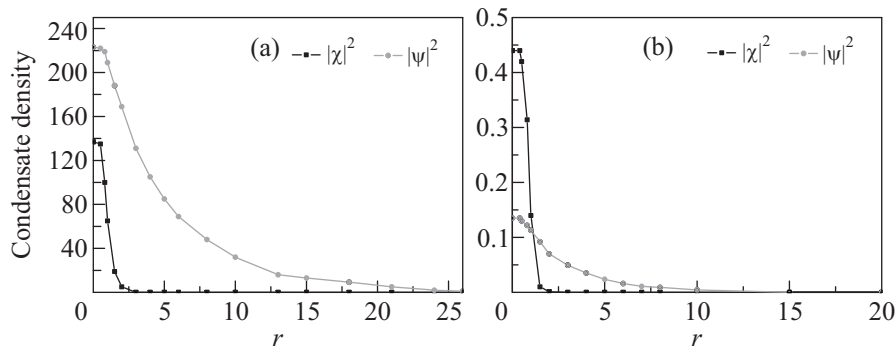


Рис. 2. Плотность экситонного ( $|\chi(r)|^2$ ) и фотонного ( $|\psi(r)|^2$ ) конденсатов. Физические параметры:  $k = 1.58$  ( $V_0 = 10^{-4}$  эВ/см<sup>2</sup>);  $\tilde{\Omega} = 1.14$ ;  $\sigma = 3.25 \cdot 10^{-4}$ ;  $\nu = 69.8$ ;  $\gamma = 0.00396$ . (a) Химический потенциал системы  $\mu = 0.989$ ; (b)  $\mu = 0.959$

что для гидродинамического описания нужны масштабы, хотя бы на порядок превышающие размер частиц. Потенциал экситонного конфайнмента  $V_0 = 0.0001$  эВ/см<sup>2</sup>. На рис. 2а видно, что при сильном конфайнменте профили плотности экситонов и фотонов уже совершенно отличны друг от друга. Понижая накачку (химический потенциал) в системе при выбранной величине экситонного потенциала, можно добиться еще более яркой демонстрации различия профилей фотонной и экситонной подсистем (см. рис. 2b). Пространственная протяженность распределения фотонов становится существенно больше, чем у распределения плотности экситонного конденсата. В данном режиме наиболее ярко продемонстрировано слабое воздействие экситонной ловушки на фотонную подсистему.

Мы показали, что в случае слабого конфайнмента, описываемого приближением ТФ, в силу пропор-

циональности распределений  $|\psi|^2$  и  $|\chi|^2$ , протяженности фотонного и экситонного конденсатов одинаковы. Амплитуды плотностей могут различаться в зависимости от накачки системы. Этот результат был подтвержден точным численным расчетом. Из результатов численного моделирования можно видеть, что при увеличении экситонного конфайнмента при фиксированном химическом потенциале системы уменьшается протяженность экситонного конденсата, а протяженность фотонного конденсата заметно увеличивается, то есть фотоны оказываются более слабо локализованы.

Таким образом, численно было исследовано поведение конденсатов фотонной и экситонной подсистем в экситонных ловушках со слабым и сильным конфайнментом при различной накачке. Принципиально важным было бы исследовать поведение поляритонов и в фотонных ловушках разной глубины и протяжен-

ности, что планируется сделать в последующих работах.

В заключение отметим, что мы рассматривали равновесные ситуации, полагая, что в ближайшее время будут реализованы системы с малым временем релаксации. Неравновесные эффекты (см. обзор [24]) в рамках рассматриваемого подхода будут изучены в другой работе.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований и программами РАН.

1. C. Weisbuch et. al., Phys. Rev. Lett. **69**, 3314 (1992).
2. A. Kavokin and G. Malpuech, *Cavity Polaritons*, Elsevier, Amsterdam (2003).
3. A. Imamoglu and R.J. Ram, Phys. Lett. A **214**, 193 (1996).
4. Le Si Dang et. al., Phys. Rev. Lett. **81**, 3920 (1998).
5. H. Deng, G. Weihs, C. Santori et al., Science **298**, 199 (2002).
6. M. Richard et. al., Phys. Rev. B **72**, 201301(R) (2005).
7. J. Kasprzak et. al., Nature (London) **443**, 409 (2006).
8. S. Christopoulos et. al., Phys. Rev. Lett. **98**, 126405 (2007).
9. H. Deng, Y. Yamamoto et. al., Phys. Rev. Lett. **99**, 126403 (2007).
10. V. Savona, Z. Hradil, A. Quattropani, and P. Schwendimann, Phys. Rev. B **49**, 8774 (1994).
11. P. B. Littlewood, J. M. J. Keeling, F. M. Marchetti et. al., J. Phys.: Condens. Matter **16** S3597-S3620 (2004).
12. K. V. Kavokin et.al., Phys. Rev. Lett. **92**, 017401 (2004).
13. V. Savona and D. Sarchi, Phys. Stat. Sol.(b) **242**, 2290 (2005).
14. Yu. E. Lozovik, A. G. Semenov, and M. Willander, JETP Lett. **84**(3) (2006); Ю. Е. Лозовик, А. Г. Семёнов, Письма в ЖЭТФ **86**, 30 (2007).
15. R. Balili et. al., Science **316**, 1007 (2007).
16. Ю. Е. Лозовик, УФН **179**, 309 (2009).
17. M. Willander, O. Nur, Yu. E. Lozovik et. al., Microelectronic Journal **36**, 940 (2005).
18. R. Balili, D. W. Snoke et. al., Appl. Phys. Lett. **88**, 031110 (2006).
19. O. L. Berman, Yu. E. Lozovik, and D. W. Snoke, Phys. Stat. Sol. (c) **3**, 3373 (2006).
20. В. Б. Тимофеев, А. В. Горбунов, Письма в ЖЭТФ **83**(4), 178 (2006).
21. C. Cuiti, P. Schwendimann, and A. Quattropani, Semicond. Sci. Technol. **18** (2003).
22. Ж. С. Геворкян, Ю. Е. Лозовик, ФТТ **29**, 1094 (1987).
23. L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Oxford University Press, Oxford (2003).
24. В. Д. Кулаковский, Д. Н. Крижановский и др., УФН **175**, 334 (2005).