Письма в ЖЭТФ, том 53, вып. 1, стр. 7 - 9 10 января 1991 г.

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЗАМКНУТЫХ НУЛЬ-СУПЕРМЕМБРАН В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И.А.Бандос[1)], *А.А.Желтухин*

Физико-технический институт АН УССР
[1)] *Харьковский государственный университет*
310108, Харьков

Поступила в редакцию 28 ноября 1990 г.

Построен БРСТ-заряд и доказана квантовая непротиворечивость теории нуль-супер-p-бран, включая нуль-супермембраны ($p = 2$), нуль-суперструны ($p = 1$) и безмассовые суперчастицы в 4-мерном пространстве-времени.

Проблемы нефизической размерности и ковариантного квантования являются центральными в теории суперструн [1]. Ковариантное квантование осложняется наличием перепутанных между собой связей первого и второго рода и проблемой трактовки последних в методе БФВ [2,3]. Обе они в принципе решаются путем расширения исходного пространства динамических переменных теории [4,5]. Для ковариантного разделения связей вводятся вспомогательные гармонические [4-6] или твисторные переменные [7-9]. Проблема связей второго рода решается посредством их конверсии в эффективные связи первого рода, используя еще один набор вспомогательных полей [10-12].

На основе этих идей здесь проводится ковариантное квантование нуль-супер-p-бран в 4-мерном пространстве. Для этой цели используется новая [14] твисторная формулировка теории нуль-супер-p-бран [13].

Открытая алгебра связей нуль-супер-p-бран [14] после применения процедуры конверсии [11] приводится к неприводимой алгебре ранга 2 для эффективных связей только первого рода $\tilde{\tilde{Y}}_\Lambda$ и A_f[1)]

$$\{A_f, A_g\} = 0, \quad \{A_f, \tilde{\tilde{Y}}_\Lambda\} = 0, \quad \{\tilde{\tilde{Y}}_\Lambda, \tilde{\tilde{Y}}_\Sigma\} = C^\Pi_{\Lambda\Sigma}\tilde{\tilde{Y}}_\Pi + \epsilon_{\Lambda\Sigma}, \tag{1}$$

где $\epsilon_{\Lambda\Sigma} \equiv \frac{i}{2J}(\delta_{\tilde{\tilde{Y}}_\Lambda, \tilde{\tilde{\nabla}}}{}^{-2}\delta_{\tilde{\tilde{Y}}_\Sigma, \tilde{\tilde{\bar{\nabla}}}}{}^{+2} - (\Lambda \longleftrightarrow \Sigma))[\tilde{\tilde{D}}^{-i}\tilde{\tilde{D}}^{+}_i + \frac{2}{i}\tilde{\tilde{P}}^{(+1-)}(\tilde{\tilde{\nabla}}^{(0)} + \tilde{\tilde{\bar{\nabla}}}^{(0)})]$. Соответствующий алгебре (1) классический БРСТ-заряд Ω [11] равен: $\Omega = \Omega_{min} = \Omega' + A_f C^{\|f}$, где Ω' равно

$$\Omega' = d^p\sigma[C^\Lambda Y^{mod}_\Lambda - 2i\pi^{(+1-)}C^+_i\bar{C}^{-i} - \frac{i}{J}(\pi^{(0)} + \bar{\pi}^{(0)})\tilde{\tilde{P}}^{(+1-)}z^{+2}\bar{z}^{-2} +$$

$$(\frac{i}{4J}p^{-i}\tilde{\tilde{D}}^{+}_i z^{+2}\bar{z}^{-2} + \text{к.с.}) + (\frac{1}{2J}\pi^{(+1-)}\bar{p}^+_i\bar{c}^{-i}z^{+2}\bar{z}^{-2} + \text{к.с.})]. \tag{2}$$

Модифицированные связи Y^{mod}_Λ совпадают с $\tilde{\tilde{Y}}_\Lambda$ [14] за исключением связей $T^{mod}_M = \tilde{\tilde{T}}_M + \bar{P}_\Sigma\partial_M C^\Sigma$, $(\nabla^{(0)})^{mod} = \tilde{\tilde{\nabla}}^{(0)} = q_R(Y_\Sigma)\bar{P}_\Sigma C^\Sigma$, $(\bar{\nabla}^{(0)})^{mod} = \tilde{\tilde{\bar{\nabla}}}^{(0)} - q_L(Y_\Sigma\bar{P}_\Sigma C^\Sigma$. Пары канонически сопряженных духовных переменных (C^Λ, P_Λ) со скобкой $\{C^\Sigma(\vec{\sigma}), P_\Lambda(\vec{\sigma}\,')\} = -\delta^\Sigma_\Lambda\delta_{\vec{\sigma}\vec{\sigma}\,'}$ и соответствующие им связи $\tilde{\tilde{Y}}_\Lambda$ образуют следующие "триады" $(\tilde{\tilde{Y}}_\Lambda; C^\Lambda, P_\Lambda)$:

[1)] Из-за недостатка места мы не приводим явных выражений для этих связей $\tilde{\tilde{Y}}_\Lambda, A_f$ и других определений, все они содержатся в работах [14].

$$(\tilde{\tilde{D}}^{-i};c_i^+,p^{-i}),\ (\tilde{\tilde{D}}_i^+;\bar{c}^{-i},\bar{p}_i^+),\ (\tilde{\tilde{P}}^{(+1-)};\mu^{(-1+)},\pi^{(+1-)}),\ (\tilde{\tilde{\nabla}}^{(0)};i\eta^{(0)};-i\pi^{(0)}),$$

$$(\tilde{\tilde{\nabla}}^{(0)};i\bar{\eta}^{(0)},-i\bar{\pi}^{(0)}),\ (\tilde{\tilde{\nabla}}^{-2};z^{+2},\pi^{-2}),\ (\tilde{\tilde{\nabla}}^{+2};\bar{z}^{-2},\bar{\pi}^{+2}),\ (\tilde{\tilde{T}}_M;\eta^M,\pi_M).$$

Квантование рассматриваемой теории проведем в линеаризующей калибровке, определяемой калибровочным фермионом Ψ_0 и гамильтонианом $H_{\Psi_0}=\{\Psi_0,\Omega\}$

$$\Psi_0=\gamma/2\int d^p\vec{\sigma}J^{(-1+)}\pi^{(+1-)}, \tag{3}$$

$$H_{\Psi_0}=\frac{-\gamma}{2}\int d^p\vec{\sigma}J^{(-1+)}[\tilde{\tilde{P}}^{(+1-)}-\pi^{(+1-)}\partial_N\eta^N]=\frac{-\gamma}{2}\int d^p\vec{\sigma}[P^mP_m+J^{(-1+)}\pi^{(+1-)}\partial_N\eta^N]. \tag{4}$$

Из уравнения движения $\dot{f}=\{f,H_{\Psi_0}\}$ ($\ddot{x}^m=0,\dot{\theta}^\alpha=0$ и т.д.) вытекает, что почти все фазовые переменные не зависят от времени, исключая линейно зависящие от τ переменные x^m, $P_\alpha^\mp$, $\mu^{(-1+)}$, π_M, и периодически зависят от $\vec{\sigma}$

$$P_m=P_{0m}(\vec{\sigma}),\ \ v_\alpha^\mp=v_{0\alpha}^\mp(\vec{\sigma}),\ \ \theta_i^\alpha=\theta_{0i}^\alpha(\vec{\sigma}),\ \ \pi_\alpha^i=\pi_{0\alpha}^i(\vec{\sigma}),\ldots \tag{5}$$

Отсюда получаем указание, что физическому упорядочению в квантовой картине отвечает упорядочение в терминах операторных начальных данных $\hat{q}_0(\vec{\sigma})\hat{p}_0(\vec{\sigma})$. Поэтому мы выберем квантовое обобщенное[2)] $\hat{q}\hat{p}$-упорядочение и покажем, что при таком упорядочении классическое уравнение $\{\Omega,\Omega\}=0$, переходит в квантовое условие нильпотентности для БРСТ-оператора $\hat{\Omega}^2=0$ без генерации аномальных членов. Действительно, общая структура квантования оператора $\hat{\Omega}$ имеет вид $\hat{\Omega}=\ldots+\hat{\mathcal{Q}}\hat{\mathcal{P}}+\ldots+\hat{\mathcal{Q}}'\hat{\mathcal{P}}'+\ldots$. Здесь $\hat{q}$-цепь $\hat{\mathcal{Q}}$ включает только произведение $\hat{q}$-переменных ("координат"), а $\hat{p}$-цель $\hat{\mathcal{P}}$ - только произведение $\hat{p}$-переменных ("импульсов"): $\hat{\mathcal{Q}}\equiv(q_1)^{A_1}\ldots(q_n)^{A_n}$, $\hat{\mathcal{P}}=(p_1)^{B_1}\ldots(p_m)^{B_m}$. Поэтому после раскрытия антикоммутатора $[\hat{\Omega},\hat{\Omega}]_+$ получим $[\hat{\Omega},\hat{\Omega}]_+=\ldots+[\hat{\mathcal{Q}}\hat{\mathcal{P}},\hat{\mathcal{Q}}'\hat{\mathcal{P}}']_++=\ldots+\hat{\mathcal{Q}}[\hat{\mathcal{P}},\mathcal{Q}']\hat{\mathcal{P}}'\pm\hat{\mathcal{Q}}'[\hat{\mathcal{Q}},\hat{\mathcal{P}}']\hat{\mathcal{P}}+\ldots$, откуда следует, что $\hat{q}\hat{p}$-упорядочение сохраняется, если оно сохраняется после раскрытия (анти)коммутаторов $[\hat{\mathcal{P}},\hat{\mathcal{Q}}']_\pm$ и $[\hat{\mathcal{Q}},\hat{\mathcal{P}}']_\pm$. *Достаточным* условием для этого является требование, чтобы любая пара $(\hat{\mathcal{Q}},\hat{\mathcal{P}})$ $\hat{q}$- и $\hat{p}$-цепей содержащихся в $\hat{\Omega}$, не включала более одной пары канонически сопряженных переменных $(\hat{q}^i,\hat{p}_i)$. Это условие дает критерий для выделения потенциально аномальных членов. Следуя ему, выделим из $\hat{\Omega}$ все нетривиальные $\hat{p}$-цепи, т.е. $\hat{p}$-цепи, содержащие более одной импульсной переменной. Если для нетривиальной $\hat{p}$-цепи $\hat{\mathcal{P}}'$ в $\hat{\Omega}$ найдется $\hat{q}$-цепь $\hat{\mathcal{Q}}''$, включающая две или более $\hat{q}$-переменные, сопряженные $\hat{p}$-переменным, образующим рассматриваемую $\hat{p}$-цепь $\hat{\mathcal{P}}$, тогда необходимо вычислить (анти)-коммутаторов $[\hat{\mathcal{Q}}'',\hat{\mathcal{P}}]_\pm$ и выделить возможные аномальные вклады. Поступая так, мы найдем, что переменные $x_{\alpha\dot{\alpha}}$ включаются только в одну нетривиальную $\hat{q}$-цепь $\hat{\eta}^M\partial_M\hat{x}_{\alpha\dot{\alpha}}$, содержащуюся в $\hat{\Omega}$. Однако нетривильная $\hat{p}$-цепь, включающая произведение $\hat{\pi}_M\hat{P}^{\dot{\alpha}\alpha}$, в $\hat{\Omega}$ отсутствует. Далее, импульс $\hat{\pi}_M$ образует только тривиальную $\hat{p}$-цепь, входящую в слагаемое $\hat{\eta}^N\partial_N\hat{\eta}^M\hat{\pi}_M$ в $\hat{\Omega}$. Поэтому заключаем, что пары $(\hat{x}_{\alpha\dot{\alpha}},\hat{P}^{\dot{\alpha}\alpha})$ и $(\hat{\eta}^M,\hat{\pi}_M)$ не дают вклада в аномалию и в дальнейшем могут быть "вычеркнуты" из $\hat{q}$- и $\hat{p}$-цепей. Это же справедливо и для канонических пар гармонических переменных $(\hat{v}^{\alpha\mp},\hat{P}_\alpha^\pm)$ и $(\hat{\bar{v}}^{\dot{\alpha}\pm},\hat{\bar{P}}_{\dot{\alpha}}^\mp)$, поскольку импульсы этих пар $\hat{P}_\alpha^\mp,\hat{\bar{P}}_{\dot{\alpha}}^\pm$ входят в $\hat{\Omega}$ только в составе связей $\nabla^{(0)},\bar{\nabla}^{(0)},\nabla^{\mp2},\bar{\nabla}^{\pm2}$, которые образуют только тривиальные $\hat{p}$-цепи. С учетом процесса "вычеркивания", мы найдем следующие потенциально

[2)] Термин "обобщенное" означает, что некоторые импульсные переменные могут включаться в $\hat{q}$-набор и соответственно, координатные переменные в $\hat{p}$-набор.

аномальные $\hat{p}$-цепи, содержащиеся в операторе $\hat{\Omega}$: $\hat{D}^{+i}_{Abel}(\hat{\bar{D}}^{-}_{i})_{Abel}$, $\tilde{\hat{D}}^{-i}(\bar{D}^{-}_{i})_{Abel}$, $\hat{D}^{+i}_{Abel}\hat{\bar{\psi}}_{i}$, $\hat{\tilde{\hat{D}}}^{-i}\hat{\bar{p}}^{+}_{i}$, $\hat{\tilde{\hat{D}}}^{-i}\hat{c}^{+}_{i}$, $\hat{\pi}^{(+1-)}\hat{p}^{-i}\hat{c}^{+}_{i}$. Тогда к.с. к ним (без последней в этом ряду) будут нетривиальными $\hat{q}$-цепями. Применяя рецепт обобщенного $\hat{q}\hat{p}$-упорядочения с координатами $\hat{q} = (\hat{x}^{m}, \hat{\pi}^{i}_{\alpha}, \hat{\bar{\theta}}^{\dot{\alpha}i}, \hat{\psi}^{i}, \hat{p}^{-i}, \hat{\tilde{c}}^{-i}, ...)$ и импульсами $\hat{p} = (\hat{P}_{m}, \hat{\theta}^{\alpha}_{i}, \hat{\bar{\pi}}_{\dot{\alpha}i}, \hat{\bar{\psi}}_{i}, \hat{c}^{+}_{i}, \hat{\bar{p}}^{+}_{i}, ...)$, которому соответствует следующее упорядочение входящих в $\hat{\Omega}$ выражений в виде $\hat{\tilde{\hat{d}}}^{-i}\hat{\bar{\psi}}_{i}, \hat{\tilde{\hat{D}}}^{-i}\hat{c}^{+}_{i}, \hat{\tilde{c}}^{-i}\hat{\tilde{\hat{D}}}^{+}_{i}, \hat{\psi}^{i}\hat{\tilde{\hat{D}}}^{+}_{i}$, мы найдем, что это упорядочение сохраняется в процессе вычисления $[\hat{\Omega}, \hat{\Omega}]_{+}$. Например, $[\hat{D}\hat{\bar{D}}, \hat{D}\hat{\bar{D}}]_{+} \sim [\hat{\pi}\hat{\theta} + \hat{\bar{\theta}}\hat{\bar{\pi}}, \hat{\pi}\hat{\theta} + \hat{\bar{\theta}}\hat{\bar{\pi}}]_{+} \Rightarrow \hat{\pi}\hat{\theta} + \hat{\bar{\theta}}\hat{\bar{\pi}}$. Следовательно, обобщенное $\hat{q}\hat{p}$-упорядочение свободно от аномалий и должно использоваться при переходе к квантовой картине в теории нуль-супер-p-бран.

Переход от $\hat{q}\hat{p}$-упорядочения к упорядочению в терминах операторных начальных данных $(\hat{q}_{0}(\vec{\sigma}), \hat{p}_{0}(\vec{\sigma}))$ не вносит принципиальных изменений, в чем легко прямо убедиться, рассматривая решения уравнений движения для переменных $\hat{q}, \hat{p}$. Это связано с тем, что для переменных $\hat{q}, \hat{p}$ линейно зависящих от времени, нелинейные комбинации начальных данных при τ не порождает новых нетривиальных $\hat{p}$-целей в $\hat{\Omega}$. Например, в решении для x^{m} нелинайная добавка является тривиальной $\hat{p}$цепью (аналогично и для переменных $P^{\pm}_{\alpha}$, $\mu^{(-1+)}$, $\pi^{(+1-)}$)

$$x^{m}(\tau, \vec{\sigma}) = x^{m}_{0}(\vec{\sigma}) + \tau\gamma\left[P^{m}_{0}(\vec{\sigma}) + \frac{(v^{+}_{0}\sigma^{m}\bar{v}^{-}_{0})}{\sqrt{(1+\Xi_{0})(1+\bar{\Xi}_{0})}}\pi^{(+1-)}_{0}\partial_{N}\eta^{N}_{0}\right].$$

Мы доказали, что обобщенное $\hat{q}_{0}\hat{p}_{0}$-упорядочение не приводит к аномальным добавкам и, следовательно, квантовый БРСТ-заряд $\hat{\Omega}$ является нильпотентным $\hat{\Omega}^{2} = 0$. Поэтому теория нуль-супер-p-бран является непротиворечивой квантовой теорией протяженных p-мерных объектов в реалистичном 4-мерном пространстве-времени.[3)]

Литература

1. *Green M.B., Schwarz J.H.* Phys. Lett. B, 1984, **136**, 367.
2. *Gates W. et al.* Phys. Lett. B, 1989, **225**, 44.
3. *Kallosh R.* Phys. Lett. B, 1989, **225**, 49.
4. *Socatchev E.* Phys. Lett. B, 1989, **169**, 209.
5. *Nissimov E. et al.* Nucl Phys. B, 1988, **297**, 349; 1989, **317**, 344.
6. *Galperin A. et al.* Class. Quant. Grav., 1984, **1**, 469; 1985, **1**, 155. *Volkov D.V., Zheltukhin A.A.* Nucl. Phys. B, 1990, 335, 723.
7. *Volkov D.V., Zheltukhin A.A.* Nucl. Phys. B, 1990, **335**, 723.
8. *Volkov D.V. et al.* Mod. Phys. Lett. A, 1989, **4**, 901.
9. *Бандос И.А.* ЯФ, 1990, **51**, 1429.
10. *Faddeev L.D., Shatashvili S.L.* Phys. Lett. B, 1986, **167**, 225.
11. *Batalin et al.* Nucl. Phys. B, 1989, **314**, 158.
12. *Egorian E.S., Manvelyan R.P.* Preprint YERPHI-1056(19)-88, 1988.
13. *Желтухин А.А.* ЯФ, 1988, **48**, 587; 1990, **51**, 509; ТМФ, 1988, **77**, 377.
14. *Бандос И.А., Желтухин А.А.* Письма в ЖЭТФ, 1990, **51**, 547; Препринт ХФТИ 90-46, 1990.

[3)] Отметим новый механизм генерации натяжения $\sim 1/\alpha'$ для нуль-суперструн посредством добавки в их действие члена Весса - Зумино, который *нарушает* фермионную K-симметрию действия нуль-суперструн [13]: $S_{1} \Rightarrow \tilde{S}_{1} = -\frac{1}{2}\int d\tau d\sigma \cdot \{\rho^{\mu}v^{-\alpha}v^{+\dot{\alpha}}\omega_{\mu\alpha\dot{\alpha}} + (i/\alpha')\epsilon^{\mu\nu}(\partial_{\nu}\theta^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} - \theta^{\alpha}\partial_{\nu}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}})\omega_{\mu\alpha\dot{\alpha}}\}$.