

# Стабилизация хаотических колебаний в системах с аттрактором гиперболического типа

А. Ю. Лоскутов<sup>1)</sup>, А. В. Попкова

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 119992 Москва, Россия

Поступила в редакцию 12 апреля 2011 г.

После переработки 14 мая 2011 г.

Показано, что хаотическая динамика систем, обладающих аттракторами, по своим свойствам близкими к гиперболическому типу, может быть стабилизирована посредством периодических параметрических возмущений.

**1. Введение.** Свойство гиперболичности, которое в той или иной степени присуще всем хаотическим системам, состоит в том, что касательное пространство  $\Sigma$  таких систем складывается из трех подпространств: устойчивого  $E^s$ , неустойчивого  $E^u$  и нейтрального  $E^0$ . Близкие траектории, соответствующие  $E^s$ , экспоненциально сходятся друг к другу при  $t \rightarrow \infty$ , а соответствующие  $E^u$  – при  $t \rightarrow -\infty$ . В подпространстве  $E^0$  векторы сжимаются или растягиваются медленнее, чем с экспоненциальной скоростью. Когда вдоль траектории степень сжатия и растяжения в подпространствах  $E^u$  и  $E^s$  меняется от точки к точке, системы называются неравномерно гиперболическими. Динамические системы с равномерно гиперболическостью всех траекторий называются системами Аносова.

Если рассматриваемая система диссипативна, т.е. имеет место сжатие фазового объема, то хаос обеспечивается наличием в фазовом пространстве хаотического аттрактора. Если это гиперболический аттрактор, то каждая траектория, принадлежащая такому аттрактору, будет обладать свойством гиперболичности. Гиперболический аттрактор структурно устойчив и имеет SRB-меру (т.е. меру Синая–Рюэля–Боуэна), а соответствующие динамические системы являются  $K$ -системами, для которых выполняются условия центральной предельной теоремы [1]. Это очень сильные статистические свойства. Поэтому системы с гиперболическими аттракторами можно рассматривать как случайные.

Странные (хаотические) аттракторы, которые наблюдаются в моделях реальных физических систем, обладают некоторой степенью гиперболичности. Однако эта гиперболичность имеет иную форму, нежели равномерная гиперболичность. Такие аттракторы действительно являются сложно устроенными мно-

жествами, но принадлежат к квазистохастическому типу (т.е. являются квазиаттракторами) (см. [2]).

Гиперболические множества были построены достаточно давно (см. [3]) и долгое время считалось, что системы с такой структурой фазового пространства являются абстрактными математическими конструкциями. Однако недавно были предложены физические модели, имеющие в фазовом пространстве притягивающие множества, обладающие свойствами гиперболичности [4]. Более того, такие множества можно исследовать экспериментально [5].

Как известно, последние 20 лет в теории сложных и хаотических систем одним из наиболее востребованных направлений является решение задачи управления хаотической динамикой и подавления хаоса при помощи внешних воздействий [6–8]. Исследования последних лет показали, что данная задача может быть решена для определенного класса динамических систем (см. [8] и приводимые там ссылки), однако важный вопрос о системах с гиперболическими аттракторами остается открытым. Это связано с тем, что такие аттракторы – грубые и их структура не может качественно меняться при слабых внешних воздействиях.

В данной работе изучается возможность стабилизации хаотических колебаний в динамических системах с аттракторами, близкими по своим свойствам к аттракторам гиперболического типа.

**2. Системы с гиперболическими аттракторами.** Множество  $\Lambda$  называется гиперболическим аттрактором динамической системы, если  $\Lambda$  – замкнутое топологически транзитивное гиперболическое множество и существует окрестность  $U \supset \Lambda$ , такая, что  $\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} f^n(U)$ . Гиперболический аттрактор является структурно устойчивым (грубым) подмножеством.

В настоящее время гиперболических аттракторов обнаружено немного. К хорошо известным ат-

<sup>1)</sup> e-mail: loskutov@chaos.phys.msu.ru

тракторам такого типа относятся соленоид Смейла–Вильямса (см., например, [3, 9, 10]) и аттрактор Плыкина [11, 12]. К аттракторам, которые по своим свойствам близки к гиперболическим, принадлежат аттрактор Белых [13] и аттрактор Лози [9, 13].

Конструкция Смейла–Вильямса топологически наиболее проста. Аттрактор получается посредством отображения тороидальной области в себя, которое рассматривается в пространстве размерности три или больше. В трехмерном пространстве тороидальная область задается как  $\mathbf{T} = S^1 \times D^2$ , где  $S^1$  – единичная окружность, а  $D^2$  – единичный диск в  $\mathbb{R}^2$ . Тогда преобразование  $f : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ ,

$$f(x, y, \varphi) = \left( \frac{1}{k}x + \frac{1}{2} \cos \varphi, \frac{1}{k}y + \frac{1}{2} \sin \varphi, 2\varphi \right), \quad (1)$$

где значение  $k > 2$  определяет степень сжатия тора “по толщине”, задает соленоид как подмножество  $\mathbf{T} \subset \mathbb{R}^3$  (рис. 1а). Рассмотрим сечение облас-

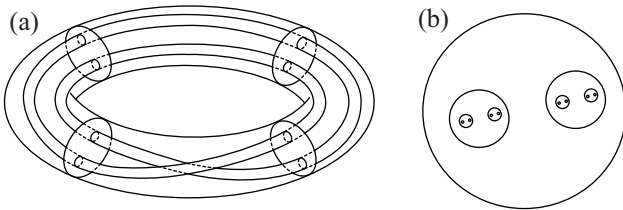


Рис. 1. Построение аттрактора Смейла–Вильямса

ти  $\mathbf{T}$  некоторой двумерной плоскостью  $\Pi$ . Тогда получим два диска радиуса  $1/k$ . При этом, очевидно,  $f^2(\mathbf{T}) \subset f(\mathbf{T})$ .

При итерациях отображения (1) картина будет повторяться на все меньших и меньших масштабах (рис. 1б). В результате в сечении множество  $f^m(\mathbf{T})$  будет состоять из  $2^m$  дисков. При  $t \rightarrow \infty$  получим аттрактор Смейла–Вильямса.

2.1. Система связанных осцилляторов. В работах [14, 15] (см. также [4]) были построены физические модели, имеющие в фазовом пространстве множество, обладающее свойствами аттрактора типа Смейла–Вильямса. Одна из таких систем имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \nu y_1 + \left( 1 - q + \frac{1}{2}p - \frac{1}{50}p^2 \right) x_1 + \alpha x_2 y_2, \\ \dot{y}_1 &= -\nu x_1 + \left( 1 - q + \frac{1}{2}p - \frac{1}{50}p^2 \right) y_1, \\ \dot{x}_2 &= \nu y_2 + (p - 1)x_2 + \alpha x_1, \\ \dot{y}_2 &= -\nu x_2 + (p - 1)y_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Она является модифицированной моделью “хищник–жертва” с параметром связи  $\alpha$ . Здесь динамические

переменные  $x_i, y_i, i = 1, 2$ , отвечают первой и второй парам взаимодействующих подсистем (осцилляторов), соответственно,  $\nu$  – характерная частота и  $q = x_1^2 + y_1^2, p = x_2^2 + y_2^2$ .

В работах [15, 16] представлены результаты исследований, которые показывают, что для системы (2) выполнены т.н. условия конусов, гарантирующие гиперболичность (см. [4]). Однако важно отметить, что этот вывод основан только на численном анализе и строгих доказательствах существования гиперболических аттракторов в настоящее время нет.

2.2. Отображение Белых. Другая система с аттрактором, который можно отнести к гиперболическому типу, возникает при исследовании дискретных сетей фазовой синхронизации [17] в некоторых радиопизических моделях. Эта система известна как отображение Белых [11, 18]. Она вводится следующим образом.

Пусть  $Q = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$  – квадрат на плоскости  $(xy)$ . Рассмотрим преобразование  $T : (x, y) \mapsto f(x, y)$ ,

$$f(x, y) = \begin{cases} \left[ \lambda_1(x + 1) - 1, \frac{1}{\lambda_2}(y + 1) - 1 \right], & (x, y) \in Q_1, \\ \left[ \lambda_3(x - 1) + 1, \frac{1}{\lambda_4}(y - 1) + 1 \right], & (x, y) \in Q_2, \end{cases} \quad (3)$$

где области  $Q_1, Q_2$  получаются разделением исходного квадрата  $Q$  некоторой функцией  $h(x) : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  на две части:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{(x, y) \in Q : y < h(x)\}, \\ Q_2 &= \{(x, y) \in Q : y > h(x)\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Кроме того, допустим, что постоянные  $\lambda_i$  и функция  $h(x)$  выбраны так, что под действием преобразования  $T$  квадрат  $Q$  отображается в себя,  $TQ \subset Q$  (рис. 2).

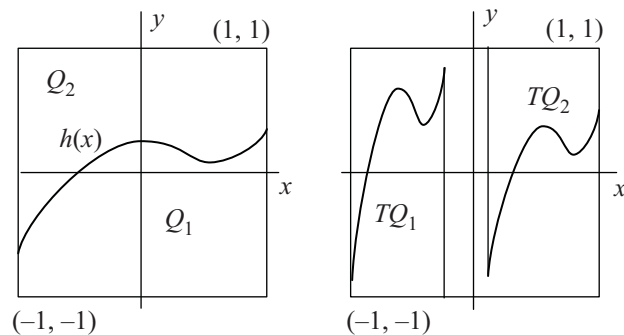


Рис. 2. Отображение Белых (3), (4)

Полученная конструкция (3), (4) называется отображением Белых.

Для дальнейшего рассмотрения ограничимся в (4) линейной функцией вида  $h(x) = ax$ , выберем  $\lambda_1 = \lambda_3$ ,  $1/\lambda_2 = 1/\lambda_4$  и переобозначим  $\lambda_2 \equiv 1/\lambda_2$ . Тогда отображение Белых можно переписать в виде

$$T : (x, y) \mapsto f(x, y),$$

$$f(x, y) = \begin{cases} [\lambda_1(x+1) - 1, \lambda_2(y+1) - 1], & y < ax, \\ [\lambda_1(x-1) + 1, \lambda_2(y-1) + 1], & y > ax, \end{cases} \quad (5)$$

для которого  $|a| < 1$ . Отображение (5) замечательно тем, что оно обладает аттрактором гиперболического типа. Оно является типичным представителем динамических систем с особенностями. При условии, что множество точек разрыва имеет нулевую меру, и некоторых других допущениях (см. [18]) можно получить строгие результаты, касающиеся разрывных динамических систем. В частности, для каждой регулярной точки возможно сформировать устойчивое и неустойчивое многообразия. Кроме того, опираясь на конкретный вид множества точек разрыва, удается построить эргодическую инвариантную меру.

Нетрудно найти условия существования гиперболического аттрактора для отображения Белых [19]. Для этого, во-первых, заметим, что при  $|a| < 1$  это отображение имеет две неподвижные точки,  $X = (1, 1)$  и  $Y = (-1, -1)$ . Во-вторых, для всех точек квадрата, где определено отображение (5), производная равна  $Df = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$ . Для гиперболическости необходимо, чтобы  $|\lambda_1| < 1$ ,  $|\lambda_2| > 1$  (или наоборот) и  $TQ \subset Q$ . Легко проверить, что последнее неравенство удовлетворяется, только если  $0 < \lambda_1 < 1$ ,  $0 < \lambda_2 < 2/(1+|a|)$ ,  $|a| < 1$ . Наконец, для выполнения условия существования аттрактора гиперболического типа требуется, чтобы преобразование  $T$  было взаимно однозначным (т.е. гомеоморфизмом). Это требование автоматически удовлетворяется, если  $0 < \lambda_1 < 1/2$ .

В результате для гиперболическости аттрактора в отображении Белых (5) получаем следующую систему неравенств:

$$1) 0 < \lambda_1 < \frac{1}{2}; \quad 2) 1 < \lambda_2 < \frac{2}{1+|a|}; \quad 3) |a| < 1. \quad (6)$$

**3. Внешние возмущения и подавление хаоса.** В данном параграфе рассмотрена возможность стабилизации хаотической динамики в системах (2), (5) с гиперболическим типом аттрактора.

**3.1. Параметрически возмущенная система связанных осцилляторов.** Идея стабилизации хаотического поведения в модели (2) основана на введении

периодического возмущения в области  $A_c$  значений параметров, отвечающих существованию хаоса. В этом случае известно [8, 20], что для некоторых классов систем существует подмножество  $A_d \subset A_c$ , такое, что если  $\alpha \in A_d$ , то возмущенная система будет обладать устойчивой динамикой.

В модели (2) имеются только два параметра — характерная частота и свободный параметр связи. Для исследования возможности стабилизации зафиксируем  $\nu = 2\pi$ , а параметр  $\alpha$  оставим свободным.

Численные исследования выявили, что в интервале  $0 < \alpha < 0.57$  значения максимального показателя Ляпунова  $\lambda_{\max}$  (рис. 3) являются положительными.

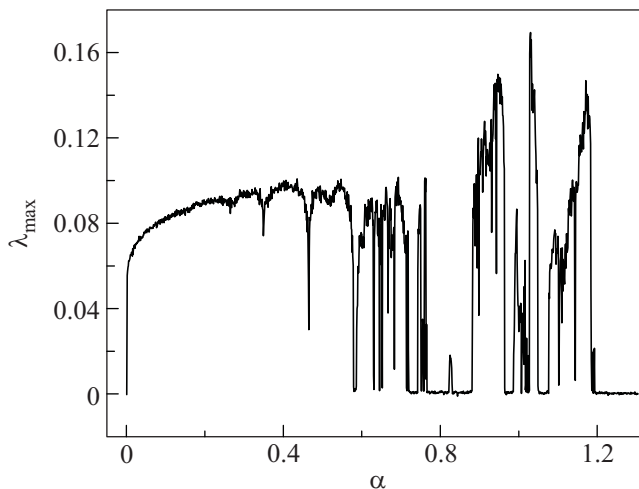


Рис. 3. Значения старшего показателя Ляпунова  $\lambda_{\max}$  в зависимости от параметра  $\alpha$  в системе (2)

Таким образом,  $A_c = (0; 0.57)$ . На рис. 4а, б показаны фазовый портрет системы (2) и соответствующая спектральная плотность. Видно, что динамика системы имеет явно выраженный хаотический характер. Тот же вывод следует из анализа других критериев хаотичности (отображения Пуанкаре и энтропии).

Введем параметрическое возмущение вида

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \sin \omega t, \quad (7)$$

где  $\alpha_1$  и  $\omega$  — амплитуда и частота возмущения. При этом необходимо, чтобы с течением времени значение  $\alpha$  оставалось в области хаотичности  $A_c$ . Следовательно,  $\alpha_0 = (\alpha_{\max} + \alpha_{\min})/2$ ,  $\alpha_1 < (\alpha_{\max} - \alpha_{\min})/2$ , где  $\alpha_{\max}$  и  $\alpha_{\min}$  — граничные значения области  $A_c$ . Теперь, варьируя  $\alpha_1$  и  $\omega$ , найдем области, где имеет место параметрическое подавление хаоса.

Как показывает численное моделирование, при определенных значениях параметров возмущения, например  $\omega = 4.53\pi$  и  $\alpha_1 = 0.21$ , хаотическое поведение системы вырождается в регулярное: вмес-

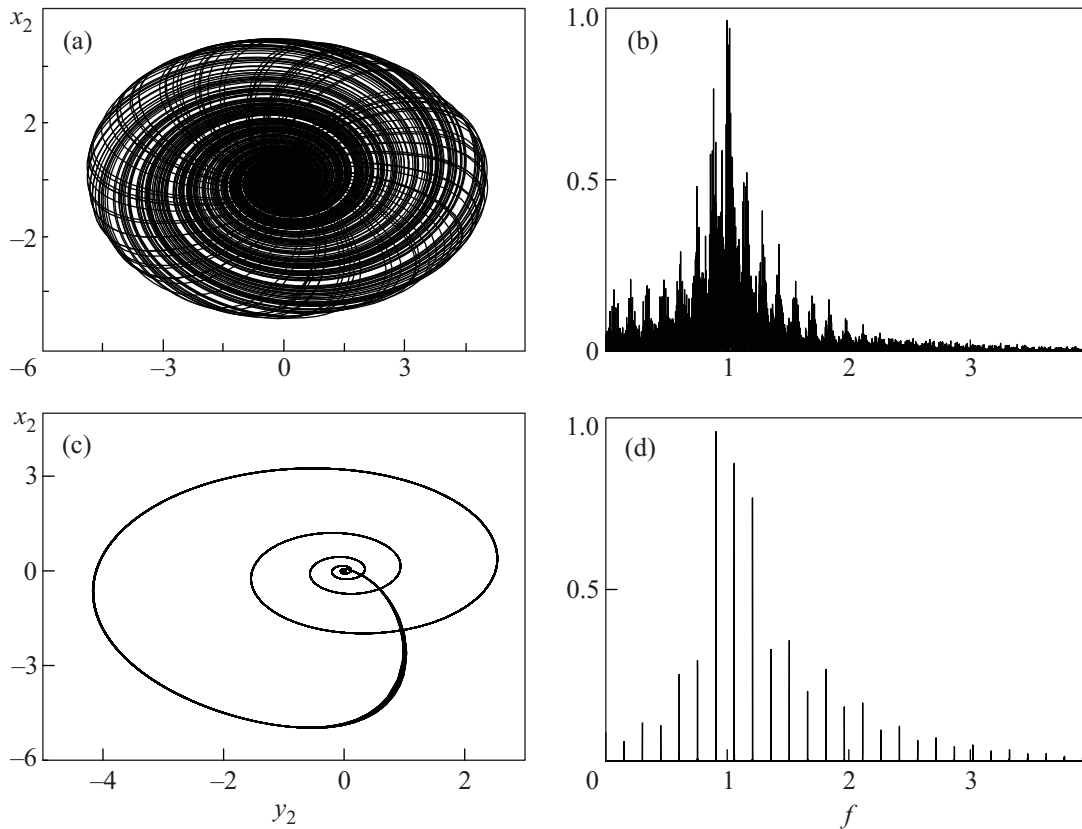


Рис. 4. Фазовый портрет и спектральная плотность в системе (2) при  $\alpha = 0.285$  (a), (b) и при параметрическом воздействии (7),  $\alpha_0 = 0.285$ ,  $\alpha_1 = 0.21$ ,  $\omega = 4.53\pi$  (c), (d)

то характерной хаотической траектории (рис. 4a) в фазовом пространстве наблюдается устойчивый предельный цикл (рис. 4c). Этот вывод подтверждает расчет спектральной плотности (рис. 4b, d), отображения Пуанкаре и показателей Ляпунова.

Анализ пространства параметров возмущения  $(\alpha_1, \omega)$  позволил выявить области стабилизации (рис. 5). Видно, что эта область представляет собой типичный язык синхронизации (язык Арнольда [8]). Справа на рисунке показаны соответствующие значения показателя Ляпунова. Минимальное значение амплитуды, ниже которого стабилизации хаотической динамики в системе (2), (7) не наблюдается, равно  $\alpha_1 \simeq 0.190$ . Ниже этого порога в системе появляется режим с перемежаемостью, который проявляется в очень узком диапазоне:  $0.189 < \alpha_1 < 0.190$ . Таким образом, параметрическое возмущение (7) системы (2) приводит к стабилизации динамики и вырождению гиперболического хаоса.

**3.2. Отображение Белых с возмущением.** Для того чтобы изучить возможность подавления хаоса в отображении (5), (6), необходимо прежде его обобщить на случай  $|a| > 1$  [21]. При выполнении этого

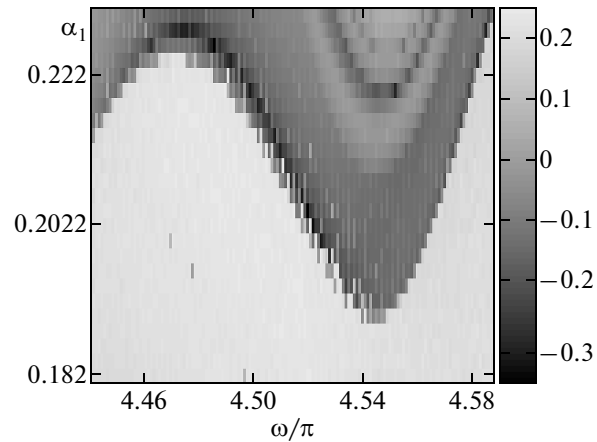


Рис. 5. Область стабилизации в системе (2), (7)

неравенства неподвижная точка  $X$  попадает уже в область  $y < ax$ , а точка  $Y$  — в область  $y > ax$ . Поэтому перепишем отображение Белых (5) как

$$T: (x, y) \mapsto \begin{cases} [\lambda_1(x + 1) - 1, \lambda_2(y + 1) - 1], & y > ax, \\ [\lambda_1(x - 1) + 1, \lambda_2(y - 1) + 1], & y < ax. \end{cases} \quad (8)$$

Это отображение получается из исходного (5) посредством замены  $x \leftrightarrow y$  и  $a = 1/a'$ . Значит, для выполнения условий гиперболичности необходимо выполнение следующих неравенств:

$$1) 0 < \lambda_2 < 1/2; 2) 1 < \lambda_1 < 2/(1 + 1/|a|); 3) |a| > 1.$$

Отметим, что теперь, в отличие от отображения (5), выполняется  $|\lambda_2| < 1$  и  $|\lambda_1| > 1$ . Иными словами, сжимающее и растягивающее направления меняются местами.

Пусть параметр  $a$  отображения Белых циклически возмущается с периодом 2. Для того чтобы найти качественное изменение в динамике такого отображения, необходимо переключать параметр  $a$  вблизи значения  $a = 1$  таким образом, чтобы  $a_1 < 1$ ,  $a_2 > 1$ . Кроме того, для выполнения условий гиперболичности для возмущенного отображения как при  $a_1 < 1$ , так и при  $a_2 > 1$  требуется, чтобы изменялись также и параметры  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ . Учитывая эти условия, представим отображение Белых в виде:

$$\bar{T} = \begin{cases} (x, y) \mapsto f(a_2, \lambda_1^2, \lambda_2^2) \circ f(a_1, \lambda_1^1, \lambda_2^1)(x, y), \\ (x, y) \mapsto f(a_1, \lambda_1^1, \lambda_2^1) \circ f(a_2, \lambda_1^2, \lambda_2^2)(x, y) \end{cases} \quad (9)$$

для четных и нечетных итераций, соответственно.

Далее, поскольку как для  $a_1 < 1$ , так и для  $a_2 > 1$  отображение Белых имеет неподвижные точки  $X = (1, 1)$  и  $Y = (-1, -1)$ , эти точки останутся неподвижными также и для отображения (9). Более того, дифференциал  $D\bar{T}$  возмущенного отображения (в случае четных и нечетных итераций) определяется как

$$\begin{aligned} D\bar{T} &= \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1^2 \lambda_1^1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \lambda_2^1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1^* & 0 \\ 0 & \lambda_2^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Вследствие того что для  $a_1 < 1$  выполняются неравенства  $0 < \lambda_1^1 < 1/2$ ,  $1 < \lambda_2^1 < 2/(1 + |a_1|)$ , а для  $a_2 > 1$  – неравенства  $1 < \lambda_1^2 < 2/(1 + |a_2|)$ ,  $0 < \lambda_2^2 < 1/2$  собственные значения  $\lambda_1^*$  и  $\lambda_2^*$  матрицы  $D\bar{T}$  будут изменяться в диапазоне  $0 < \lambda_1^* < 1/(1 + |a_2|)$ ,  $0 < \lambda_2^* < 1/(1 + |a_1|)$ . Иначе говоря,  $|\lambda_1^*| < 1$ ,  $|\lambda_2^*| < 1$  и неподвижные точки  $X$ ,  $Y$  отображения (8) становятся устойчивыми. Это означает, что в результате возмущения гиперболический аттрактор вырождается и сменяется простым аттрактором.

**4. Заключительные замечания.** Гиперболические аттракторы — это структурно устойчивые

(грубые) подмножества. Малые возмущения систем с такими аттракторами не могут качественно изменить как сам гиперболический аттрактор, так и динамику систем. Более того, рассмотренный в п. 1 аттрактор типа Смейла–Вильямса в отображении Пуанкаре соответствует растягивающему одномерному отображению [4, 15]. Известно, что посредством слабых периодических параметрических возмущений в таких отображениях невозможно подавить хаос.

Однако, как показано в данной работе, в некоторых случаях параметрические возмущения могут приводить к качественному изменению в динамике систем и вырождению гиперболических аттракторов в устойчивые неподвижные точки или предельные циклы. Данный результат можно интерпретировать так: вносимые возмущения не являются малыми для данного типа аттрактора или аттрактор в выбранной области не принадлежит к строго гиперболическому типу.

Полученные результаты позволяют утверждать, что системы не только с хаотическими (в широком смысле, см. введение) аттракторами, но также и с гиперболическими притягивающими подмножествами могут быть выведены на регулярный режим эволюции при помощи внешних параметрических возмущений.

Авторы благодарят С.П. Кузнецова и А.Р. Джаноева за плодотворные дискуссии.

1. Я. Г. Синай, Успехи матем. наук **46**, 147 (1991).
2. А. Ю. Лоскутов, Успехи физ. наук **180**, 1305 (2010).
3. С. Смейл, Успехи матем. наук **25**, 113 (1970).
4. С. П. Кузнецов, Успехи физ. наук **181**, 121 (2011).
5. С. П. Кузнецов, Е. П. Селезнев, ЖЭТФ **129**, 400 (2006).
6. S. Boccaletti, C. Grebogi, Y.-C. Lai, and H. Mancini, Phys. Rep. **329**, 103 (2000).
7. R. Chacón, Phys. Rev. Lett. **86**, 1737 (2001).
8. А. Ю. Лоскутов, А. С. Михайлов, *Основы теории сложных систем*, Москва-Ижевск: Рег. и хаотич. динамика, 2007.
9. В. С. Афраймович, Об аттракторах. – В кн. *Нелинейные волны. Динамика и эволюция* (Ред. А. В. Гапонов-Грехов, М. И. Рабинович), М.: Наука, 1989, с. 16.
10. А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в теорию динамических систем*, М.: МЦНМО, 2005.
11. Р. В. Плыкин, Е. А. Сатаев, С. В. Шлячков, в кн. *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления*. **66**, 100 (М.: ВИНТИ, 1991).
12. Р. В. Плыкин, Успехи матем. наук **39**, 75 (1984).
13. Я. Г. Синай, *Современные проблемы эргодической теории*, М.: Наука, 1995.
14. S. P. Kuznetsov, Phys. Rev. Lett. **95**, 144101 (2005).

15. S. P. Kuznetsov and A. Pikovsky, *Physica D* **232**, 87 (2007).
16. S. P. Kuznetsov and I.R. Sataev, *Phys. Lett. A* **365** 97 (2007).
17. В. П. Белых, в сб. *Системы фазовой синхронизации*. (Ред. В. В. Шахгильдян, Л. Н. Белюстина), М.: Радио и связь, 1982, с. 161.
18. Л. А. Бунимович, в сб. *Динамические системы*, т. 2. М.: ВИНТИ, 1985, с. 173.
19. A. Loskutov, *Discrete and Cont. Dyn. Syst.* **6**, 1157 (2006).
20. А. Ю. Лоскутов, А. И. Шишмарев, *Успехи матем. наук* **48**, 169 (1993).
21. A. Loskutov and S. D. Rybalko, in: *Difference Equations and Applications*, Taylor and Francis Publ., London, 2002, p. 207.