Письма в ЖЭТФ, том 94, вып. 3, с. 262 – 266

О двумерном уравнении Шредингера в магнитном поле с дополнительным квадратичным интегралом движения

В. Г. Марихин[1)]

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 14 июня 2011 г.

Рассмотрена задача о коммутирующих квадратичных квантовых операторах с магнитным полем. Показано, что любая такая пара может быть приведена к канонической форме, которая позволяет построить почти полную классификацию решений уравнений, необходимых и достаточных для того, чтобы пара операторов коммутировала. Переход к канонической форме осуществляется заменой переменных, приводящей к переменным типа Ковалевской, аналогичной той, которая возникает в теории интегрируемых волчков. В качестве примера мы рассмотрим данную процедуру для двумерного уравнения Шредингера в магнитном поле, обладающего дополнительным квадратичным интегралом движения.

1. Пары коммутирующих квадратичных операторов. Задача об интегрируемых случаях двумерного уравнения Шредингера в магнитном поле имеет уже довольно давнюю историю (см., например, [1]), но до сих пор не исследована до конца.

С появлением современных методов интегрируемых систем были рассмотрены разные аспекты исследуемой задачи. Например, в работе [2] был исследован класс решений (конечнозонных) уравнения Шредингера с магнитным полем (см. также [3]). В работе [1] для решения данной задачи применялся метод факторизации (см. также ссылки в этой работе).

Задача об уравнении Шредингера в магнитном поле с дополнительным линейным и дополнительным квадратичным интегралами движения рассматривалась, например, в работе [4] (см. также цитированные там работы). В этой работе был получен ряд интересных примеров таких уравнений в различных системах координат. Однако используемый подход едва ли может претендовать на полную классификацию таких систем. Мы используем переход к переменным типа Ковалевской и получаем каноническую форму квадратичных коммутирующих операторов. Классификация в этой системе координат на данный момент почти полна, и есть надежда довести ее до конца. Обратный переход к уравнению Шредингера осуществляется возвратом к оригинальным переменным.

Рассмотрим задачу о коммутирующих парах квантовых операторов в магнитном поле, квадратичных по операторам импульса, $[H,K]=0$. Наиболее общий вид таких пар:

$$\hat{H} = a_1(q_1,q_2)\hat{p}_1^2 + 2b_1(q_1,q_2)\hat{p}_1\hat{p}_2 + c_1(q_1,q_2)\hat{p}_2^2 + \tag{1}$$

$$+d_1(q_1,q_2)\hat{p}_1 + e_1(q_1,q_2)\hat{p}_2 + f_1(q_1,q_2),$$

$$\hat{K} = a_2(q_1,q_2)\hat{p}_1^2 + 2b_2(q_1,q_2)\hat{p}_1\hat{p}_2 + c_2(q_1,q_2)\hat{p}_2^2 +$$

$$+d_2(q_1,q_2)\hat{p}_1 + e_2(q_1,q_2)\hat{p}_2 + f_2(q_1,q_2),$$

где $\hat{p}_1 = -i\hbar\partial_{q_1}$, $\hat{p}_2 = -i\hbar\partial_{q_2}$. Мы удерживаем во всех формулах постоянную Планка $\hbar$ для того, чтобы иметь возможность провести переход к классическому случаю, который был рассмотрен в работе [5] (см. также цитируемые там работы), и в некоторых случаях производить построение решений получающихся уравнений по степеням $\hbar$.

Диагонализуем одновременно пару H и K, т.е. оператор $K-sH$, где s – параметр [5, 6]. Очевидно, что для этого должно быть справедливо уравнение на s:

$$\Phi(q_1,q_2,s) \equiv (b_2 - s\,b_1)^2 - (a_2 - s\,a_1)(c_2 - s\,c_1) = 0. \tag{2}$$

Решая квадратное уравнение (2), получаем в общем случае два корня: $s_1(q_1,q_2), s_2(q_1,q_2)$. Мы будем называть систему (1) невырожденной, если якобиан $D(s_1,s_2)/D(q_1,q_2) \neq 0$. Любая невырожденная система вида (1) может быть приведена заменой переменных $(q_1,q_2) \to (s_1,s_2)$ и калибровочным преобразованием $H \to g^{-1}H\,g$, $K \to g^{-1}K\,g$ к каноническому виду (для упрощения записи мы делаем замену $s_1 = x$, $s_2 = y$):

$$H = \hat{\pi}_1 \frac{S_1(x)}{x-y}\hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_2 \frac{S_2(y)}{x-y}\hat{\pi}_2 + \frac{U_1 - U_2}{x-y}, \tag{3}$$

$$K = \hat{\pi}_1 \frac{y\,S_1(x)}{x-y}\hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_2 \frac{x\,S_2(y)}{x-y}\hat{\pi}_2 - \tag{4}$$

[1)]e-mail: mvg@itp.ac.ru

$$-S_1(x)A_1\hat{\pi}_1-\hat{\pi}_1S_1(x)A_1-S_2(y)A_2\hat{\pi}_2-\hat{\pi}_2S_2(y)A_2-$$

$$-S_1(x)A_1^2-S_2(y)A_2^2+\frac{y\,U_1-x\,U_2}{x-y},$$

где

$$\pi_1=-i\hbar\partial_x-A_1,\ \pi_2=-i\hbar\partial_y-A_2,$$

$$A_1=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{S_2(y)}}{\sqrt{S_1(x)}}\frac{Z_y}{x-y},\ A_2=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{S_1(x)}}{\sqrt{S_2(y)}}\frac{Z_x}{x-y}.$$

Здесь $Z=Z(x,y)$ – функция двух переменных и

$$U_1=V_1+\hbar^2\times$$

$$\times\left[-\frac{1}{4}S_1''(x)+\frac{1}{16}\frac{(S_1'(x))^2}{S_1(x)}+\frac{1}{2}\frac{S_1'(x)}{x-y}-\frac{3}{4}\frac{S_1(x)}{(x-y)^2}\right],$$

$$U_2=V_2+\hbar^2\times$$

$$\times\left[-\frac{1}{4}S_2''(y)+\frac{1}{16}\frac{(S_2'(y))^2}{S_2(y)}-\frac{1}{2}\frac{S_2'(y)}{x-y}-\frac{3}{4}\frac{S_2(y)}{(x-y)^2}\right],$$

где

$$V_1=\frac{1}{2}\sqrt{S_1(x)}\partial_x\left[\sqrt{S_1(x)}\frac{Z_x^2}{x-y}\right]+f_1(x),$$

$$V_2=-\frac{1}{2}\sqrt{S_2(y)}\partial_y\left[\sqrt{S_2(y)}\frac{Z_y^2}{x-y}\right]+f_2(y).$$

Введем функцию $Q=\frac{V_1^q-V_2^q}{x-y}$, где

$$V_1^q=V_1+\hbar^2\left[\frac{1}{8}\frac{S_1'(x)}{x-y}-\frac{5}{16}\frac{S_1(x)}{(x-y)^2}\right],$$

$$V_2^q=V_2+\hbar^2\left[-\frac{1}{8}\frac{S_2'(y)}{x-y}-\frac{5}{16}\frac{S_2(y)}{(x-y)^2}\right],$$

и функции

$$R_1=\hbar^2\Big[-\frac{1}{4}\partial_x\frac{\sqrt{S_1(x)}}{x-y}\partial_x\frac{\sqrt{S_1(x)}}{x-y}\partial_xZ+$$

$$+\frac{3}{8}\partial_x\frac{S_1(x)}{(x-y)^3}\partial_xZ+\frac{3}{16}\frac{4S_1(x)-(x-y)S_1'(x)}{(x-y)^4}\partial_xZ\Big],$$

$$R_2=\hbar^2\Big[-\frac{1}{4}\partial_y\frac{\sqrt{S_2(y)}}{x-y}\partial_y\frac{\sqrt{S_2(y)}}{x-y}\partial_yZ-$$

$$-\frac{3}{8}\partial_y\frac{S_2(y)}{(x-y)^3}\partial_yZ+\frac{3}{16}\frac{4S_2(y)+(x-y)S_2'(y)}{(x-y)^4}\partial_yZ\Big].$$

Пара (3), (4) коммутирует тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

$$Z_{x,y}=\frac{Z_x-Z_y}{2(y-x)},\tag{5}$$

$$Z_xQ_y-Z_yQ_x+R_1-R_2=0.\tag{6}$$

Доказательство этого утверждения состоит в прямом вычислении. Для начала заметим, что производные преобразуются следующим образом:

$$(q_1,q_2)\to(s_1,s_2):\tag{7}$$

$$\partial_{q_1}=-\left(\frac{\Phi^1_{q_1}}{\Phi^1_{s_1}}\partial_{s_1}+\frac{\Phi^2_{q_1}}{\Phi^2_{s_2}}\partial_{s_2}\right),$$

$$\partial_{q_2}=-\left(\frac{\Phi^1_{q_2}}{\Phi^1_{s_1}}\partial_{s_1}+\frac{\Phi^2_{q_2}}{\Phi^2_{s_2}}\partial_{s_2}\right),$$

где $\Phi^i=\Phi(s_i,q_1,q_2)$.

Нетрудно убедиться, что при таком преобразовании перекрестных членов вида $(\partial_{s_1}\partial_{s_2})$ в преобразованных операторах H,K нет, а главные (квадратичные) члены имеют такой же вид, как в (3). Функции S_i можно вычислить по формуле (в которой переменные q_i нужно выразить через s_i)

$$S_i(s_i)=\frac{1}{(\Phi^i_{s_i})^2}[(a_1s_i-a_2)(\Phi^i_{q_1})^2+\tag{8}$$

$$+2(b_1s_i-b_2)\Phi^i_{q_1}\Phi^i_{q_2}+(c_1s_i-c_2)(\Phi^i_{q_2})^2].$$

Линейные по производным члены можно привести к виду (3) выбором калибровки. Остальные члены фиксируются, так же как и уравнения на функции $S_1(s_1)$, $S_2(s_2)$, $Z(s_1,s_2)$, $f_1(s_1)$, $f_2(s_2)$. Снова делаем замену $s_1=x$, $s_2=y$. Утверждение доказано. Конечно, функции $Z(x,y)$, $f_1(x)$, $f_2(y)$ можно выразить через коэффициенты начальной пары H,K (1). Однако получающиеся выражения слишком громоздки и мало пригодны для явных вычислений. Их целесообразно проводить отдельно в каждом конкретном случае. Вместе с тем, сформулированное утверждение гарантирует возможность преобразования любой невырожденной пары к каноническому виду (3), (4). В дальнейшем мы будем исследовать именно пары вида (3), (4).

2. Примеры. Рассмотрим примеры решений пары уравнений (5), (6), т.е. примеры коммутирующих канонических квадратичных пар операторов (3), (4). Мы не будем подробно останавливаться на методах решения уравнений (5), (6), поскольку они решаются практически так же, как и в классическом случае [5], с учетом квантовых поправок. Поэтому приведем только список таких пар (мы пользуемся условными названиями этих систем; как правило, в классическом пределе они соответствуют интегрируемым волчкам в канонических переменных [7] или аналогичным системам).

Рассмотрим прежде всего симметричный случай:

$$S_1(x)=S_2(x)=S(x),\ f_1(x)=f_2(x)=f(x).$$

1. Случай Шоттки–Манакова:

$$Z = (x+y)\delta, \quad S(x) = \sum_{j=0}^{N} s_j x^j, \quad N = 0, \ldots, 6,$$

$$f(x) = -\frac{1}{40}(\hbar^2 + \delta^2)S''(x) + f_2 x^2 + f_1 x + f_0.$$

При $\delta = \pm i\hbar$ имеем еще решения (чисто квантовый случай): для любого $S(x)$

$$f(x) = f_2 x^2 + f_1 x + f_0$$

2. Случай Ландау (постоянное магнитное поле):

$$Z = z_0(x-y)^2, \quad S(x) = \sum_{j=0}^{N} s_j x^j, \quad N = 0, \ldots, 3,$$

$$f(x) = -4z_0^2 S(x) + f_1 x + f_0.$$

3. "Корневой" пример:

$$Z = q\sqrt{x-\mu}\sqrt{y-\mu}, \quad S(x) = \frac{P(x)}{x-\mu},$$

$$P(x) = s_0 \prod_{j=1}^{N} (x - x_j), \quad N = 0, \ldots, 6,$$

$$f(x) = -\frac{1}{16}\frac{(5\hbar^2 + 3q^2)P(\mu)}{(x-\mu)^3} - \frac{1}{16}\frac{(3\hbar^2 + 2q^2)P'(\mu)}{(x-\mu)^2} +$$

$$+\frac{f_{-1}}{x-\mu} - \hbar^2 \left[\frac{5}{16}s_0 x^3 - \frac{3}{16}s_0 x^2 \left(\sum_{j=1}^{N} x_j - \mu\right)\right]\delta_{N,6} -$$

$$-\hbar^2 \frac{3}{16} s_0 x^2 \delta_{N,5} + f_1 x + f_0.$$

При $q = \pm 2i\hbar$ получаем чисто квантовый случай: для любого $S(x)$

$$Z = \pm 2i\hbar\sqrt{x-\mu}\sqrt{y-\mu},$$

$$f(x) = \hbar^2 \frac{5}{16}\frac{S(x)}{(x-\mu)^2} + \frac{-(\hbar^2/8)S'(x) + k_{-1}}{x-\mu} + f_1 x + f_0.$$

4. Случай Стеклова

$$Z = q\left[\frac{1}{2}(x+y) + \sqrt{x}\sqrt{y}\right],$$

$$S(x) = xP(x) + x^{3/2}Q(x),$$

$$P(x) = p_3 x^3 + p_2 x^2 + p_1 x + p_0, \; Q(x) = q_2 x^2 + q_1 x + q_0,$$

$$f(x) = -\frac{1}{16}q^2 \frac{P(x)}{x} - \frac{q^2}{32\sqrt{x}}Q(x) +$$

$$+f_1 x + f_q\sqrt{x} + f_0 - \hbar^2\left(\frac{3}{16}p_3 x^2 + \frac{1}{8}q_2 x^{3/2}\right).$$

5. Обобщенный случай Стеклова I:

$$Z = \sum_{i=1}^{N} q_i \sqrt{x-\mu_i}\sqrt{y-\mu_i}, \quad S(x) = s_0 \prod_{i=1}^{N}(x-\mu_i),$$

$$f(x) = -\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{N} q_i^2 \frac{S'(\mu_i)}{x-\mu_i}, \quad N = 1, 2, 3.$$

6. Обобщенный случай Стеклова II:

$$Z = q(\sqrt{x-\mu_1}\sqrt{y-\mu_1}) + \sqrt{x-\mu_2}\sqrt{y-\mu_2}),$$

$$S(x) = (x-\mu_1)(x-\mu_2)P(x) + (x-\mu_1)^{3/2}(x-\mu_1)^{3/2}Q(x),$$

$$P(x) = p_3 x^3 + p_2 x^2 + p_1 x + p_0, \; Q(x) = q_2 x^2 + q_1 x + q_0,$$

$$f(x) = \frac{q^2}{16}(\mu_2 - \mu_1)\left[\frac{P(\mu_1)}{x-\mu_1} - \frac{P(\mu_2)}{x-\mu_2}\right] +$$

$$+\frac{q^2}{32}(\mu_2-\mu_1)\sqrt{x-\mu_1}\sqrt{x-\mu_2}\left[\frac{Q(\mu_1)}{x-\mu_1} - \frac{Q(\mu_2)}{x-\mu_2}\right] +$$

$$+k_2\sqrt{x-\mu_1}\sqrt{x-\mu_2} + k_1 x + k_0 -$$

$$-\frac{\hbar^2}{16}\big(p_3 x^2[5x - 3(\mu_1+\mu_2)] + 3p_2 x^2 +$$

$$+\sqrt{x-\mu_1}\sqrt{x-\mu_2}\{5q_2 x^2 + [3q_1 - 2q_2(\mu_1+\mu_2)]x\}\big).$$

Несимметричный случай.

7. В этом случае имеем

$$Z = q(\sqrt{x-\mu_1}\sqrt{y-\mu_1} - \sqrt{x-\mu_2}\sqrt{y-\mu_2}),$$

$$S_{1,2} = WH \pm MH^{3/2},$$

$$f_{1,2} = 4\frac{W}{H} \mp 2MH^{-1/2} \pm aH^{1/2} + f^{\hbar} \pm f_a^{\hbar},$$

где

$$H = h_2(x-\mu_1)(x-\mu_2), \quad h_2 = \frac{8}{q(\mu_1-\mu_2)},$$

$$W = w_3 x^3 + w_2 x^2 + w_1 x + w_0, \; M = m_2 x^2 + m_1 x + m_0,$$

$$f^{\hbar} = -\frac{\hbar^2}{16}h_2 x^2\{w_3[5x - 3(\mu_1+\mu_2)] + 3w_2\},$$

$$f_a^{\hbar} = -\frac{\hbar^2}{16}h_2 x H^{1/2}\{m_2[5x - 2(\mu_1+\mu_2)] + 3m_1\}.$$

По аналогии с классическим случаем [5] есть основание считать, что приведенный список является полным. Однако существующие возможности (в основном вычислительные) не позволяют сделать окончательного вывода об этом.

3. Уравнение Шредингера в магнитном поле. Пример. Рассмотрим оператор Шредингера в магнитном поле:

$$H = \tilde{\pi}_1^2 + \tilde{\pi}_2^2 + u(q_1, q_2), \tag{9}$$

где

$$\tilde{\pi}_1 = -i\hbar\partial_{q_1} - \mathcal{A}_1(q_1,q_2), \quad \tilde{\pi}_2 = -i\hbar\partial_{q_2} - \mathcal{A}_2(q_1,q_2)$$

и $a_1(q_1,q_2) = 1, b_1(q_1,q_2) = 0, c_1(q_1,q_2) = 1$ в (1). Выберем дополнительный эрмитов интеграл, коммутирующий с H, в виде

$$K{=}\tilde{\pi}_1 a_2(q_1,q_2)\tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_1 b_2(q_1,q_2)\tilde{\pi}_2 + \tilde{\pi}_2 b_2(q_1,q_2)\tilde{\pi}_1 + \\ +\tilde{\pi}_2 c_2(q_1,q_2)\tilde{\pi}_2 + d_2(q_1,q_2)\tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_1 d_2(q_1,q_2) + \\ +e_2(q_1,q_2)\tilde{\pi}_2 + \tilde{\pi}_2 e_2(q_1,q_2) + U(q_1,q_2). \tag{10}$$

Тогда условие $[H,K]=0$ для старших по производным членов приводит к следующим выражениям для старших коэффициентов (с точностью до сдвига переменных q_1, q_2) дополнительного интеграла K (ср. с [4]):

$$a_2(q_1,q_2) = kq_2^2 + k_1, \quad b_2(q_1,q_2) = -kq_1q_2 - k_0,$$

$$c_2(q_1,q_2) = kq_1^2 + k_2.$$

Условие $[H,K] = 0$ для младших по производным членов приводит к уравнениям в частных производных на функции $d_2(q_1,q_2), e_2(q_1,q_2), u(q_1,q_2), U(q_1,q_2)$. Однако эти уравнения не интегрируются в общем виде.

Реальной процедурой, позволяющей получать коммутирующие пары (9), (10), является переход от переменных (q_1,q_2) к переменным (s_1,s_2), определенным в §1. Необходимая для этого функция $\Phi(q_1,q_2,s)$ (2) полностью выражается через вычисленные выше коэффициенты a_i, b_i, c_i. Вычислим функцию $S(x)$, которая оказывается универсальной для всех уравнений Шредингера, обладающих дополнительным квадратичным интегралом (10):

$$S(x) = 4k[x^2 - (k_1+k_2)x + \alpha], \quad \alpha = k_1k_2 - k_0^2. \tag{11}$$

Затем при фиксированном $S(x)$ (11) находим какую-либо пару $Z(x,y)$, $f(x)$, удовлетворяющую уравнениям (5), (6). Производим обратную замену переменных: $(s_1,s_2) \to (q_1,q_2)$. Находя корни уравнения (2), получаем произвольную коммутирующую пару (9), (10).

Приведем конкретный пример. При

$$Z(x,y) = \delta\sqrt{x}\sqrt{y},$$

$$f(x) = \frac{f_m + \frac{1}{2}k\delta^2(k_1+k_2)}{x} - \frac{1}{4}\frac{\alpha k}{x^2}(3\hbar^2 + 2\delta^2)$$

получаем

$$\mathcal{A}_1(q_1,q_2) = \frac{\delta}{2}\frac{R_{q_2}G - G_{q_2}R}{G^2+4R^2},$$

$$\mathcal{A}_2(q_1,q_2) = -\frac{\delta}{2}\frac{R_{q_1}G - G_{q_1}R}{G^2+4R^2},$$

магнитное поле

$$B(q_1,q_2) = \partial_{q_1}\mathcal{A}_2(q_1,q_2) - \partial_{q_2}\mathcal{A}_1(q_1,q_2) = -\delta\frac{k\alpha}{2R^3},$$

$$u(q_1,q_2) = \frac{f_m}{R^2} + \frac{3}{4}k\hbar^2\alpha\frac{G}{R^4},$$

$$d_2(q_1,q_2) = -\frac{\delta}{2}R_{q_2}, \quad e_2(q_1,q_2) = \frac{\delta}{2}R_{q_1},$$

$$U(q_1,q_2) = f_m\frac{G}{R^2} + \frac{k}{4}\frac{\alpha}{R^2}(\delta^2 + 3\hbar^2) + \frac{3}{4}\hbar^2k\alpha\frac{G^2}{R^4},$$

где

$$R = [-k(k_1q_1^2 + k_2q_2^2 - 2k_0q_1q_2) - \alpha]^{1/2},$$

$$G = k(q_1^2+q_2^2) + k_1 + k_2.$$

Случай Ландау из предыдущего параграфа соответствует уравнению Шредингера с постоянным магнитным полем. При этом при выборе симметричной калибровки роль дополнительного интеграла играет, как и следовало ожидать, квадрат углового момента.

В рамках данной заметки мы не можем привести полный список уравнений Шредингера в магнитном поле с дополнительным квадратичным интегралом движения, поскольку, во-первых, нельзя утверждать, что список канонических пар является полным, а во-вторых, получающиеся системы довольно громоздки.

Из сказанного выше следует, что получить полный набор уравнений Шредингера в магнитном поле с дополнительным квадратичным интегралом вряд ли возможно, исследуя непосредственно пару (9), (10). Гораздо более обещающей выглядит классификация канонических пар (3), (4). Остается открытым главный вопрос: нахождение волновой функции пары (3), (4). В классическом случае систем с двумя степенями свободы (с дополнительным квадратичном интегралом), исследованном в работе [5], было предложено частичное разделение переменных (при ненулевом магнитном поле) – динамика трех разделенных переменных со связью. Кроме того, была вычислена функция Гамильтона–Якоби S_{HJ}, позволяющая построить стандартное квазиклассическое выражение для волновой функции $\psi \sim \exp(\frac{i}{\hbar}S_{\mathrm{HJ}})$. Однако вопрос о спектре и о квантовых поправках остается открытым.

Автор признателен В.Э. Адлеру, В.В. Соколову и А.Б. Шабату за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант (# 10-01-00088).

1. E. V. Ferapontov and A. P. Veselov, J. Math. Phys., **42**, 590 (2001).
2. Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, ДАН СССР **229**, 15 (1976) [Engl. transl. in Sov. Math. Dokl. **17** (1976)].
3. S. P. Novikov and A. P. Veselov, Amer. Math. Soc. Transl. **179**, 109 (1997).
4. J. Berube and P. Winternitz, J. Math. Phys. **45**,1959 (2004).
5. В. Г. Марихин, В. В. Соколов, ТМФ **149**, 147 (2006).
6. L. P. Eisenhart, Ann. Math. **35**, 284 (1934).
7. V. G. Marikhin and V. V. Sokolov, Reg. and Chaot. Dynamics **10**, 59 (2005).