

О возможных конических сингулярностях в магнитооптике

В. С. Меркулов

ГО “Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению”, 220072 Минск, Беларусь

Поступила в редакцию 6 июня 2011 г.

После переработки 17 июля 2011 г.

Рассмотрены условия возникновения конических сингулярностей в магнитоупорядоченном кристалле при наличии дихроизма, двупреломления и магнитооптической активности. Показана возможность существования особенностей типа узловой точки, точки возврата и точки касания. Установлена связь топологического индекса замкнутой сингулярной линии с индексами *C*-точек, лежащих внутри контура. Приведены оценки для кристалла YIG:Bi.

В [1–3] рассмотрены особенности распространения света в кристаллах при наличии оптической активности, дихроизма и двупреломления. Показана возможность существования как изолированных сингулярных осей, так и конусов осей. Полученные результаты частично сохраняются и при наличии магнитооптической активности, которая может на порядки величины превышать естественную оптическую активность. Более того, в ряде магнитоупорядоченных кристаллов (редкоземельные ферриты-гранаты и ортоферриты) в определенных спектральных интервалах магнитооптическая активность, дихроизм и двупреломление могут иметь одинаковый порядок величины. При этом указанные параметры можно варьировать за счет изменения спектрального диапазона, концентрации замещающих атомов, температуры и магнитного поля в окрестности точек спиновой переориентации [4–7]. Представляет интерес исследование условий возникновения оптических конических сингулярностей в магнитоупорядоченном кристалле, чему и посвящается настоящая работа.

Согласно [1], уравнение для определения направлений обычных и сингулярных оптических осей можно представить в следующем виде:

$$P_1 P_2 + G^2 = 0, \tag{1}$$

где $P_1 = (1 + Z^4)\tilde{u}_{xx} + 2Z^2\tilde{u}_{zz} + i(1 - Z^4)u_{xy} - 2Z(1 - Z^2)u_{xz} - 2iZ(1 + Z^2)u_{yz}$, $P_2 = [P_1(Z, \mathbf{u}^*)]^*$, $G = (1 + |Z|^2)[2Xg_x + 2Yg_y + (1 - |Z|^2)g_z]$, $\tilde{u}_{xx} = (u_{xx} - u_{yy})/2$, $\tilde{u}_{zz} = u_{zz} - (u_{xx} + u_{yy})/2$, u_{jk} – компоненты симметричной части обратного тензора диэлектрической проницаемости, $Z = X + iY$, X и Y – координаты точки оптической оси на стереографической проекции, \mathbf{g} – вектор гирации, связанный с намагниченностью кристалла \mathbf{M} .

Существенно, что уравнение (1) может иметь не только решения, представляющие изолированные

точки, но и решения в виде линий $Y(X)$, соответствующих конусам сингулярных осей. Будем называть их сингулярными линиями. Действительно, рассмотрим малую окрестность сингулярной оси, изначально находящейся в начале координат. Тогда должен отсутствовать постоянный член в уравнении (1), $\tilde{u}_{xx}^2 + u_{xy}^2 + g_z^2 = 0$. При $g_z \neq 0$ и не равных нулю линейных членах рассматриваемая ось может занимать общее положение на сингулярной линии (рис. 1а). Необходимым условием является воз-

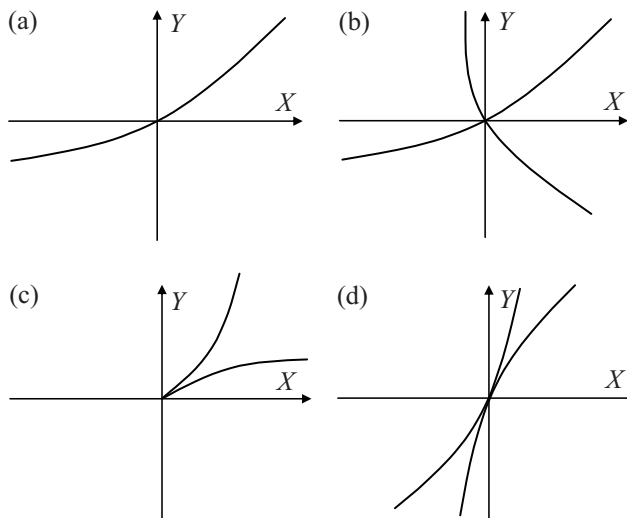


Рис. 1. Возможные конфигурации сингулярных линий в окрестности точки оптической оси. (а) – Общее положение на сингулярной линии. (б) – Узловая точка. (с) – Точка возврата. (д) – Точка касания

можность обращения в нуль одного из линейных коэффициентов при повороте системы координат. Без ограничения общности приравняем нулю коэффициент при X : $g_x g_z - \tilde{u}_{xx} u_{xz} - u_{xy} u_{yz} = 0$. В качестве примера существования такой линии можно взять

следующий: $g_x = g_y = g_z = iu_{xy} = -iu_{yz} \neq 0^1$. Заметим, что достаточность тех или иных условий нужно проверять непосредственной проверкой членов более высоких степеней в связи с комплексностью коэффициентов уравнения (1).

Возможна ситуация, когда оба линейных коэффициента обращаются в нуль. Тогда необходимо рассматривать квадратичную часть. Условие отсутствия линейных членов дает

$$\begin{aligned} u_{xz} &= -(g_x \tilde{u}_{xx} + g_y u_{xy})/g_z, \\ u_{yz} &= (g_y \tilde{u}_{xx} - g_x u_{xy})/g_z. \end{aligned} \quad (2)$$

Отсюда получим также $u_{xz}^2 + u_{yz}^2 + g_x^2 + g_y^2 = 0$.

Рассмотрение квадратичной части позволяет найти два значения первой производной $Y'(X)$ в начале координат, являющиеся корнями соответствующего квадратного уравнения:

$$Y'_{1,2} = (g_x g_y + u_{xy} \tilde{u}_{zz} \pm D^{1/2})/(\tilde{u}_{xx} \tilde{u}_{zz} + g_x^2), \quad (3)$$

где дискриминант $D = \tilde{u}_{zz}[2g_x g_y u_{xy} - \tilde{u}_{zz} g_x^2 + (g_x^2 - g_y^2) \tilde{u}_{xx}]$.

Если оба корня – комплексные, то оптической оси отвечает изолированная точка. Если один корень – действительный, а другой – комплексный, то может быть не более одной сингулярной линии (рис. 1а). Если второй корень – тоже действительный, может иметь место узловая точка – пересечение двух сингулярных линий (или самопересечение одной линии) (рис. 1б). Примеры таких сред: $g_z = iu_{xy} = i\tilde{u}_{zz} \neq 0$ или $g_x = -g_z = iu_{xy} = iu_{yz} = -i\tilde{u}_{zz} \neq 0$.

Если мы имеем один двукратный действительный корень, то ситуация оказывается различной в зависимости от того, является ли этот корень одновременно корнем кубического уравнения, составленного из коэффициентов третьего порядка. То есть нужно исследовать, равны ли нулю результаты соответствующих многочленов. Анализ упрощается, если без ограничения общности положить этот корень равным нулю (чего всегда можно добиться поворотом системы координат). Учет кубических членов приводит к возможности расщепления линии и возникновения особенности типа полукубической точки возврата (рис. 1с). Так, при $\tilde{u}_{zz} = 0$ и $\tilde{u}_{xx} u_{xz} \neq 0$ получим

$$g_x^2 Y^2 = \tilde{u}_{xx} u_{xz} X^3 + o(X^3). \quad (4)$$

(Соответствующий пример: $g_x = g_z = i\tilde{u}_{xx} = -iu_{xz} \neq 0$.)

¹⁾Здесь и далее мы по умолчанию подразумеваем нулевые остальные компоненты. Приводимые примеры не претендуют на полноту. Они только показывают возможность реализации соответствующего случая.

Последовательное рассмотрение коэффициентов следующих порядков не дает новых видов особенностей при $g_z \neq 0$.

Теперь рассмотрим окрестность обычной оптической оси, когда $g_z = \tilde{u}_{xx} = u_{xy} = 0$. В этом случае линейные члены вообще отсутствуют. В терминах теории плоских кривых это означает, что обычной оптической оси всегда соответствует особая точка. Рассмотрение квадратичной части дает

$$Y'_{1,2} = (-g_x g_y \pm D^{1/2})/(g_y^2 + u_{xz}^2 + u_{yz}^2), \quad (5)$$

где дискриминант $D = -(u_{xz}^2 + u_{yz}^2)(g_x^2 + g_y^2 + u_{xz}^2 + u_{yz}^2)$.

Если оба корня – комплексные, то оптической оси отвечает изолированная точка. Простейшим примером этого служит оптическая ось двухосного кристалла при $u_{xz} \neq 0$, обладающая топологическим индексом “+1/2” [1]. Как и в предыдущем случае, в зависимости от наличия действительных корней мы можем иметь одну сингулярную линию, а также точку пересечения сингулярных линий. Остановимся подробнее на случае одного двукратного действительного корня, полагая без ограничения общности $Y'_{1,2} = 0$.

При $g_x \neq 0$, $g_y = 0$ и $g_x^2 + u_{xz}^2 + u_{yz}^2 = 0$ обычная ось может находиться в точке возврата (рис. 1с):

$$g_x^2 Y^2 = -\tilde{u}_{zz} u_{xz} X^3 + o(X^3). \quad (6)$$

(Соответствующий пример: $g_x = iu_{xz} = i\tilde{u}_{zz} \neq 0$.)

Если $\tilde{u}_{zz} = 0$, но $u_{xz} \neq 0$, то учет членов четвертого порядка дает особенность типа точки касания (или самоприкосновения) (рис. 1д):

$$g_x^2 Y^2 = -u_{xz}^2 X^4 + o(X^4). \quad (7)$$

Здесь обычная ось находится в точке касания двух сингулярных линий.

При $g_y \neq 0$, $g_x = 0$ и $u_{xz}^2 + u_{yz}^2 = 0$ добавляется еще одна особенность типа точки касания (рис. 1д)

$$g_y^2 Y^2 = -\tilde{u}_{zz}^2 X^4/4 + o(X^4). \quad (8)$$

В предельном случае, когда $\tilde{u}_{zz} = 0$ и только $g_y \neq 0$, получим одну линию обычных осей (рис. 1а). И наконец, когда все коэффициенты второго порядка обращаются в нуль, имеем $g_x = g_y = g_z = 0$. Но при чисто симметричном тензоре, как легко показать, вообще невозможно существование линий осей. Поэтому мы имеем только изолированные точки. Простейшим примером случая отсутствия квадратичных и кубических членов служит оптическая ось одноосного кристалла при $\tilde{u}_{zz} \neq 0$, обладающая топологическим индексом “+1” [1].

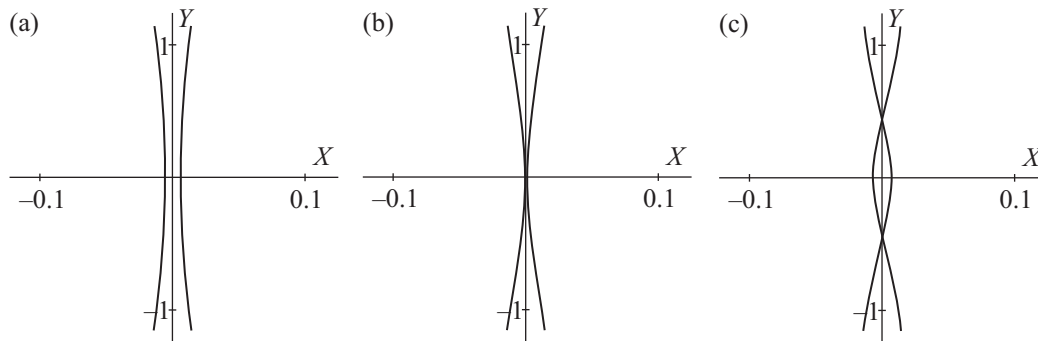


Рис. 2. Возможные конфигурации сингулярных линий в $Y_2BiFe_5O_{12}$ на длине волны 459 нм при наблюдении поперек вектора намагниченности. (а) – Две сингулярные линии (отображение конуса сингулярных осей). (б) – Образование точки касания при компенсирующем одноосном механическом напряжении вдоль оси y . (с) – Образование двух узловых точек при дальнейшем увеличении напряжения

Рассмотрение окрестности круговой оси $\tilde{u}_{xx} = iu_{xy} \neq 0, g_z = 0$ не дает новых видов особенностей. Более того, такая ось может или быть изолированной точкой (топологический индекс “ $+\frac{1}{4}$ ”), или лежать на линии эллиптических сингулярных осей.

Теперь рассмотрим замкнутую линию эллиптических (в частном случае линейных) сингулярных осей и зададимся вопросом о том, на какой угол повернется главная ось эллипса поляризации собственной волны при обходе такой линии. Согласно [1], угол наклона эллипса поляризации сингулярной оси

$$\varphi = \arg(P_1/G)/2 \equiv \arg(-G/P_2)/2. \quad (9)$$

Для искомого контурного интеграла получим

$$\oint d\varphi = 2\pi \sum_i C_i, \quad (10)$$

где C_i – топологические индексы C -точек, лежащих внутри контура, которые соответствуют нулям полинома P_1 или P_2 в зависимости от того, по какой из ветвей поверхности собственных значений обратного тензора диэлектрической проницаемости производится суммирование. Естественно, такая замкнутая сингулярная линия может обладать только топологическими индексами “0”, “ $+\frac{1}{2}$ ” или “+1”.

При поиске условий существования конических сингулярностей в конкретном кристалле большое значение имеют области спектра, в которых происходит изменение знака действительной части вектора гирации (фарадеевского вращения) при наличии его мнимой части (фарадеевской эллиптичности). В такой области удается согласовать аргументы симметричной и антисимметричной частей тензора диэлектрической проницаемости. Приведем некоторые оценки для кристалла висмутзамещенного

железо-иттриевого граната $Y_2BiFe_5O_{12}$ на основании данных работы [7]. На длине волны 459 нм (2.7 эВ) при ориентации намагниченности вдоль оси x имеем $ig_x = (3.15+0.35i) \cdot 10^{-3}, \tilde{u}_{xx} = 0.012ig_x, \tilde{u}_{zz} = -\tilde{u}_{xx}^2$. Аргументы g_x и \tilde{u}_{xx} различаются точно на $\pi/2$. Тем самым выполняется условие существования кругового конуса линейных сингулярных осей, ось которого совпадает с x . Угол раствора конуса составляет около 89° . На проекции в координатах X, Y имеем две сингулярные линии (рис. 2а). Одноосную анизотропию тензора u_{jk} можно скомпенсировать с помощью наложения одноосного механического напряжения σ_{xx} за счет пьзооптического эффекта (напряжение имеет порядок 10^4 Н/см² [9]). Тогда сингулярные линии сольются в одну линию обычных осей. Если приложить такое же по величине, но противоположное по знаку напряжение σ_{yy} , то сингулярные линии образуют точку касания (рис. 2б), представляющую собой обычную оптическую ось. При дальнейшем увеличении напряжения образуются две узловые точки (рис. 2с), совпадающие с выходами двух обычных оптических осей.

Полученные результаты показывают возможность существования таких оптических конических сингулярностей, как узловая точка, точка возврата и точка касания. Обязательным условием существования конусов оптических осей и указанных особенностей является наличие антисимметричной части тензора диэлектрической проницаемости, а также мнимой части в симметричной и/или антисимметричной части.

²⁾ Возможный дополнительный вклад в \tilde{u}_{xx} , квадратичный по намагниченности [8], имеет такой же порядок величины, и его учет не оказывает принципиального влияния на оценки.

1. M. V. Berry and M. R. Dennis, Proc. R. Soc. Lond. A **459**, 1261 (2003).
2. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, ЖЭТФ **125**, 999 (2004).
3. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, ЖЭТФ **13**, 853 (2008).
4. W. J. Tabor, A. W. Anderson, and L. G. Van Uitert, J. of Appl. Phys. **41**, 3018 (1970).
5. R. Clover, C. Wentworth, and S. Mroczkowski, IEEE Trans. Magn. **MAG-7**, 480 (1971).
6. К. П. Белов, А. К. Звездин, А. М. Кадомцева, Р. З. Левитин, *Ориентационные переходы в редкоземельных магнетиках*, М.: Наука, 1979.
7. S. Wittekoek, T. J. A. Popma, J. M. Robertson, and P. F. Bongers, Phys. Rev. B **12**, 2777 (1975).
8. G. A. Smolensky, R. V. Pisarev, I. G. Siny, and N. N. Kolkova, J. Phys. Colloques **32**, C1-1048 (1971).
9. A. N. Ageev, O. G. Rutkin, A. S. Trifonov et al., Rev. Phys. Appl. **20**, 753 (1985).