

Циклическое окно периода три в антиферромагнитных моделях Поттса и Изинга на рекуррентных решетках

Н. С. Ананикян¹⁾, Л. Н. Ананикян, Л. А. Чахмачян

Национальная научная лаборатория им. А.И. Алиханяна, 0036 Ереван, Армения

Поступила в редакцию 28 апреля 2011 г.

Изучены магнитные свойства антиферромагнитных моделей Поттса с двухчастичным и Изинга с трехчастичным взаимодействием (АИТЧВ) на рекуррентных решетках. Методом рекуррентных соотношений выявлено циклическое окно периода три в Q -компонентной антиферромагнитной модели Поттса на решетке Бете (при $Q < 2$) и в модели АИТЧВ на кактусе Хусими. Для одномерных рациональных отображений, определяющих свойства данных систем, рассчитаны показатели Ляпунова, найдены модулированные фазы и хаотический режим в циклическом окне периода три.

Модели Поттса и Изинга сыграли важную роль в теориях фазовых переходов и критических явлений [1, 2]. В силу того что модель Поттса в общем случае не решена точно (не найдены решения при размерностях $d > 2$ и при нулевом магнитном поле), применяются различные приближения. В частности, приближение Бете–Пайерлса сводит изучение динамики системы к исследованию поведения рациональных отображений, полученных методом рекуррентных соотношений [3]. Этот метод может быть также применен к обобщенной решетке Бете (кактус Хусими) [4] для описания антиферромагнитных фрустрированных систем с многоузловым взаимодействием. Такие модели отображают свойства намагниченности твердого ^3He [5]. С другой стороны, данный динамический подход может быть также применен для изучения калибровочных систем, описываемых как многомерными, так и одномерными отображениями [6]. В нашем случае при антиферромагнитном спаривании между узлами решетки рекуррентные отображения, описывающие модели, проявляют довольно сложное поведение, включая каскад удвоения, хаос и циклические окна периода p ($p = 3, 5, 6, \dots$). Последние были выявлены и исследованы как теоретически, так и экспериментально в ряде других систем, представляющих практический интерес [7]. Показатель Ляпунова может быть рассмотрен в качестве параметра порядка для определения геометрических и динамических свойств аттрактора подобных систем [8].

Целью данной работы является исследование циклического окна периода три для рациональных отображений, описывающих Q -компонентную антиферромагнитную модель Поттса на решетке Бете ($Q < 2$) и АИТЧВ на кактусе (дереве) Хусими. Это окно

представлено ламинарной фазой с вкрапленным хаотическим поведением. Рассмотрен переход из хаотического режима в трех-периодичный, происходящий путем касательной бифуркации (перемежаемость 1-го рода) [9], и дальнейшее удвоение периода посредством перемежаемости 2-го рода (бифуркация удвоения).

При наличии внешнего магнитного поля Q -компонентная модель Поттса на решетке Бете [1] определяется гамильтонианом

$$\mathcal{H} = -J \sum_{(i,j)} \delta(\sigma_i, \sigma_j) - H \sum_i \delta(\sigma_i, Q), \quad (1)$$

где $\sigma_i = 1, 2, \dots, Q$, $\delta(x, y)$ – символ Кронекера. Первая сумма вычисляется по всем ребрам решетки, вторая – по всем узлам ($J < 0$ соответствует антиферромагнитному спариванию). Статистическая сумма и намагниченность на центральный узел могут быть записаны как

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\mathcal{H}/k_B T}, \quad (2)$$

$$M = \langle \delta(\sigma_0, Q) \rangle = \mathcal{Z}^{-1} \sum_{\{\sigma\}} \delta(\sigma_0, Q) e^{-\mathcal{H}/k_B T}, \quad (3)$$

где k_B – константа Больцмана (в дальнейшем $k_B = 1$). Путем разрезания решетки Бете в центральном узле на γ идентичных ветвей (γ есть координационное число), представим статистическую сумму в виде

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\sigma_0\}} \exp \left\{ \frac{H}{T} \delta(\sigma_0, Q) \right\} [g_n(\sigma_0)]^\gamma, \quad (4)$$

где σ_0 – центральный спин, а $g_n(\sigma_0)$ – вклад каждой из γ идентичных ветвей. Следуя известной процедуре, описанной в [3, 5], получаем

$$x_n = f_1(x_{n-1}), \\ f_1(x) = \frac{e^{H/T} + (e^{J/T} + Q - 2)x^{\gamma-1}}{e^{(H+J)/T} + (Q - 1)x^{\gamma-1}}, \quad (5)$$

¹⁾ e-mail: ananik@mail.yerphi.am

где $x_n = g_n(\sigma \neq Q)/g_n(\sigma = Q)$. Рациональное отображение (5) известно как отображение Поттса–Бете. С учетом (3) находим следующее выражение для намагниченности:

$$M_n = \langle \delta(\sigma_0, Q) \rangle = \frac{e^{H/T}}{e^{H/T} + (Q - 1)x_n^\gamma}. \quad (6)$$

В свою очередь модель АИТЧВ во внешнем магнитном поле на кактусе Хусими [4] задается гамильтонианом

$$\mathcal{H} = -J_3 \sum_{\triangle} \sigma_i \sigma_j \sigma_k - H \sum_i \sigma_i, \quad (7)$$

где $\sigma_i = \pm 1$. Первое суммирование производится по всем треугольникам ($J_3 < 0$), а второе – по всем узлам кактуса. В этом случае рекуррентное отображение и намагниченность на узел центрального треугольника имеют следующий вид:

$$x_n = f_2(x_{n-1}), \\ f_2(x) = \frac{x^{2(\gamma-1)} e^{(4H+2J_3)/T} + 2e^{2H/T} x^{\gamma-1} + e^{2J_3/T}}{2x^{\gamma-1} e^{(2H+2J_3)/T} + e^{4H/T} x^{2(\gamma-1)} + 1}, \quad (8)$$

$$M_n = \langle \sigma_0 \rangle = \frac{e^{2H/T} x_n^\gamma - 1}{e^{2H/T} x_n^\gamma + 1}, \quad (9)$$

где $x_n = j_n(\sigma_0 = +1)/j_n(\sigma_0 = -1)$ (j_n есть вклад каждой из γ идентичных ветвей, полученных после срезания в центральном треугольнике).

Таким образом, Q -компонентная модель Поттса на решетке Бете и АИТЧВ на кактусе Хусими могут быть рассмотрены как нелинейные динамические системы, описываемые рациональными отображениями. Интересно рассмотреть зависимость последних как от параметра T (температуры), так и от параметра H (внешнего поля) при фиксированных значениях константы взаимодействия (J или J_3), координационного числа γ и числа компонент Q . Бифуркационные точки отображений соответствуют точкам фазового перехода с изменением симметрии.

Изучим переход из хаотического в циклический режим периода три, происходящий посредством касательной бифуркации [9]. Некоторые значения температуры T и магнитного поля H определяют кривую, которая отделяет хаотический и трехпериодичный режимы (здесь отображение имеет три стабильные неподвижные точки). На описанной кривой имеет место касательная бифуркация, происходящая при условии

$$\begin{cases} f_i^{(3)}(x) = x, \\ [f_i^{(3)}(x)]' = 1 \quad (i = 1, 2), \end{cases} \quad (10)$$

где $f^{(3)}(x) = f\{f[f(x)]\}$. Последующие бифуркации, приводящие к появлению устойчивого цикла периода $3 \cdot 2^n$ ($n = 2, 3, \dots$), соответствуют удвоению периода. В силу последнего следующая бифуркационная точка удвоения может быть найдена из условия

$$\begin{cases} f_i^{(3)}(x) = x, \\ [f_i^{(3)}(x)]' = -1 \quad (i = 1, 2). \end{cases} \quad (11)$$

Область, ограниченная кривыми, найденными из (10) и (11), соответствует модулированной фазе периода три–ЗМ0 (т.е. $3 \cdot 2^0 = 3$) модели Поттса на решетке Бете при $i = 1$ и модели АИТЧВ на кактусе Хусими при $i = 2$ (рис. 1). Как видно из врезки

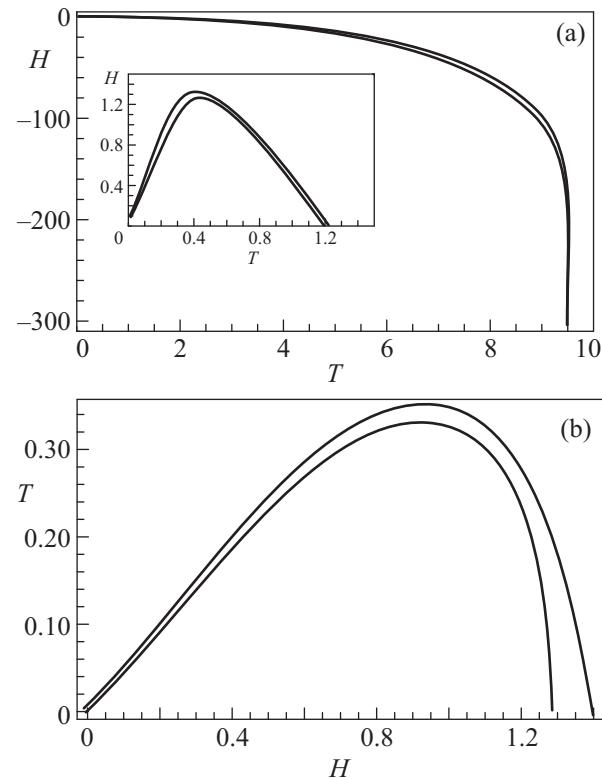


Рис. 1. Модулированная фаза периода три для антиферромагнитной модели Поттса при $Q = 1.1, J = -1, \gamma = 3$ (а) (врезка показывает детали в области $H > 0$); модели АИТЧВ при $J_3 = -1, \gamma = 3$ (б)

на рис. 1а, при рассмотрении поведения отображения $f_1(x)$ и, следовательно, намагниченности M в зависимости от T в области $H \geq 0.1$ (при $H = 0.1$ пересекаются кривые (10) и (11)) проявляются интересные свойства. Когда линия H пересекает только верхнюю кривую (полученную из (10) $i = 1$), границы циклического окна точно различимы (касательная бифуркация имеет место на обоих краях). Это окно представлено только фазой ЗМ0 (стабильный цикл пери-

ода три). При понижении значения фиксированного поля, когда линия $H = \text{const}$ пересекает как верхнюю (10), так и нижнюю (11) кривые ($i = 1$), появляется цикл периода $3 \cdot 2^1 = 6$, который соответствует модулированной фазе 3М1 (т.е. $3 \cdot 2^1 = 6$) периода 6 (рис. 2а). В точках бифуркации происходит фазовый

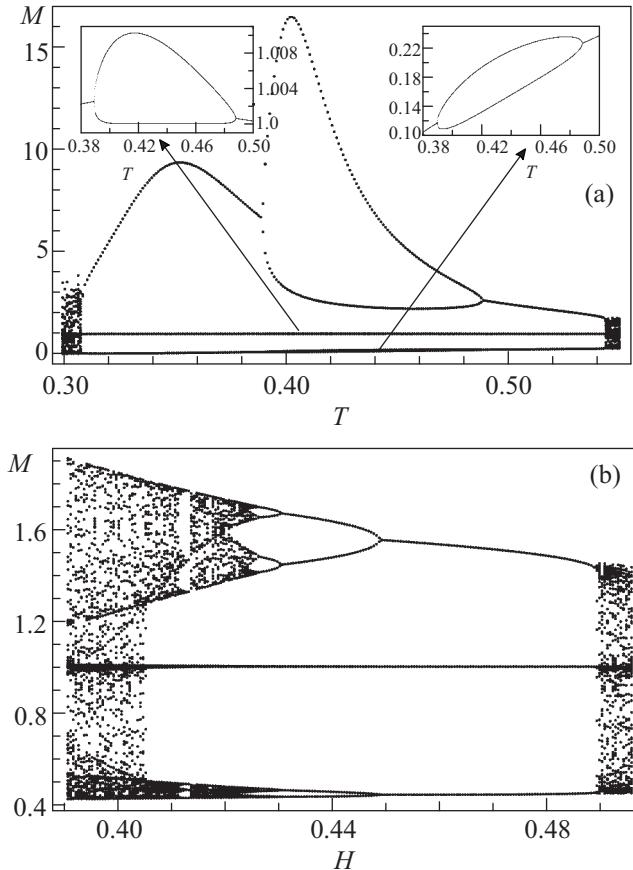


Рис. 2. Намагниченность M в циклическом окне периода три для модели Поттса при $Q = 1.1$, $J = -1$, $\gamma = 3$. (а) – $H = 1.24$, зависимость от температуры T (врезки показывают детали модулированной фазы периода 6); (б) – $T = 1$, зависимость от магнитного поля H

переход между фазами 3М0 и 3М1, сопровождающийся изменением симметрии. При дальнейшем понижении значения поля на бифуркационных диаграммах будут появляться новые “пузыри”, соответствующие модулированным фазам с большим периодом. В итоге будет достигнут хаотический режим, который локализован внутри циклического окна периода три. С другой стороны, при рассмотрении намагниченности в зависимости от температуры T при фиксированном значении $H < 0.1$ или от магнитного поля H при любой фиксированной температуре касательная бифуркация имеет место только на одном краю циклического окна [10]. На другом краю происходит кризис [11, 12], т.е. столкновение хаотического ат-

рактора с независимой неустойчивой неподвижной точкой периода три (рис. 2б). В этом случае модулированные фазы периода $3 \cdot 2^n$ не локализованы внутри окна (сходство с логистическим отображением).

Сравнивая описанную выше картину с поведением отображения $f_2(x)$ (следовательно, намагниченности модели АИТЧВ), замечаем, что касательная бифуркация происходит на обоих краях окна, когда температура фиксирована ($T = \text{const}$) и изменяется внешнее поле (рис. 1б). Если линия $T = \text{const}$ пересекает только кривую, полученную из (10) (при $i = 2$), окно представлено только фазой 3М0. При пересечении кривой (11) (при $i = 2$) линией $T = \text{const}$ имеем также фазу 3М1 (в форме нового “пузыря”), переход к которой происходит посредством бифуркации удвоения (фазовый переход с изменением симметрии). При дальнейшем понижении температуры достигается хаос (как в модели Поттса при $H = \text{const}$) внутри самого окна (рис. 3а). Приведенная картина (локали-

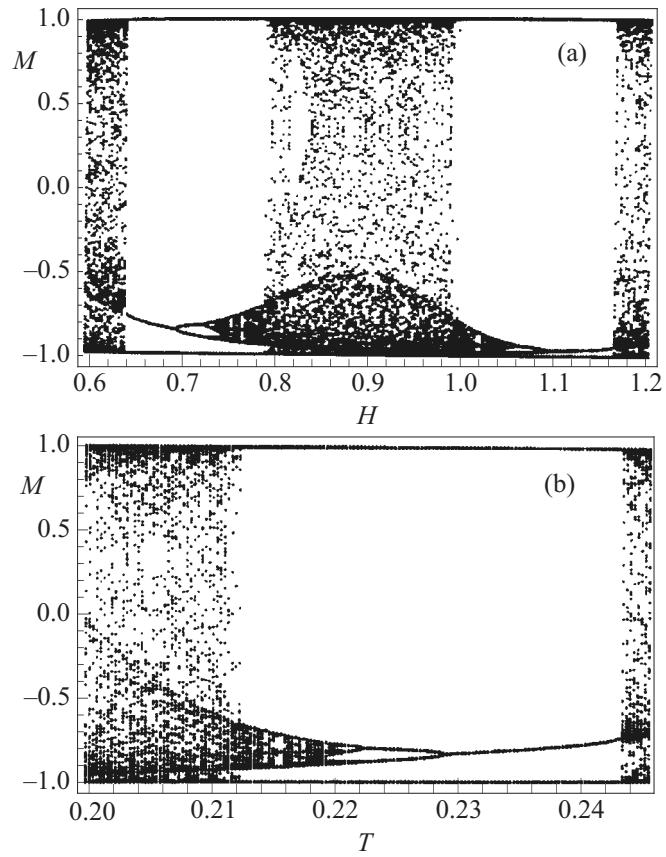


Рис. 3. Намагниченность M в циклическом окне периода три для модели АИТЧВ при $J_3 = -1$, $\gamma = 3$. (а) – $T = 0.3$ зависимость от магнитного поля H ; (б) – $H = 0.5$ зависимость от температуры T

зация фаз $3 \cdot 2^n$ внутри циклического окна периода три) для рациональных отображений (5) и (9), опи-

сывающих статистические спиновые системы, также наблюдалась в трехмерной (полиномиальной) системе Ресслера [12, 13].

С другой стороны, как показано на рис. 3b, в модели АИТЧВ при фиксированном поле H переход между хаосом и фазой ЗМО происходит посредством касательной бифуркации только на одном краю окна. На другом его краю имеет место внезапное изменение хаотического аттрактора из-за наступления кризиса (как в модели Поттса при фиксированной температуре T). Таким образом, можно заключить, что бифуркационные свойства в циклическом окне периода три в антиферромагнитной модели Поттса на решетке Бете в зависимости от температуры T при значениях магнитного поля H больших, чем в точке пересечения кривых (10) и (11) ($H = 0.1$ при $Q = 1.1$), схожи с одноименными свойствами модели АИТЧВ на кактусе Хусими в зависимости от H (ср. врезку на рис. 1a и рис. 1b). Отметим однако, что в модели АИТЧВ существует некоторый промежуток значений поля H ($H \in [1.276; 1.375]$), где основным состоянием системы является трехпериодичная фаза ЗМО (рис. 1b).

В заключение обсуждения фазовой структуры трехпериодичного окна в качестве параметра порядка рассмотрим также показатель Ляпунова — $\lambda(x)$. Как известно, $\lambda(x)$ характеризует степень экспоненциального разбегания двух соседних точек под действием отображения $x_{n+1} = f(x_n)$. Точная формула для $\lambda(x)$ имеет вид

$$\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^{(n)}(x)}{dx} \right|. \quad (12)$$

Показатель Ляпунова отрицателен в периодическом режиме, положителен в хаотическом и равен нулю в точках бифуркации. На рис. 4a и b представлены зависимости показателя Ляпунова от температуры T для $f_1(x)$ и от магнитного поля H для $f_2(x)$ для тех же значений остальных параметров, что и на рис. 2a и 3b соответственно. Как видно из рис. 4, при некоторых определенных значениях параметров T и H $\lambda(x)$ принимает бесконечно большие по величине отрицательные значения ($\lambda(x) = -\infty$). Данные точки соответствуют сверхустойчивым циклам [14], которые заключены в зоне конкретной модулированной фазы. Следовательно, построение сверхустойчивого цикла порядка n (как аналитическое, так и численное) даст возможность определения области (по T и H) существования модулированной фазы периода n . Этому вопросу будут посвящены наши следующие работы.

Наши расчеты также показали, что константы Фейгенбаума α и δ для удвоения периода [15] отобра-

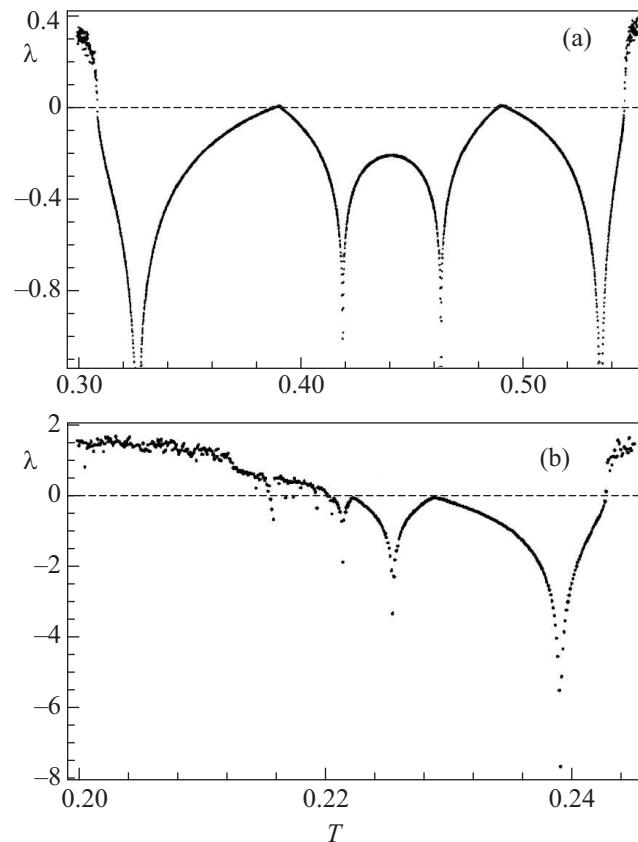


Рис. 4. Показатель Ляпунова $\lambda(x)$ в циклическом окне периода три в зависимости от температуры T для модели Поттса при $Q = 1.1$, $J = -1$, $\gamma = 3$, $H = 1.24$ (а); модели АИТЧВ при $J_3 = -1$, $\gamma = 3$, $H = 0.5$ (б)

жений $f_1(x)$ и $f_2(x)$ сходятся к известным универсальным значениям ($\delta = 4,6692\dots$ и $\alpha = 2,5029\dots$). При этом сходимость в трехпериодичном окне (удвоение периода в виде $3 \cdot 2^n$) оказывается медленнее, чем при удвоении периода в виде $1 \cdot 2^n$. Интересно отметить, что универсальность констант Фейгенбаума может быть также использована для приближенного построения кривых фазовых переходов между разными модулированными фазами [10].

Итак, в данной работе исследовано циклическое окно периода три в антиферромагнитных моделях Поттса на решетке Бете и АИТЧВ на кактусе Хусими. Решетка Бете и ее обобщения являются приближением для стандартных решеток (приближение Бете–Пайерлса), которое значительно превосходит по точности приближение среднего поля. Для рациональных отображений, описывающих реальные статистические модели (Q -компонентную модель Поттса на решетке Бете и АИТЧВ на кактусе Хусими), исследован механизм перехода из хаотического режима в циклическое окно периода три посредством касательной бифуркации, за которой следует каскад

удвоения $3 \cdot 2^n$ ($n = 2, 3, \dots$). На фазовой диаграмме представлена трехпериодичная модулированная фаза обеих моделей. Рассчитаны показатели Ляпунова в трехпериодическом окне.

Работа поддерживалась грантами # ECSP-09-08-SASP NFSAT и PS-2497 ANSEF.

1. Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, М.: Мир, 1985 (R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, New-York, 1982); F. Y. Wu, Rev. Mod. Phys. **54**, 235 (1982); Н. С. Ананикян, А. З. Ахеян, ЖЭТФ **107**, 196 (1995).
2. R. F. S. Andrade and D. Cason, Phys. Rev. **B81**, 014204 (2010); T. Iharagi, A. Gendiar, H. Ueda et al., J. Phys. Soc. Jpn. **79**, 104001 (2010).
3. J. L. Monroe, J. Stat. Phys. **65**, 255 (1991); J. Phys. A **29**, 5421 (1996); Н. С. Ананикян, Н. Ш. Измаильян, Р. Р. Шербаков, Письма в ЖЭТФ **59**, 71 (1994); N. S. Anankian, R. R. Lusinians, and K. A. Organissyan, Pis'ma v ZhETF **61**, 482 (1995).
4. R. A. Zara and M. Pretti, J. Chem. Phys. **127**, 184902 (2007); M. Udagawa, H. Ishizuka, and Y. Motome, Phys. Rev. Lett. **104**, 226405 (2010); N. S. Anankian, S. K. Dallakian, N. Sh. Izmailian et al., Fractals **5**, 175 (1997).
5. T. R. Arakelyan, V. R. Ohanyan, L. N. Ananikyan et al., Phys. Rev. B **67**, 024424 (2003); L. N. Ananikyan, Int. J. Mod. Phys. B **21**, 755 (2007); V. V. Hovhannisyan and N. S. Ananikian, Phys. Lett. A **372**, 3363 (2008).
6. D. V. Gal'tsov and V. V. Dyadichev, Pis'ma v ZhETF **77**, 184 (2003); A. Y. Akheyen and N. S. Ananikian, J. Phys. A **25**, 3111 (1992); Н. С. Ананикян, А. З. Ахеян, Н. Г. Тер-Арутюнян-Саввиди, ТМФ **78**, 281 (1989).
7. D. V. Vagin and O. P. Polyakov, J. Magn. Magn. Mater. **320**, 3394 (2008); S. Ishii and M.-A. Sato, Neural Networks **10**, 941 (1997); D. M. Maranhao, M. S. Baptista, J. C. Sartorelli et al., Phys. Rev. E **77**, 037202 (2008).
8. N. Ananikian, L. Ananikyan, R. Artuso et al., Phys. Lett. A **374**, 4084 (2010); C. Anteneodo, R. N. P. Maia, and R. O. Vallejos, Phys. Rev. E **68**, 036120 (2003); N. S. Ananikian, L. N. Ananikyan, R. Artuso et al., Physica D **239**, 1723 (2009).
9. P. Manneville and Y. Pomeau, Phys. Lett. A **75**, 1 (1979); Physica D **1**, 219 (1980); A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, and M. K. Kurovskayaet, Phys. Rev. E **76**, 2 (2007); S. Chiriac, D. G. Dimitriu, and M. Sanduловiciu, Phys. Plasmas **14**, 072309 (2007).
10. L. N. Ananikyan, N. S. Ananikian, and L. A. Chakhmakhchyan, Fractals **18**, 371 (2010).
11. C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, Physica D **7**, 181 (1983).
12. S. Zambrano, I. P. Marino, and M. A. F. Sanjuán, New J. Phys. **11**, 023025 (2009).
13. А. П. Кузнецов, Н. В. Станкевич, Л. В. Тюрюкина, Письма в ЖТФ **34**, 68 (2008).
14. J. Guckenheimer, G. Oster, and A. Ipaktchi, J. Math. Biol. **4**, 101 (1977); W. B. Gordon, Math. Mag. **69**, 118 (1996); M. H. Lee, J. Math. Phys. **50**, 122702 (2009).
15. M. J. Feigenbaum, J. Stat. Phys. **19**, 25 (1978); **21**, 669 (1979); Е. Б. Бул, Я. Г. Синай, К. М. Ханин, УМН **39**, 3 (1984).